ПОДГРУППЫ В ГРУППАХ ЛИЕВА ТИПА, НОРМАЛИЗУЕМЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ПОДГРУППОЙ

И.З. Голубчик
БГПУ им. М.Акмуллы
г. Уфа

И.Р. Салихова
ГБПОУ УАТК
г. Уфа
irina091185@mail.ru

Аннотация

Пусть $T \subseteq Z^n$ — конечное множество, $g = \bigoplus_{\alpha \in T} g_\alpha$ — конечно градуированная алгебра Ли над полем рациональных чисел и $g_0 = \sum_{\alpha \neq 0}[g_\alpha, g_{-\alpha}]$ и для $\beta \neq 0$, $\beta \in T$ имеем $g_\beta = \Sigma_{\gamma \in T}[g_\gamma, g_{\beta-\gamma}]$, где γ и β линейно независимы. Группу $E(g)$, порожденную $e^{\operatorname{ad} a_\alpha}$, $a_\alpha \in g_\alpha$, $\alpha \neq 0$ назовем группой лиева типа. Пусть H — подгруппа в $\operatorname{Aut} g$, $H \supseteq E(g)$ и $NE(g)$ — нормальная подгруппа в H, порожденная $E(g)$ для идеала I в g такого, что $I = \bigoplus_{\alpha \in T}(I \cap g_\alpha)$. Положим $NE(I)$ — нормальная подгруппа в H, порожденная $e^{\operatorname{ad} a_\alpha}$, где $a_\alpha \in I \cap g_\alpha$, $\alpha \neq 0$ и $C(I) = \{a \in H \mid a(x) - x \in I$ для всех $x \in g\}$. В данной работе доказаны коммутаторные формулы для конгруэнц-подгрупп групп лиева типа.

1 Введение

Всюду ниже R — ассоциативная PI-алгебра над полем Q рациональных чисел, $R^{(-)}$ – алгебра Ли кольца R. F, G, H – стандартный базис простой трехмерной алгебры Ли $sl_2(Q)$, то есть $[F,G] = H$, $[H,F] = 2F$, $[H,G] = -2G$ и A: $sl_2(Q) \to R^{(-)}$, $t(g)$: $sl_2(Q) \to R^{(-)}$ — мономорфизмы алгебр Ли. Напомним, что произвольная Q-подалгебра в алгебре $m \times m$ матриц над произвольным коммутативным кольцом $\bigwedge$, $\bigwedge \supseteq Q$, является PI-алгеброй.

Определение 1. Нетрудно показать, что $A(F)$ и $A(G)$ — нильпотентные элементы кольца R. Для $t \in Q^+ = \{a \in Q \mid a > 0\}$ положим $w_A(t) = \exp(tA(F))\exp(-t^{-1}A(G))\exp(tA(F))$ и $t_A = w_A(t)w_A(t)^{-1}$. Положим $R_{i,A} = \{x \in R \mid t_A x t_A^{-1} = t^i x\}$, где i — целое число.

Замечание 1. Отображение $\bar{A}$: $Q^+ \to Gg_1(R)$, где $\bar{A}(t) = t_A$, является мономорфизмом групп, и существует n, для которого $R = \bigoplus_{i=-n}^{n} R_{i,A}$. Пусть $a \in R$ и $a = \sum_{i=-n}^{n} a_i$, $a_i \in R_{i,A}$. Положим $< a, A >= \{i|$ $a_i \neq 0\}$.

Определение 2. Пару мономорфизмов A: $sl_2(Q) \to R^{(-)}$ и $t(g)$: $sl_2 \to R^{(-)}$ назовем согласованной, если:
1) $t_A s_{t(g)} = s_{t(g)} t_A$ при $s, t \in Q^+$;
2) $\langle A(F), t(g)\rangle = \{-1\}$, $\langle A(G), t(g)\rangle = \{1\}$;
3) $0, -4 \notin \langle t(g)(F), A\rangle$, $0, -4 \notin \langle \psi(G), \varphi\rangle$, где F, G, H — стандартный базис в $sl_2(Q)$.

In: A.A. Makhnev, S.F. Pravdin (eds.): Proceedings of the International Youth School-conference «SoProMat-2017», Yekaterinburg, Russia, 06-Feb-2017, published at http://ceur-ws.org

Определение 3. Пусть A: $sl_2(Q) \to R^{(-)}$ — мономорфизм алгебр Ли, подалгебра Ли $g \subseteq R^{(-)}$ и $\operatorname{Im} A \subseteq g$. Далее, $g_A = [\operatorname{Im} A, g]$, $C(g_A) = \{a \in Gg_1(R) \mid ag_Aa^{-1} = g_A\}$ и $NE(g)$ — подгруппа в $C(g_A)$, порожденная $\exp(x)$, где $x \in g \cap R_{i,A}$ и $i \neq 0$. Для идеала I алгебры Ли g_A пусть $C(I) = \{a \in Cg_1 \mid aIa^{-1} = I$ и $axa^{-1} - x \in I$ для всех $x \in g_A\}$ и пусть $NE(I)$ — нормальная подгруппа в группе $NE(g)$, порожденная $\exp(x)$, где $x \in g \cap R_{i,A}$ и $i \neq 0$.

Определение 4. Алгебра Ли g называется специальной, если $g \subseteq R^{(-)}$, где R — PI-кольцо. Пусть $\operatorname{Ad}(g)$ — присоединенная ассоциативная алгебра, то есть ассоциативная алгебра, порожденная операторами 1 и $\operatorname{ad} X$, где $X \in g$. Для идеала I алгебры Ли g положим $\nu(I) = \{y \in \operatorname{Ad}(g) \mid y(g) \subseteq I\}$, и пусть $r(I,g)$ — пересечение всех идеалов T в g, содержащих I, для которых кольцо $\operatorname{Ad}(g/T)$ первично и центр g/T нулевой.

2 Вспомогательные предложения

Предложение 1. *Пусть R — первичная PI-алгебра и C — центр кольца R. Тогда кольцо частных $R(C\ \{0\})^{-1}$ является кольцом $n \times n$ матриц над телом D и тело D — конечномерно над своим центром ([7. теор. 7.3.2]).*

Предложение 2. *Радикал Джекобсона и, в частности, первичный радикал конечнопорожденной PI-алгебры нильпотентен [5, 6].*

Предложение 3. *Пусть g — специальная алгебра Ли. Тогда $\operatorname{Ad}(g)$ – PI-алгебра [2, теорема 6.3.4].*

Предложение 4. *Пусть g_A — из определения 3, $r(\{0\}, g_A) = \{0\}$ и N — пересечение всех идеалов I из g_A, для которых кольцо $\operatorname{Ad}(g_{A/I})$ первично, центр $g_{A/I}$ нулевой и $\operatorname{p.i.deg} \operatorname{Ad}(g_{A/I}) < \operatorname{p.i.deg} \operatorname{Ad}(g_A) = n$, где $\operatorname{p.i.deg}$ алгебры — это наименьшая степень стандартного тождества, выполненного во всех первичных факторкольцах кольца R. Тогда для любого идеала T алгебры Ли g_A такого, что $T \subseteq N$, существуют идеал S в g_A и идеал P в $\operatorname{Ad}(g_A)$ такие, что $S \subseteq T \subseteq r(S, g_A)$, идеал P алгебраичен над $\nu(T) \cap C$, где C — центр алгебры $\operatorname{Ad}(g_A)$, и $\pi[G(g_A, S), E(g, g)] \subseteq 1 + P$.*

Доказательство. Пусть $K = Z(n)[x_1, ..., x_m, ...]$ — кольцо общих матриц. Образующие кольца K — матрицы $x_m = (x_{ij}^m)$, элементы которых — алгебраически независимые коммутирующие переменные. Из предложения 3.1 [8] следует, что для любого некоммутативного многочлена $\delta(x_1, ..., x_k)$, кососимметричного по первым n^2 переменным, выполняется соотношение

$$\delta a = \sum_{i=1}^{n^2} (-1)^{i-1} \delta(x_1, ..., a, ..., x_{n^2}, ..., x_k) x_i, \tag{1}$$

где a — любой элемент кольца K. Далее, пусть $f(x_1, ..., x_p)$ — полилинейный полином Капланского порядка n, принимающий лишь центральные значения, хотя бы одно из которых отлично от нуля на любой алгебре матриц порядка n коммутативным кольцом. Подставляя в полином f вместо x_1 выражение $x_{k+1}\delta x_{k+2}$, а вместо $x_2, ..., x_p$ — переменные $x_{k+3}, ..., x_{k+p+1}$, получим полином Капланского, кососимметричный по первым n^2 переменным (существование кососимметричного многочлена, не обращающегося в нуль ни при какой алгебре матриц порядка n, доказано в [8]). Таким образом, можно считать, что в соотношении (1) δ — центральный элемент алгебры K и $x_j a\delta = \delta x_j a = \sum_{i=1}^{n^2} (-1)^{i-1} \delta(x_1, ..., x_j a, ..., x_k) x_i = \sum_{i=1}^{n^2} x_i c_{ij}$, где $c_{ij} \in C(K)$, $C(K)$ — центр алгебры K. Следовательно, умножение справа на $a\delta$ действует как эндоморфизм правого $C(K)$ — модуля с образующими $x_1, ..., x_{n^2}$. Следовательно, оператор умножения справа на $a\delta$ удовлетворяет харрактеристическому полиному матрицы (C_{ij}). Поскольку K — область целостности, элемент $a\delta$ алгебраический над $C(K)$ степени выше n^2. Пусть теперь l — некоторое натуральное число, $\delta_1, ..., \delta_l$ — элементы кольца K, полученные из многочлена δ подстановкой новых переменных так, чтобы множество переменных, входящих в $\delta_1, ..., \delta_l$, не пересекалось с множеством $x_1, ..., x_l$ и переменные в нем не пересекались попарно. Из теоремы А.И. Ширшова [4] следует, что $x_1\delta_1 + ... + x_l\delta_l = X$ — алгебраический элемент $C(K)$ — алгебры K. Действительно, в $C(K)$ — алгебре B, порожденной элементами $x_i\delta_i$, любое произведение образующих — алгебраический элемент, поэтому B — конечный $C(K)$-модуль и из теоремы Гамильтона—Кэли $x_1\delta_1 + ... + \delta_l x_l$ алгебраичен над $C(K)$. Значит, условие алгебраичности:

$$x^h + f_1 x^{h-1} + ... + f_h = 0, \tag{2}$$

где $f_i \in C(K)$ — некоторые многочлены. Это соотношение между общими матрицами является тождеством любой алгебры матриц над полем, следовательно, любая его однородная компонента — также тождество и является соотношением между общими матрицами. Рассматривая однородную компоненту степени h по $x_1, ..., x_l$, можем считать, что f_i — однородный полином степени i по переменным $x_1, ..., x_l$.

Пусть теперь $P = \delta(\nu(T))\nu(T)$, $x \in P$. Тогда $x = \sum \delta_i x_i$, и из (2), учитывая, что f_i — однородные по $x_1, ..., x_l$ многочлены, получаем, что значение f_i после подстановки лежит в $\nu(T) \cap C$ и x алгебраичен над $\nu(T) \cap C$. Положим $S = \delta(\nu(T))(T)$. Тогда, если I — идеал в g_A, g_A/I имеет нулевой центр, $\mathrm{Ad}(g_A/I)$ — первичное кольцо и $I \supseteq S$, то $I \supseteq T$. Действительно, если $\mathrm{p.\,i.\,deg}\,\mathrm{Ad}(g_A/I) < \mathrm{p.\,i.\,deg}\,\mathrm{Ad}(g_A)$, то $I \supseteq N \supseteq T$, а если $\mathrm{p.\,i.\,deg}\,\mathrm{Ad}(g_A/I) < \mathrm{p.\,i.\,deg}\,\mathrm{Ad}(g_A) = n$ и T не лежит в I, то $\mathrm{ad}\, T/\nu(T)$ порождает ненулевой элемент в первичном PI-кольце $\mathrm{Ad}(g_A/I)$, значит, идеал $\nu(T)/\nu(I)$ ненулевой в $\mathrm{Ad}(g_A/I)$ и по предложению 1.1 в нем выполнены те же тождества, что и в $\mathrm{Ad}(g_A/I)$. По определению центрального полинома δ получаем, что $\delta(\nu(T))$ не лежит в $\nu(I)$ и $S = \delta(\nu(T))(T) \subseteq I$, что противоречит выбору I. Значит $I \supseteq T$ и $S \subseteq T \subseteq r(S, g_A)$. Наконец, если $a \in G(g_A, S)$, то $axa^{-1} - x \in S \subseteq \delta(\nu(T))(T)$, где $x \in g_A$ и $\pi(a)\,\mathrm{ad}\,x\pi(a)^{-1} - \mathrm{ad}\,x = \mathrm{ad}(axa^{-1} - x) \in \delta(\nu(T))\,\mathrm{ad}\,T \subseteq P$, ибо $\mathrm{ad}\,T \subseteq \nu(T)$ и $\mathrm{ad}(\lambda(x)) = \lambda\,\mathrm{ad}\,x$ при $\lambda \in \delta(\nu(T)) \subseteq C$. Но тогда группы $\pi G(g_A, S)$ и $\pi E(g, g)$ перестановочны по модулю идеала P, и значит $\pi[G(g_A, S), NE(g)] \subseteq 1 + P$. Предложение 4 доказано. □

Предложение 5. *Пусть F — нильпотентное подкольцо в ассоциативной алгебре R над полем Q, $a, b \in F$ и D — подгруппа, порожденная* $\exp(a)$ *и* $\{\exp(tb) \mid t \in Q\}$. *Тогда* $\exp(a+b) \in D$ *и* $\exp\{t(ab-ba) \mid t \in Q\} \subseteq D$.

Доказательство. Пусть $F^n = \{0\}$, g — подалгебра Ли в $R^{(-)}$ над полем Q, порожденная A и B, $g_2 = [g, g], ..., g_{k+1} = [g_k, g]$. Из [3. с.192] вытекает, что

$$\exp(a)\exp(b) = \exp(c), \tag{3}$$

где $c = a + b + \frac{1}{2}[a, b] + d$, $d \in g_3$. Это формула Кемпбелла—Хаусдорфа, поэтому

$$\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b)\exp(c_1), \tag{4}$$

где $c_1 \in g_2$.

Индукцией по $n + 1 - k$, где $2 \leqslant k \leqslant n$, докажем, что

$$\{\exp(x) \mid x \in g_k\} \subseteq D. \tag{5}$$

Действительно, если $n + 1 - k = 1$, то $k = n$, $L \subseteq F = \{0\}$ и $\exp(0) = 1 \in D$. Пусть $\{\exp(x) | x \in g_k\} \subseteq D$ и $k \geqslant 2$. Но g_k порождается суммами коммутаторов $[...[x_1, x_2], ..., x_k]$ и g_{k+1}, где $x_i \in \{a, \lambda b \mid \lambda \in Q\}$, кроме того, $[g_k, g_k] \subseteq g_{k+1}$, и из (4) достаточно доказать, что $m = \exp([...[x_1, x_2], ..., x_k]) \in D$. Из (3), (4), примененных к произвольным элементам $a, b \in g$, получаем, что $m = [...[\exp(x_1), \exp(x_2), ..., \exp(x_k)]\exp(z)]$, где $z \in g_{k+1}$ и $[\exp(x), \exp(m)]$ — коммутатор. По предложению индукции $\exp(z) \in D$ и $\exp(x_i) \in D$ по определению группы D. Тем самым $m \in D$. Включение (5) доказано. Из (5) $\exp(t, [a, b]) \in D$, ибо $t[a, b] \in g_2$. Кроме того, из (4) $c_1 \in g_2$, $\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b)\exp(c_1)$ и из (5) $\exp(c_1) \in D$. Значит $\exp(a + b) \in D$. Предложение 5 доказано. □

Предложение 6. *Пусть* $\mathrm{Aut}(g)$ *— группа автоморфизмов алгебры Ли в $R^{(-)}$, g — подалгебра Ли в $R^{(-)}$, D — подгруппа в $Gg_1(R)$, инвариантная относительно $NE(g)$. Для $i \neq 0$ положим $g_i(D) = \{x \in g \cap R_{i,\mathrm{Aut}(g)} \mid (\forall t \in Q) \exp(tx) \in D\}$, $g_0(D)$ — идеал в алгебре Ли $g_{\mathrm{Aut}(g)} \cap R_{0,\mathrm{Aut}(g)}$, порожденный множеством $\bigcup_{i \neq 0}[g_i(D), g \cap R_{-i,\mathrm{Aut}(g)}]$, и пусть $I = \sum_{i=-n}^{n} g_i(D)$. Тогда I — идеал в алгебре Ли g_A.*

Пункт 1 предложения 6 *Покажем, что $(tt(g)(F))m\ \exp(tt(g)(G)) \in NE(g)$. Действительно, $\langle t(g)(F), t(g)\rangle = \{2\}$, $\langle t(g)(G), t(g)\rangle = \{-2\}$ и по определению 2 пункта 3 получается, что $t(g)(F) = \sum_{i \neq 0} F_{i,2}$, $F_{i,2} \in g_{i,2}$, $t(g)(G) = \sum_{j \neq 0} G_{j,-2}$, $G_{j,-2} \in g_{j,-2}$. Тогда подкольцо в R, порожденное элементами $F_{i,2}$, лежит в $\sum_{j \geqslant 2} R_{j,t(g)}$ и, значит, является нильпотентным. По предложению 5,* $\exp(tt(g)(F))$ *лежит в подгруппе, порожденной элементами* $\exp(tF_{i,2}) \in E(g, g)$, *ибо $i \neq 0$. Аналогично,* $\exp(tt(g)(G)) \in NE(g)$. *Пункт 1 завершен.*

Предложение 7. *Пусть $R = P_k$ — кольцо $k \times k$ матриц над полем P,* $\mathrm{Char}\,P = 0$, *g — такая подалгебра Ли в $R^{(-)}$, что $N = PL$ — простая алгебра Ли. Далее* $\mathrm{Aut}(g)$ *— группа автоморфизмов в $R^{(-)}$, D — подгруппа в G, инвариантная относительно $E(g, g)$, D не лежит в $C(g_A, \{0\})$. Тогда $E(g, I) \subseteq D$ для некоторого нецентрального идеала I алгебры Ли g_A.*

Пункт 1 предложения 7 *Пусть A — нильпотентное подкольцо в ассоциативном кольце $S, b \in S$ и*

$$b^n = 0, \quad [b, A] \subseteq A, \quad A^n = \{0\}. \tag{6}$$

Тогда для подкольца B, порожденного Qb и A, $B^n = \{0\}$. Действительно, если $c \in B^{2n}$, то из (6) имеем, что $c \in b^n B + A^n B = \{0\}$. Пункт 1 завершен.

Предложение 8. *Пусть R — ассоциативная PI-алгебра над полем Q, $\mathrm{Aut}(g)$ — группа автоморфизмов в $R^{(-)}$, g — Q-алгебра Ли в $R^{(-)}$. D — подгруппа в G, инвариантная относительно $NE(g)$, D не лежит в $C(g_A, \{0\})$. Тогда $NE(I) \subseteq D$ для некоторого нецентрального идеала I алгебры Ли g_A.*

Пункт 1 предложения 8 *Пусть M — простая конечномерная алгебра Ли над полем P, $\mathrm{Char}\, P = 0$ и N — подалгебра Ли над Q в g, $P{\cdot}N = M$. Тогда $\mathrm{ad}\, N$ — первичное кольцо. Действительно, $P{\cdot}\mathrm{Ad}\, N = \mathrm{Ad}\, M$ и $\mathrm{Ad}\, M$ — простая ассоциативная конечномерная PI-алгебра. Значит, кольцо $\mathrm{Ad}\, N$ первично. Пункт 1 завершен.*

Пункт 2 предложения 8 *Пусть $J = r(\{0\}, M_A)$ — из определения 4. Покажем, что $\mathrm{ad}\, J$ лежит в $\mathrm{Rad}\,\mathrm{Ad}\, M_A$ — радикале Джекобсона алгебры $\mathrm{Ad}\, M_A$. Действительно, пусть F — максимальный идеал в $\mathrm{Ad}\, M_A$. Тогда по предложению 3, $R_1 = (\mathrm{Ad}\, M_A)/F$ — простая конечномерная над полем P ассоциативная алгебра и $(\mathrm{Ad}\, M_A)/F$ порождает R_1, Следовательно, неприводимое представление. Значит, T — прямая сумма простых конечномерных над P алгебр Ли и некоторой центральной алгебры. Но $[M_A, M_A] = M_A$, значит, $[T, T] = T$, и T — прямая сумма простых конечномерных над PI-алгебр Ли. Тогда из пункта 1 предложения 8 и определения 4 получаем $\mathrm{ad}\, J \subseteq F$. Но $\mathrm{Ad}\, M_A$ — PI-кольцо, значит, радикал Джекобсона является пересечением максимальных идеалов и, следовательно, $\mathrm{ad}\, J \subseteq \mathrm{Rad}\,\mathrm{Ad}\, M_A$. Пункт 2 завершен.*

3 Основная теорема

Теорема 1. *Пусть H — подгруппа в E, инвариантная относительно $NE(g)$. Тогда $[C(I), NE(g)] = NE(I)$.*

Пусть $g = \bigoplus_{\alpha \in K} g_\alpha \subseteq R^{(-)}$ — стандартно градуированная, специальная алгебра Ли над полем рациональных чисел $\mathrm{Aut}(g)$ группа автоморфизмов алгебры Ли, $E(g)$ — подгруппа в $\mathrm{Aut}(g)$, порожденная элементами $e^{\mathrm{ad}\, x_\alpha}$, где $\alpha \neq 0$, $x_\alpha \in g_\alpha$. Далее G — подгруппа в $\mathrm{Aut}(g)$, содержащая $E(g)$. Для идеала I в g положим $C(I) = \{A \in G | (\forall a \in g) A(a) - a \in I\}$ и пусть $E(g, I)$ — нормальная подгруппа в G, порожденная элементами $e^{\mathrm{ad}\, x_\alpha}$, где $\alpha \neq 0$, $x_\alpha \in g_\alpha, I$.

Предложение 9. *Пусть I — идеал в алгебре Ли g, $\varepsilon \in \{+, -\}$, $x \in g_0 + g_\varepsilon \cap I$, $x^n = 0$ и $a \in C(I)$, $axa^{-1} \in g_0 + g_{-\varepsilon}$. Тогда $[[a, \exp(x)], NE(g)] \subseteq NE(I)$.*

Доказательство. Из пункта 1 предложения 7 имеем $\exp(-x) = \exp(x_1)\exp(x_2)$, $x_1 \in g_0$, $x_2 \in g_\varepsilon \cap I$, $\exp(axa^{-1}) = \exp(y_1)\exp(y_2)$, $y_1 \in g_0$, $y_2 \in g_{-\varepsilon}$ и

$$[a, \exp(x_1)] = \exp(y_1)\exp(x_1)\exp(y_3)\exp(x_2), \quad y_3 \in g_{-\varepsilon}, \tag{7}$$

ибо $[g_0, g_{-\varepsilon}] \subseteq g_{0-\varepsilon} = g_{-\varepsilon}$. Покажем, что $y_3 \in g_{-\varepsilon} \cap I$. Действительно, $x_2 \in g_\varepsilon \cap I$, значит, $\exp(x_2) \in E(g, g) \subseteq C(I)$ и $b = \exp(y_1)\exp(x_1)\exp(y_3) \in C(I)$. Но тогда $C(I) \ni [t_A \cdot t^2_{t(g)},\ m\exp(y_3)] = \exp(y_4(t))$, где $y_4(t) \in g_{-\varepsilon}$ и подпространство, порожденное $y_4(t)$, содержит y_3, и по предложению 5 получаем $\exp(ty_3) \in C(I)$. По определению $C(I)$ получаем, что $[y_3,\ g_A] = I$. Следовательно, $y_5(t) = t_A \cdot t^2_{t(g)} \cdot y_3 \cdot t^{-2}_{t(g)} \cdot t_A^{-1} \in I$ и подпространство, порожденное $y_5(t)$, содержит y_3. Итак, $y_3 \in g_{-\varepsilon} \cap I$, $x_2 \in g_\varepsilon \cap I$ и из (7) получаем

$$d = \exp(y_1)\exp(x_1) \in C(I). \tag{8}$$

Теперь достаточно доказать, что $[d, NE(I)] \in NE(I)$. Но $y_1, z_1 \in g_0$ и если $z \in g_+$ либо $z \in g_-$, то $[d, \exp(z)] = \exp(z_1) \in C(I)$, где $z_1 \in g_+$ либо $z_1 \in g_-$. Так же, как для y_3, получаем, что $\exp(z_1) \in NE(I)$ и

$$[d, \exp(z)] \in NE(I), \tag{9}$$

при $z \in g_+ \cup g_-$.

Наконец, из пункта 1 предложения 6, определения 1, определения 2 и предложения 5 следует, что

$$\{\exp(z) | z \in g_+ \cup g_-\} \tag{10}$$

порождает группу $NE(g)$. Из (9) и (10) следует, что $[d, NE(g)] \subseteq NE(I)$, и из (7) и (8) получаем, что $[[a, \exp(x)], NE(g)] \subseteq NE(I)$. Предложение 9 доказано. $\square$

Предложение 10. *Пусть $R, \mathrm{Aut}(g), g$ — из теоремы, g_A— конечнопорожденная алгебра Ли на Q, $J = r(\{0\}, g_A)$ из определения 4 и I — идеал в алгебре Ли g_A, $I \subseteq J$. Тогда $[G(I), NE(g), NE(g), NE(g), NE(g)] \subseteq NE(I)$.*

Доказательство. Из пункта 2 предложения 8 получаем $\mathrm{ad}\, J \subseteq \mathrm{Rad}\,\mathrm{Ad}(g_A)$. Пусть $a \in G(g_A, J)$. Тогда $axa^{-1} - x \in J$, где $x \in g_A$ и $\pi(a)\,\mathrm{ad}(x)\pi(a)^{-1} - \mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}(axa^{-1} - x) \in \mathrm{ad}\, J \in \mathrm{Rad}\,\mathrm{Ad}(g_A)$. Тогда группы $\pi G(g_A, J)$ и $\pi E(g, g)$ перестановочны по модулю $\mathrm{Rad}\,\mathrm{ad}(g_A)$, и значит,

$$\pi[G(g_A, J), NE(g)] \subseteq 1 + \mathrm{Rad}\,\mathrm{ad}(g_A). \tag{11}$$

Из предложения 2 идеал $\mathrm{Rad}\,\mathrm{Ad}(g_A)$ нильпотентен.

Пусть $a \in \pi[G(I), NE(g)]$. Тогда из (11) и того, что идеал $\mathrm{Rad}\,\mathrm{Ad}(g_A)$ нильпотентен, получаем $a = \exp(x)$, $x \in \mathrm{Rad}\,\mathrm{ad}(g_A)$. Пусть $\overline{R} = \mathrm{Ad}\, g_A$ и $\overline{A} = \mathrm{ad}\, A$, $\overline{t(g)} = \mathrm{ad}\, t(g)$, $\overline{R_{ij}} = \overline{R_{i,\overline{A}}} \cap \overline{R_{j,\overline{t(g)}}}$. Тогда $x = \sum x_{ij}$, $x_{ij} \in \overline{R_{ij}}$ и $t_{\overline{A}} a t_{\overline{A}}^{-1} = \exp(\sum t^i x_{ij})$, $t_{\overline{t(g)}} a t_{\overline{t(g)}}^{-1} = \exp(\sum t^j x_{ij})$ и из того, что идеал $\mathrm{Rad}\,\mathrm{Ad}(g_A)$ нильпотентен, и предложения 6 получаем

$$a = \exp(y)\exp(z_1)...\exp(z_m), \tag{12}$$

где $y \in \overline{R_{0,\overline{A}}}$, $z_k \in \overline{R_{i_k,j_k}}$, $i_k \neq 0$ и $\exp(z_k) \in \pi G(I)$. Тогда, коммутируя $\exp(z_k)$ с $h = t_{\overline{A}}$, если пара (i,j) не пропорциональна паре $(2,-1)$, и с $h = t_{\overline{t(g)}}$ в противном случае, получаем, что $\exp(\alpha z_k) \in \pi NE(I)$, $\alpha \neq 0$, и значит, $\exp(z_k) \in \pi NE(I)$. Кроме того, $y \in \overline{R_{0,\overline{A}}}$, значит $[\exp(y), \pi NE(g)] \subseteq \pi NE(I)$, и (12) $[a, \pi NE(g)] \subseteq \pi NE(I)$ для всех $a \in \pi[G(I), NE(I)]$. Наконец, $[\ker \pi, NE(g)] = \{1\}$, и следовательно, $[G(I), \underbrace{NE(g), ..., NE(g)}_{4}] \subseteq NE(I)$. Предложение 10 доказано. $\square$

Предложение 11. *Пусть R, $\mathrm{Aut}(g)$, g — из теоремы и K — идеал в g_A. Тогда существует число $m > 0$ такое, что $[C(K), NE(g), ..., NE(g)] \subseteq NE(K)$.*

Доказательство. Достаточно доказать предложение в случае, когда алгебра Ли g конечнопорожденная.

Пункт 1 Пусть I — идеал в g_A, центр g_A/I нулевой и $\tau : G(g_A) \to G(\overline{g})$, где $\overline{g} = \mathrm{ad}(g_A/I)$ — такой гомоморфизм групп, что $\tau(a)(x + I) = axa^{-1} + I$. Тогда $\ker \tau = G(g_A/I)$, кроме того, алгебры $\overline{g}$ и (g_A/I) изоморфны, значит, $\mathrm{Ad}\,\overline{g}$ и $\mathrm{Ad}(g_A/I)$ изоморфны. Пункт 1 завершен. Пусть пункту 1 достаточно разобрать случай, когда $J = \{0\}$. Аналогично проводя индукцию по p. i. $\deg \mathrm{Ad}(g_A)$, из пункта 1 получаем, что достаточно разобрать случай, когда $K \subseteq N$, где N — пересечение всех идеалов M алгебры Ли g таких, что центр g_A/M нулевой и $\mathrm{Ad}(g_A/M)$ — первичная алгебра, p. i.-степень которой меньше, чем у алгебры $\mathrm{Ad}(g_A)$. Пусть I — максимальный идеал в g_A. Из того, что $[G(g_A), NE(g), ..., NE(g)] \subseteq NE(g)G(I)$, получаем

$$[C(g_A, K), \underbrace{E(g, g), ..., E(g, g)}_{5}] \subseteq E(g, K)\ G(g_A, K \cap I). \tag{13}$$

Пусть $T = K \cap I$ и идеалы S в g_A, $P \subseteq \mathrm{Ad}\, g_A$ взяты из предложения 4. Тогда

$$S \subseteq K \cap I \subseteq r(S, g_A). \tag{14}$$

Из предложения 10, пункта 1 и условий (13) и (14) получаем

$$[C(g_A, K), \underbrace{NE(g), ...NE(g)}_{9}] \subseteq NE(K)G(g_A, S). \tag{15}$$

По предложению 4

$$\pi[G(g_A, S), NE(g), ..., NE(g)] = 1 + P \tag{16}$$

и идеал P алгебраичен над $\nu(K \cap I) \cap C$, где C — центр кольца $\mathrm{Ad}(g_A)$. Пусть $e_1 : g_A \to g^+$, $e_2 : g_A \to g_\alpha$ — канонические гомоморфизмы и $as \in [\overline{g}C(K), \underbrace{NE(g), ..., NE(g)}_{11}] \subseteq NE(K)[G(S), NE(g)]$. Тогда из (11) $\pi(b_I a) \in 1 + P$ для некоторого $b_I \in E(K)$ и из того, что идеал P алгебраичен над $\nu(K \cap I) \cap C$,

$$e_1\pi(b_Ia)e_1d_Ia_1 = (1+\lambda_I)e_1, \tag{17}$$

для некоторого $\lambda_I \in \nu(K \cap I) \cap C$, $d_I \in \mathrm{Ad}(g_A)$.

Пункт 2 Покажем, что $M = \sum_I (1+\lambda_I)g_A$ совпадает с g_A. Действительно, так как $i + \lambda_I \in C$, то M — идеал в g_A, и если $M \neq g_A$, то $M \subseteq I$ для некоторого максимального идеала I алгебры Ли g_A. Так как $\lambda_I \in \nu(K \cap I) \subseteq \nu(I)$, то $\lambda_I g_A \subseteq I$ и $(1+\lambda_I)g_A \subseteq M \subseteq I$. Значит, $g_A \subseteq I$, что противоречит максимальности идеала I. Значит, $M = g_A$. Пункт 2 завершен.

Из пункта 2 и равенста (17) получаем

$$x_\alpha = \sum_{i=1}^{m} (1+\lambda_i)n_i, \tag{18}$$

где $n_i \in g_A$. $\exp(\lambda_i x_\alpha) \in E(J)$, $\exp(\lambda_i d_\alpha) \in E(J)$, поэтому их можно отбросить и тогда получим:

$$Ae^{\beta x_\alpha}A^{-1}e^{-\beta x_\alpha}B = Ae^{x}A^{-1}e^{-x}B, B \in E(J). \tag{19}$$

По предложению 9 получаем

$$[[A, e^{\beta x_\alpha}], NE(g)] \in E(J). \tag{20}$$

Значит $[A, NE(g), ..., NE(g)] \in E(J)$. Предложение 11 доказано. □

Список литературы

[1] I.Z. Golubchik. Groups of Lie type over PI rings. *Fundamental and Applied Mathematics*, 3(2):399–424, 1997. (in Russian)= И.З. Голубчик. Группы лиевского типа над PI кольцами. *Фундаментальная и прикладная математика*, 3(2):399–424, 1997.

[2] Y.A. Bakhturin. *Identities in Lie algebras.* Nauka, Moscow, 1985 (in Russian). = Ю.А. Бахтурин. *Тождества в алгебрах Ли.* Наука, Москва, 1985.

[3] N. Jacobson. *Lie algebras.* Mir, Moscow, 1964 (in Russian). = Н. Джекобсон. *Алгебры Ли.* Мир, Москва, 1964.

[4] K.L. Zhevlakov, A.M. Slinko, I.P. Shestakov, A.I. Shirshov. *Alternative rings.* Novosibirsk, 1976 (in Russian). = К.Л. Жевлаков, А.М. Слинько, И.П. Шестаков, А.И. Ширшов. *Альтернативные кольца.* Новосибирск, 1976.

[5] A.R. Kemer. The Kapeli identities and the nilpotency of the radical of a finitely generated PI-algebra. *DAN SSSR*, 255(4):793–797, 1980 (in Russian). = А.Р. Кемер. Тождества Капели и нильпотентность радикала конечнопорожденной PI-алгебры. *ДАН СССР*, 255(4):793–797, 1980.

[6] Yu.P. Razmyslov. Algebras satisfying Capelli identities. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 18(1): 125, 1982. = Ю.П. Размыслов. Алгебры, удовлетворяющие тождественным соотношениям типа Капелли. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 45(1): 143–166, 1981.

[7] I. Herstein. *Non-commutative rings.* Mir, Moscow, 1972 (in Russian). = И. Херстейн. *Некоммутативные кольца.* Мир, Москва, 1972.

[8] S.A. Amitsur. Identities and linear dependence. *Israel J. Math.*, 22(2):127–137, 1975.

Subgroups in groups of Lie type normalized by an elementary subgroup

Igor Z. Golubchik[1], *Irina R. Salikhova*[2]
1 – Bashkir State Pedagogical University named after M. Akmulla, Bashkortostan, Ufa, Russia
2 – Ufa Motor Transport College, Bashkortostan, Ufa, Russia

Keywords: Pi-rings, groups of Lie type, special algebra.

Let $T \subseteq Z^n$ be a finite set, $g = \bigoplus_{\alpha \in T} g_\alpha$ is a finitely graded Lie algebra over the field of rational numbers and $g_0 = \sum_{\alpha \neq 0} [g_\alpha, g_{-\alpha}]$ and for $\beta \neq 0$, $\beta \in T$ we have $g_\beta = \Sigma_{\gamma \in T} [g_\gamma, g_{\beta - \gamma}]$ where γ and β — linearly independent. The group $E(g)$ generated by $e^{\mathrm{ad}\, a_\alpha}$, $a_\alpha \in g_\alpha$, $\alpha \neq 0$ a group of Lie type. Let H be a subgroup of $\mathrm{Aut}\, g$, $H \supseteq E(g)$ and $NE(g)$ is a normal subgroup in H, generated by $E(g)$ for the ideal I in g such that $I = \bigoplus_{\alpha \in T} (I \cap g_\alpha)$ we put $NE(I)$ — the normal subgroup of H generated by $e^{\mathrm{ad}\, a_\alpha}$ where $a_\alpha \in I \cap g_\alpha$, $\alpha \neq 0$ and $C(I) = \{a \in H \mid a(x) - x \in I$ for all $x \in g\}$. In this paper we prove commutator formulas for congruences of subgroups of groups of Lie type.