Zeitbedarf des Algorithmus für die Berechnung des gefäßfreien Gebietes

István Pál

$\pi - \lambda @ \beta$
Email: pi-lab@web.de

Zusammenfassung. Die Größe des gefäßfreien Gebietes auf der Retina ist ein wichtiges Merkmal bei der Diagnose zahlreicher retinalen Zirkulationserkrankungen bzw. des Glaukoms. Die automatische Bestimmung dieses Gebietes benötigt die wesentlichen Rechenoperationen bzw. Zeit. Es wird ein Algorithmus vorgestellt, der die Größe des gefäßfreien Gebietes bestimmt. Es wird mathematisch gezeigt, unter welchen Bedingungen dieser Algorithmus für die Scanning Laser Doppler Flowmetrie (SLDF) Perfusonsbilder optimal ist.

1 Problemstellung

Das Scanning Laser Doppler Flowmetrie Verfahren (SLDF) ermöglicht die 2D-Darstellung der retinalen Gefäße bzw. die Blutzirkulation in denen. Dadaurch ist eine bessere Untersuchung der retinalen Perfusion und das Glaukom möglich. Eine kurze Beschreibung des Verfahrens findet man auch in [1]. Die Größe des Bildes ist 64×256 Pixel, was auf der Retina einem $0,7 \times 2,7\text{mm}^2$ großen Gebiet entspricht. Die Größe des gefäßfreien Gebietes bzw. des nicht perfundierten Gebietes ist eine der wichtigsten Merkmale bei der ärtztlichen Untersuchung von Glaukom und Zirkulationserkrankungen des Auges, da diese Größe dem Ausfall der Blutversorgung und der abgestorbenen Zellen auf diesem Gewebe entspricht. Es ist interessant und wichtig die Zeitkomplexität bzw. Operationsbedarf dessen sog. Distanztransformationsalgorithmus zu untersuchen und einen Vergleich mit anderen dazu ähnlichen Verfahren durchzuführen, da dieser Teil des Algorithmus die wesentliche Zeit der gesamten Merkmalberechnung benötigt.

2 Stand der Forschung

Zur automatischen Bestimmung bzw. Messung dieses Gebietes wurde ein Verfahren auf den SLDF-Retinaaufnahmen in [1] vorgestellt. Der Algorithmus berechnet zu jedem Nicht-Gefäßpixel einen Wert, der den Abstand zu dem nächstliegenden Gefäßpixel bedeutet (Distanzbild). Das Gefäßbild wird mit disjunkten Quadraten anhand dem Distanzbild ausgefüllt (Gefäßfreies-Gebiet-Bild), wie es durch den Algorithmus 1 dargestellt ist.

Algorithmus 1: Ausfüllung mit disjunkten Quadraten		
1 $\overline{\mathbb{P}}$:= Menge von Gefäßpunkten		
2 $\mathbb{P}$:= Menge von gefäßfreien Bildpunkten		
	3 $\forall p \in \mathbb{P} \;\; p \leftarrow p^A := \min\limits_{\forall \overline{p} \in \overline{\mathbb{P}}} (d_{cs}(p, \bar{p}))$	
	4 $\mathbb{P}_M := \{p \in \mathbb{P} \vert\, p = \max\limits_{\forall p} (p^A)\}$	
	5 $\mathbb{P}_R(p_i \in \mathbb{P}_M) := \{p_j \in \mathbb{P} \vert d_{cs}(p_i, p_j) \leq p_i^A\}$	
	WHILE $\exists p_m \in \mathbb{P}_M \wedge \mathbb{P}_R(p_m) \cap \overline{\mathbb{P}} = \emptyset$	
		$\overline{\mathbb{P}} := \overline{\mathbb{P}} \cup \mathbb{P}_R(p_m)$
		$\mathbb{P} := \mathbb{P} \backslash \mathbb{P}_R$
		$\mathbb{P}_M := \mathbb{P}_M(p_m)$
UNTIL $\exists\, p^A \; : p^A > 1$		

Die Mengen $\overline{\mathbb{P}}$ und $\mathbb{P}$ sind natürlich disjunkt und deren Vereinigung gibt das ganze Retinabild an.

Der entscheidende Punkt beim Betrachten der Geschwindigkeit des Algorithmus 1 ist die Bestimmung des minimalen Abstandes (siehe Schritt 3 in Alg. 1). Der Algorithmus 2 berechnet den minimalen Abstand so, dass jedes gefäßfreies Pixel mit jedem Gefäßspixel verglichen wird. Im Algorithmus 3 wird der minimale Abstand ausgehend aus einem gefäßfreien Pixel in Spiralform des nächstliegenden Gefäßpixels gesucht. Die Spiralform bedeutet bei der Distanzfunktion d_{cs} eine Suche an dem Rand der immer größeren Quadraten.

Algorithmus 2:			
FOR $\forall p \in \mathbb{P}$			
	$d_{min} := 0$		
	FOR $\forall \bar{p} \in \overline{\mathbb{P}}$		
		$d := d_{cs}(p, \bar{p})$	
		IF	$d_{min} > d$
		THEN	$d_{min} := d$

Algorithmus 3:				
FOR $\forall p \in \mathbb{P}$				
	$d_{akt} := 0; \, d_{min} := 0$			
		$d_{akt} := d_{akt} + 1$		
		WHILE $\forall \hat{p} \in \mathbb{P} \cup \overline{\mathbb{P}} : d_{cs}(p, \hat{p}) = d_{akt}$		
			$d := d_{cs}(p, \hat{p})$	
			IF	$d_{min} > d$
			THEN	$d_{min} := d$
	UNTIL $\exists\, \widehat{p} : \widehat{p} \in \overline{\mathbb{P}}$			

Weitere Möglichkeiten für die Distanzbildherstellung sind in [2,3,4] vorgestellt.

3 Wesentlicher Fortschritt durch den Beitrag

Ein Auswahlkriterium der unterschiedlichen Lösungen kann anhand den zeitlichen Messungen erfolgt werden. Hier wird aber mathematisch untersucht, unter welchen Bedingungen es sich lohnt, diesen oder jenen Algorithmus für die SLDF-Retinaaufnahmen zu verwenden. Eine Bedingung zwischen Alg. 2 und Alg. 3 wird in einem mathematischen Satz formuliert und es wird bei den SLDF-Bildern untersucht. Dadurch kann man eine wesentliche Verschnellerung des Algorithmus erzielen. Der vorgeschlagene Alg. 3 wird auch mit den sequentiellen Verfahren verglichen und diskutiert.

4 Methoden

Auf den SLDF-Bildern werden im ersten Schritt die Gefäße mit einer nichtlinearen Kontrasttransformation hervorgehoben, segmentiert und schließlich binarisiert [1]. Auf diesem Bild wird die Größe des gefäßfreien Gebietes errechnet und zwar so, dass jedem Pixel, der Nicht-Gefäßpunkt ist, ein Wert (natürliche Zahl) zugeordnet wird. Dieser Wert entspricht dem Abstand bzw. Distanz, der zwischen dem Nicht-Gefäßpunkt und dem nächsten Gefäßpunkt entsteht. Der nächste Gefäßpunkt wird vom Nicht-Gefäßpunkt ausgehend in Spiralform gesucht und der Abstand wird nach dem entsprechenden Maß (Tschebischew, Euklidische usw.) aus den Pixelkoordinaten bestimmt. So entsteht das sogenannte Distanzbild. Das gefäßfreie Gebiet wird mit möglichst großen disjunkten Quadraten iterativ ausgefüllt. Als Abstandsmaß wird die Tschebischewsche Distanzfunktion verwendet:

$$d_c(p_{x_1,y_1}, p_{x_2,y_2}) := \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|) \tag{1}$$

Die Größe des gefäßfreien Gebietes wird aus dem Mittelwert der fünf größten Quadrate errechnet. Dieser Wert kann z.B. als Eingang eines Neuronales Netzes (Klassifikator) verwendet werden, für eine Gesund/Krank Unterscheidung von Retinabildern [5,6].

5 Ergebnisse

Der Zusammenhang zwischen beiden Algorithmen (Alg. 2, Alg. 3) wird durch den folgenden Satz erläutert:

Theorem 1. *Der Zeitbedarf für den Algorithmus 1 aus [1] mit Alg. 3 ist weniger als mit Alg. 2, wenn die maximale Distanz zu einem Gefäßpunkt* $d_{max} < \frac{\sqrt{w+1}-1}{2}$ *ist, wobei* $w > 0$ *die Anzahl der weißen Punkte (w-Punkt, Gefäßpunkt) und* $s > 0$ *die Anzahl der schwarzen Punkte (s-Punkt, Hintergrundpunkt) ist, und es gilt* $K_{M \times N} = w + s$*, wobei* $M > 0$ *und* $N > 0$ *die Anzahl der Bildzeilen und Spalten sind.*

Beweis. Die Behauptung wird auf die erste Iteration bezüglich des Algs. 1 eingesehen, also für die Herstellung des Distanzbildes. Bei den weiteren Iterationen wird es entsprechend gelten. Sei $T_d > 0$ der Zeitbedarf für die Distanzberechnung zwischen einem beliebigen s-Punkt und einem w-Punkt. Die maximale Zeit der Distanzberechnung bei Alg. 2 entsteht dann, wenn $s = w = \frac{K}{2}$ ist. Das ergibt sich aus $f(w) = w \cdot (K - w) = Kw - w^2$ durch Differenzierung $f^{'}(w) = K - 2w = 0$, $f^{''}(w) = -2 < 0$. Bei dem Alg. 2, um die minimale Distanz für alle s-Punkte zu alle w-Punkt zu berechnen, wird dann eine $s \cdot w$ Distanzberechnung gebraucht. Bei dem Alg. 3 wird für alle s-Punkte maximal $s \cdot (n^2 - 1) \cdot T_d$ ($n \leq \min(N, M)$) Operation (Distanzeberechnung und Vergleich) zur Distanzberechnung verwendet. Es ist dann einzusehen:

$$\begin{aligned} \frac{K}{2} \cdot \frac{K}{2} \cdot T_d \geq s \cdot w \cdot T_d &\overset{?}{>} s \cdot (n^2 - 1) \cdot T_d \\ w &\overset{?}{>} n^2 - 1 \\ w + 1 &\overset{?}{>} n^2 \Rightarrow +\sqrt{w+1} > n (= 2d + 1) \\ +\sqrt{w+1} &> 2d + 1 \\ \frac{\sqrt{w+1} - 1}{2} &> d \end{aligned}$$

was die Behauptung des Satzes beweist.

In der Praxis wird die Distanzberechnung nur dann ausgeführt, wenn ein Gefäßpixel auf dem Rand der aktuellen Quadrates gefunden wird. Die Anzahl der Gefäßpixel ist meistens deutlich weniger als die Anzahl der Pixel auf dem Quadratrahmen. Bei der Verwendung von Maximum-Abstandsfunktion reduziert es sich auf eine Distanzberechnung.

Bei der Herstellung der Quadratausfüllung wird die maximale Distanz d_{max} von Iteration zu Iteration kleiner und die Anzahl der w-Punkten wird erhöht, so wird die Berechnungszeit bei Alg. 2 erhöht und bei Alg. 3 reduziert.

Die Anzahl der Distanzberechnung A_d ist beim Alg. 2 nur dann minimal, wenn es $w = 1$, $s = 64 \cdot 256 - 1$ oder $w = 64 \cdot 256 - 1$, $s = 1$ gilt und dann $A_d = 64 \cdot 256 - 1$. Das ergibt sich aus der Parabel $f = Kw - w^2$, wobei angenommen ist, dass $w, s \geq 1$. Man kann nun der Fall $w = 64 \cdot 256 - 1$, $s = 1$ bzw. der rechten Teil der Parabel berücksichtigen. In diesem Fall gilt die Optimalität des Alg. 3 auf den SLDF-Bildern, nämlich es ist immer gültig, dass d_{max} (≈ 32) kleiner als $\frac{\sqrt{A_d+1}-1}{2} \approx 63,5$ ist (siehe die Größe der SLDF-Bilder in der Problemstellung!).

6 Diskussion

Bei den SLDF-Bildern bedeutet die Verwendung des Alg. 3 eine wesentliche Verschnellerung der Verarbeitungszeit, obwohl es auch prozessor-, betriebsystem- und kompilerabhängig ist. Es stellte sich auch in der Paxis anhand mehreren

Tausend SLDF-Bildern heraus, dass es im Fall des Glaukoms bzw. Zirkulationsproblemen des Auges genügend viele w-Punkten gibt und die eine entsprechende Entfernung zu den s-Punkten haben und damit der Alg. 3 schneller abläuft als Alg. 2. Die genügende Anzahl der w-Punkten muss aber nicht immer gelten!

Die sequentiellen Verfahren [2,3,4] benötigen unabhängig vom Bildinhalt immer zwei Durchläufe (Iteration) auf dem Bild. Das hier vorgestellte Verfahren, das auch parallel ausführbar ist, ist bildinhaltabhängig. Bei Normalaufnahmen ist es schneller als bei Glaukomaufnahmen. Natürlich kann die Parallelität auf sequenziellem Rechner nicht als Vorteil erwähnt werden, aber dieser Algorithmus kann für beliebige Metrik mit Austausch der Distanzfunktion verwendet werden, solange bei den sequenziellen Verfahren immer unterschiedliche Algorithmen entwickelt werden müssen.

Literaturverzeichnis

1. Pál I, et al.: *Erkennung von Mikrozirkulationsstörungen der Netzhaut mittels "Scanning Laser Doppler Flowmetrie"*. In: Lehmann T, Scholl I, Spitzer K (Hrsg.), *Bildverarbeitung für die Medizin: Algorithmen–Systeme–Anwendungen Proceedings des Aachener Workshops*, Verlag der Augustinus Buchh., Aachen, S. 89–94, Nov. 8.-9. 1996.
2. Rosenfeld A, Pfalz J. L: *Sequential operations in digital picture processing. Journal of the Association for Computing Machinery*, 13:471–494, 1966.
3. Rosenfeld A, Pfalz J. L: *Distance functions on digital pictures. Pattern Recognition*, 1:33–61, 1968.
4. Borgefors G: *Distance Transformations in Arbitrary Dimensions. Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 27:321–345, 1984.
5. Pál I, et al.: *Evaluation of retina pictures using "Scanning Laser Doppler Flowmetrie" with neuronal networks. Magyar Képfeldolgozók és Alakfelismerõk Országos Konferenciája, Konferenciakiadvány / Proceedings of the Hungarian Image Processing and Pattern Recognition Society*, Keszthely/Hungary, S. 18–24, Okt. 9.-11. 1997.
6. Pál I: *Neuronale Netze zur Klassifikation der SLDF-Perfusionsbilder anhand dem Erlanger Glaukomregister*. In: Handels H, Horsch A, Lehmann T, Meinzer H.-P (Hrsg.), *Bildverarbeitung für die Medizin 2001: Algorithmen–Systeme–Anwendungen Proceedings des Workshops in Lübeck*, Springer–Verlag, Berlin, Informatik aktuell, S. 372–376, März 4.-6., 2001.