# Полукольца непрерывных частичных действительнозначных функций

Е. М. Вечтомов
vecht@mail.ru

Е. Н. Лубягина
shishkina.en@mail.ru

ВятГУ (Киров)

**Аннотация**

Работа посвящена общей теории полуколец непрерывных функций. Рассматриваются полукольца $CP(X,S)$ непрерывных частичных функций на топологических пространствах $X$ со значениями в топологических полукольцах $S$. Исследуются их идеалы и конгруэнции. Основное внимание уделено полукольцам $CP(X) = CP(X,\mathbf{R})$. Показано, что дистрибутивность решетки идеалов полукольца $CP(X)$ эквивалентна тому, что $X$ является наследственным $F$-пространством. Доказана определяемость любого $T_1$-пространства $X$ решеткой идеалов полукольца $CP(X)$. Установлена двойственность между категорией $T_1$-пространств $X$ и их непрерывных отображений и категорией полуколец $CP(X)$ с $\vee$-полными гомоморфизмами в качестве морфизмов.

## 1 Введение. Основные понятия

Материал статьи относится к теории колец и полуколец непрерывных функций. Рассматриваются полукольца непрерывных частичных функций на топологических пространствах со значениями в топологических полукольцах. Исследуются решетки их идеалов и конгруэнций, вопросы определяемости и двойственности для $T_1$-пространств. Напомним, $T_1$-*пространством* называется топологическое пространство, в котором все одноточечные множества замкнуты.

Начнем с исходных понятий и обозначений. Под *полукольцом* понимается алгебраическая структура $\langle S; +, \cdot\rangle$ с коммутативно-ассоциативной операцией сложения $+$ и ассоциативной операцией умножения $\cdot$, которая дистрибутивна относительно сложения с обеих сторон. *Топологическое полукольцо* — это полукольцо с заданной на нем топологией, в которой непрерывны полукольцевые операции сложения и умножения.

Полукольцо, в котором существует нейтральный по сложению и поглощающий по умножению элемент нуль 0, называется *полукольцом с нулем*. Полукольцо с нейтральным по умножению элементом единица 1 называется *полукольцом с единицей*. Для полуколец определения *подполукольца*, *идеала*, *конгруэнции*, *фактор-полукольца*, *гомоморфизма* носят общеалгебраический характер.

Пусть $S$ — полукольцо и $X$ — произвольное множество. Обозначим через $SP^X$ множество $\bigcup\{S^Y : Y \subseteq X\}$ всех частичных функций из $X$ в $S$. Положим $D(f)$ — область определения частичной функции $f \in SP^X$.

Множество $SP^X$ с поточечными операциями сложения $+$ и умножения функций $f$ и $g$ на их общей области определения $D(f) \cap D(g)$: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ и $(fg)(x) = f(x)g(x)$ для всех $x \in D(f) \cap$



In: A.A. Makhnev, S.F. Pravdin (eds.): Proceedings of the International Youth School-conference «SoProMat-2017», Yekaterinburg, Russia, 06-Feb-2017, published at http://ceur-ws.org

$D(g) = D(f+g) = D(fg)$, является полукольцом с поглощающим элементом $\emptyset$ как по сложению, так и по умножению.

Пусть $X$ — топологическое пространство, $S$ — топологическое полукольцо и $C(X,S)$ — полукольцо всех непрерывных $S$-значных функций на пространстве $X$ с поточечно определенными операциями сложения и умножения функций. Обозначим через $CP(X,S) = \bigcup\{C(Y,S) : Y \subseteq X\}$ полукольцо всевозможных непрерывных частичных $S$-значных функций на $X$ с поточечно заданными операциями сложения и умножения частичных функций $f$ и $g$ на их общей области определения $D(f) \cap D(g)$.

Полукольцо $C(X,S)$ является подполукольцом полукольца $CP(X,S)$. Будем считать, что $C(\emptyset, S) = \{\emptyset\}$; при этом $\emptyset$ служит поглощающим элементом полукольца $CP(X,S)$.

Если топологическое полукольцо $S$ имеет единицу 1, то функция-константа 1 будет единицей полуколец $C(X,S)$ и $CP(X,S)$.

Если топологическое полукольцо $S$ имеет нуль 0, то функция-константа 0 является нулем полукольца $C(X,S)$, но не будет нулем полукольца $CP(X,S)$, будучи его нейтральным элементом по сложению. Нас особенно интересует случай, когда $S = \mathbf{R}$ — топологическое поле действительных чисел (с обычной топологией).

Положим $C(X) = C(X, \mathbf{R})$ и $CP(X) = CP(X, \mathbf{R})$. Тем самым, полукольцо $CP(X)$ всех непрерывных частичных $\mathbf{R}$-значных функций на топологическом пространстве $X$ является дизъюнктным объединением коммутативных колец $C(Y)$ с нулем и единицей по всевозможным подпространствам $Y$ пространства $X$, включая одноэлементное кольцо $C(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Другие необходимые понятия будут вводиться по ходу изложения.

Отметим, что классическая теория колец $C(X)$ непрерывных действительнозначных функций изложена в монографии Гиллмана и Джерисона [15]. В первых главах книг [10, 12] рассматриваются начала теории полуколец. Теории полуколец непрерывных числовых функций посвящена двухтомная монография [10, 11]. Информация по общей топологии содержится в трудах [14, 15].

Заметим, что впервые полукольца непрерывных частичных функций появились в работе [6].

Коснемся кратко содержания статьи. В пункте 2 исследуются полукольца непрерывных частичных функций со значениями в абстрактных топологических полукольцах с некоторыми дополнительными условиями. Основной пункт 3 посвящен развитию теории полуколец $CP(X)$. В пункте 4 приводятся дополнения и замечания, связанные с дальнейшим изучением полуколец непрерывных частичных функций.

## 2 Полукольца непрерывных частичных функций

Сначала коснемся теории идеалов в полукольцах $CP(X,S)$.

Легко видеть, что имеют место следующие две леммы:

**Лемма 1.** *Пусть топологическое полукольцо $S$ содержит единичный элемент 1 и $\{1\}$ есть собственное замкнутое подмножество в $S$, а $X$ — произвольное $T_1$-пространство. Множество $A \subseteq X$ замкнуто тогда и только тогда, когда для каждой функции $e_x \in CP(X,S)$*

$$e_A e_x = \emptyset \Rightarrow \exists f \in CP(X,S)\big((fe_A = e_A t) \wedge (\emptyset \neq fe_x \neq e_x)\big).$$

**Лемма 2.** *Для любого идеала $I$ полукольца $CP(X,S)$ и подмножества $D \subseteq X$ если множество $I \cap C(D,S)$ не пусто, то оно является идеалом в $C(D,S)$.*

**Предложение 1.** *Для любых топологического пространства $X$ и топологического полукольца $S$ с единицей 1, обладающего хотя бы одним собственным идеалом, максимальные идеалы полукольца $CP(X,S)$ имеют вид*

$$(CP(X,S) \setminus C(X,S)) \cup M,$$

*где $M$ — произвольный максимальный идеал полукольца $C(X,S)$.*

**Доказательство.** Ясно, что $(CP(X,S) \setminus C(X,S)) \cup M$ — максимальный идеал в $CP(X,S)$ для всякого максимального идеала $M$ полукольца $C(X,S)$.

Покажем, что других максимальных идеалов в полукольце $CP(X,S)$ нет. Пусть $J$— максимальный идеал полукольца $CP(X,S)$. Тогда $1 \notin J$. Если $J \cap C(X,S) = \emptyset$, то $J \subset \big(CP(X,S) \setminus C(X,S)\big) \cup M$ для любого идеала $M$ полукольца $C(X,S)$— противоречие.

Если $I = J \cap C(X,S) \neq \emptyset$, то по лемме 2 $I$— собственный идеал полукольца $C(X,S)$. Получаем, что $I \subseteq M$ для некоторого максимального идеала $M$ полукольца $C(X,S)$. Таким образом, $J \subseteq (CP(X,S) \setminus C(X,S)) \cup M$. Отсюда $J = (CP(X,S) \setminus C(X,S)) \cup M$.

Главные идеалы $(\theta_x) = \theta_x CP(X) = \{\theta_x, \emptyset\}$ при $x \in X$ суть в точности минимальные идеалы полукольца $CP(X)$. Заметим, что для любой точки $x \in X$ идеал $(e_x)$, как полукольцо изоморфный $\mathbf{R} \cup \{\emptyset\}$, содержит ровно три идеала $(e_x) \supset (\theta_x) \supset \{\emptyset\}$ полукольца $CP(X)$.

Идеал $J$ полукольца $CP(X,S)$ называется *$D$-идеалом*, если $f \in J$, $g \in CP(X,S)$ и $D(g) = D(f)$ влекут $g \in J$. Идеал $J$ называется *биидеалом*, если $J + CP(X,S) \subseteq J$.

**Предложение 2.** *Для любых топологического пространства $X$ и топологического кольца $S$ с единицей в полукольце $CP(X,S)$ биидеалы совпадают с $D$-идеалами и исчерпываются всеми объединениями главных идеалов вида $(e_A)$, $A \subseteq X$.*

**Доказательство.** Пусть идеал $I$ полукольца $CP(X,S)$ является $D$-идеалом. Рассмотрим функции $f \in I$ и $g \in CP(X,S)$ и покажем, что их сумма $f+g$ лежит в идеале $I$. Возьмем функцию $h = fg$. Имеем $h \in I$ и $D(h) = D(f) \cap D(g) = D(f+g)$. Значит, $f+g \in I$ и $I$ — биидеал.

Пусть теперь идеал $I$ полукольца $CP(X,S)$ является биидеалом. Рассмотрим функции $f \in I$ и $g \in CP(X,S)$ такие, что $D(g) = D(f) = D$. Тогда $f, g, f+g \in C(D,S)$. Так как $I$ — биидеал, то $f+g \in I$. По лемме 2 непустое множество $J = I \cap C(D,S)$ — идеал в кольце $C(D,S)$ с единицей. Имеем $f \in J$ и $f+g \in J$. Выразим функцию $g$ через функции $f+g$ и $f$: $g = (f+g) - f = (f+g) + (-1)f$. Получаем, что $g \in J \subseteq I$. Значит, $I$ — $D$-идеал.

Последнее утверждение очевидно.

Через $\mathrm{Id}\, CP(X,S)$ обозначим множество всех идеалов полукольца $CP(X)$. Относительно теоретико-множественного включения $\subseteq$ получаем решетку $\mathrm{Id}\, CP(X,S)$ с операциями $\sup(I,J) = I \cup J \cup (I+J)$ и $\inf(I,J) = I \cap J$. Решетка $\mathrm{Id}\, CP(X)$ содержит наименьшим элемент $\{\emptyset\}$ и наибольший элемент $CP(X)$.

**Предложение 3.** *Для любого топологического пространства $X$ и топологического полукольца $S$ с нулем и единицей решетка $\mathrm{Id}\, CP(X,S)$ — решетка с псевдодополнениями. Дополнениями в $\mathrm{Id}\, CP(X,S)$ обладают только элементы $\{\emptyset\}$ и $CP(X,S)$.*

**Доказательство.** Для произвольных идеалов $A$ и $B$ полукольца $CP(X,S)$ имеем

$$A \cdot B = \{\emptyset\} \Leftrightarrow A \cap B = \{\emptyset\}.$$

Поэтому для любого идеала $A$ полукольца $CP(X,S)$ идеал $CP(X \setminus D(A), S)$ будет наибольшим идеалом среди идеалов $B$ с условием $A \cap B = \{\emptyset\}$, т. е. является псевдодополнением к $A$.

Возьмем произвольный идеал $A$ полукольца $CP(X,S)$. Для его дополнения $A'$ получаем $1 \in A \cup A' \cup (A + A')$. Если $1 \in A$, то $A = CP(X,S)$, если $1 \in A'$, то $A = \{\emptyset\}$. Пусть $1 \in A + A'$. Тогда $1 = f + g$ для некоторых функций $f \in A, g \in A'$. Значит, $0 \in A \cap A'$ — противоречие.

**Предложение 4.** *Для любого топологического пространства $X$ и топологического кольца $S$ с единицей решетка $\mathrm{Id}\, CP(X,S)$ модулярна.*

**Доказательство.** Пусть $A, B, C$ — произвольные идеалы полукольца $CP(X,S)$ и $B \subseteq A$. Нужно показать, что $A \wedge (B \vee C) \subseteq (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, т. е. $A \cap (B \cup C \cup (B+C)) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A \cap B + A \cap C)$.

Достаточно доказать, что $A \cap (B + C) \subseteq A \cap B + A \cap C$.

Пусть для функции $f \in A \cap (B+C)$ выполняется равенство $f = g + h$, где $g \in B \subseteq A$ и $h \in C$. Тогда $D(f) = D(g) \cap D(h) = D$ и функции $ge_D$, $he_D$ и $f = ge_D + he_D$ принадлежат кольцу $C(D,S)$. По лемме 1 $A' = A \cap C(D,S)$, $B' = B \cap C(D,S)$, $C' = C \cap C(D,S)$ — идеалы в $C(D,S)$.

Так как $ge_D \in B' \subseteq A', he_D = f - ge_D \in A' \cap C'$, то $f \in A' \cap B' + A' \cap C' \subseteq A \cap B + A \cap C$. Значит, $A \cap (B + C) \subseteq A \cap B + A \cap C$. Итак, решетка $\mathrm{Id}\, CP(X,S)$ модулярна.

**Следствие 1.** *Решетки $\mathrm{Id}\, CP(X)$ модулярны для всех топологических пространств $X$.*

Отметим, что решетка идеалов любого кольца модулярна.

Обозначим через $\mathrm{Con}\, CP(X,S)$ решетку всех конгруэнций на полукольце $CP(X,S)$ относительно отношения включения $\subseteq$. Точной нижней гранью любого непустого множества конгруэнций на полукольце $CP(X,S)$ является их пересечение, точной верхней гранью двух конгруэнций $\rho$ и $\sigma$ будет транзитивное замыкание их композиции $\rho \circ \sigma$, наименьшей конгруэнцией служит отношение равенства $\mathbf{0}$, а наибольшей — одноклассовая конгруэнция $\mathbf{1}$.

Конгруэнцию $\rho$ на полукольце $CP(X,S)$ назовем *$D$-конгруэнцией*, если $f, g \in CP(X,S)$ и $D(f) = D(g)$ влекут $f \,\rho\, g$. Наименьшей $D$-конгруэнцией на полукольце $CP(X,S)$ служит конгруэнция $\rho_D$.

**Предложение 5.** *Для любых топологического пространства $X$ и неодноэлементного топологического кольца $S$ максимальные конгруэнции на полукольце $CP(X,S)$ совпадают с двухклассовыми $D$-конгруэнциями. При этом любая собственная конгруэнция содержится в некоторой максимальной конгруэнции.*

**Доказательство.** Покажем, что для произвольной конгруэнции $\rho$ на $CP(X,S)$ если $\rho \vee \rho_D = \mathbf{1}$, то $\rho = \mathbf{1}$. Действительно, пусть $\rho \vee \rho_D = \mathbf{1}$. Тогда найдутся такие функции $f_1, \ldots, f_n \in CP(X,S)$, что

$$\emptyset \ \rho \ f_1 \ \rho_D \ f_2 \ \rho \ f_3 \ \rho_D \ \ldots \ \rho \ f_n \ \rho_D \ 0.$$

Имеем $(\emptyset + (f_2 - f_1)) \ \rho \ (f_1 + (f_2 - f_1))$ т. е. $\emptyset \ \rho \ f_2$, откуда $\emptyset \ \rho \ f_3$. Рассуждая аналогично, получаем $\emptyset \ \rho \ f_4$, $\emptyset \ \rho \ f_5, \ \ldots, \ \emptyset \ \rho \ 0$. Для любой функции $f \in CP(X,S)$ имеем $(f + \emptyset) \ \rho \ (f + 0)$ или $\emptyset \ \rho \ f$, т. е. $\rho = \mathbf{1}$.

Итак, любая собственная конгруэнция $\rho$ содержится в собственной $D$-конгруэнции $\rho \vee \rho_D$, и максимальные конгруэнции на $CP(X,S)$ являются $D$-конгруэнциями.

Подрешетка $D$-конгруэнций на $CP(X,S)$ изоморфна решетке конгруэнций идемпотентного монополукольца $\langle \wp(X), \cap, \cap \rangle$. Поэтому в силу [13, лемма 3.1] максимальные $D$-конгруэнции на $CP(X,S)$ будут двухклассовыми.

**Предложение 6.** *Для любых топологического пространства $X$ и топологического полукольца $S$ решетка $\operatorname{Con} CP(X,S)$ модулярна (дистрибутивна) тогда и только тогда, когда $X$ одноэлементно и решетка $\operatorname{Con} S$ модулярна (дистрибутивна).*

**Доказательство.** Достаточно доказать немодулярность решетки $\operatorname{Con} CP(X,S)$ для произвольных неодноэлементного топологического пространства $X$ и топологического полукольца $S$. Возьмем в $X$ двухэлементное подпространство $Y = \{x, y\}$. Получаем семиэлементную решетку $\operatorname{Con} CP(Y,S) = \{0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \mathbf{1}\}$, где конгруэнции $\rho_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, заданы своими разбиениями:
$\rho_1 = \{C(\{x\}, S) \cup \{\emptyset\}, C(\{y\}, S), C(Y, S)\}$,
$\rho_2 = \{C(\{x\}, S) \cup \{\emptyset\}, C(\{y\}, S) \cup C(Y, S)\}$,
$\rho_3 = \{C(\{y\}, S) \cup \{\emptyset\}, C(\{x\}, S) \cup C(Y, S)\}$,
$\rho_4 = \{C(\{y\}, S) \cup \{\emptyset\}, C(\{x\}, S), C(Y, S)\}$,
$\rho_5 = \{C(\{x\}, S) \cup C(\{y\}, S) \cup \{\emptyset\}, C(Y, S)\}$.
Решетка $\operatorname{Con} CP(Y,S)$ содержит подрешетку $\{0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \mathbf{1}\}$, изоморфную пентагону, поэтому она не модулярна. Далее, каждая из конгруэнций $\rho_i$ продолжается до соответствующей конгруэнции $\sigma_i$ на всем полукольце $CP(X,S)$: конгруэнция $\sigma_i$ имеет те же классы, что и конгруэнция $\rho_i$, а остальные ее классы одноэлементны. Поэтому гомоморфизм ограничения $\operatorname{Con} CP(X,S) \to \operatorname{Con} CP(Y,S)$ является решеточным эпиморфизмом, стало быть, решетка $\operatorname{Con} CP(X,S)$ также не модулярна.

## 3 Полукольца непрерывных частичных R-значных функций

Рассмотрим некоторые аспекты теории полуколец $CP(X)$ всех непрерывных частичных $\mathbf{R}$-значных функций на $T_1$-пространствах $X$.

Каждой функции $f \in CP(X)$ соответствуют ее *нуль-множество* $Z(f) = f^{-1}(0)$ и *конуль-множество* $\operatorname{coz} f = X \setminus Z(f)$. Топологическое пространства $X$ называется *P-пространством*, если любое нуль-множество на $X$ открыто. Известно, что для тихоновских пространств любое подмножество P-пространства $X$ является P-пространством [15, chapter 14]. Поэтому имеет место

**Предложение 7.** *Тихоновское пространство $X$ будет* P*-пространством тогда и только тогда, когда полукольцо $CP(X)$ регулярно.*

Пространство $X$ называется F*-пространством*, если любые два непересекающиеся конуль-множества на $X$ функционально отдалимы. Не всякое подмножество F-пространства само будет F-пространством [15, chapter 14]. Топологическое пространство $X$ называется *наследственным* F*-пространством*, если любое подпространство в $X$ является F-пространством.

**Теорема А.** [2, теорема 1] *Топологическое пространство $X$ является* F*-пространством тогда и только тогда, когда решетка* $\operatorname{Id} C(X)$ *всех идеалов кольца $C(X)$ дистрибутивна.*

**Теорема 1.** *Для любого топологического пространства $X$ решетка идеалов* $\operatorname{Id} CP(X)$ *дистрибутивна тогда и только тогда, когда $X$ — наследственное* F*-пространство.*

**Доказательство.** Пусть решетка идеалов $\operatorname{Id} CP(X)$ дистрибутивна и $Y$ — произвольное подпространство в $X$. Заметим, что решетка $\operatorname{Id} CP(Y)$ изоморфна подрешетке $\{J \cup (CP(Y) \setminus C(Y) : J$ — идеал кольца $C(Y)\}$ решетки $\operatorname{Id} CP(X)$. Поэтому решетки $\operatorname{Id} CP(Y)$ дистрибутивны для всех подпространств $Y \subseteq X$. По теореме А заключаем, что $X$ — наследственное F-пространство.

Пусть теперь $X$ — наследственное F-пространство и $A, B, C$ — произвольные идеалы полукольца $CP(X)$. Покажем, что $A \wedge (B \vee C) \subseteq (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, т. е. $A \cap (B \cup C \cup (B + C)) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A \cap B + A \cap C)$. Достаточно доказать, что $A \cap (B + C) \subseteq A \cap B + A \cap C$.

Пусть для функции $f \in A \cap (B + C)$ выполняется равенство $f = g + h$, где $g \in B$ и $h \in C$. Снова обозначим $D = D(f) = D(g) \cap D(h)$. Функции $ge_D$, $he_D$ и $f = ge_D + he_D$ принадлежат кольцу $C(D)$, для которого решетка идеалов $\mathrm{Id}\, C(D)$ дистрибутивна. Значит, для идеалов $A' = A \cap C(D)$, $B' = B \cap C(D)$, $C' = C \cap C(D)$ из $\mathrm{Id}\, C(D)$ выполняется $A' \cap (B' + C') \subseteq A' \cap B' + A' \cap C'$. Получаем, что $f \in A' \cap (B' + C')$ и $f = g' + h'$ для подходящих функций $g' \in A' \cap B' = A \cap B \cap C(D)$, $h' \in A' \cap C' = A \cap C \cap C(D)$, т. е. $f \in A \cap B + A \cap C$. Значит, $A \cap (B + C) \subseteq A \cap B + A \cap C$. Поэтому решетка $\mathrm{Id}\, CP(X)$ дистрибутивна.

**Теорема 2.** *Всякое $T_1$-пространство $X$ определяется — однозначно с точностью до гомеоморфизма — решеткой $\mathrm{Id}\, CP(X)$.*

**Доказательство.** Элементы вида $(e_A) = CP(A)$, $A \subseteq X$, решетки $\mathrm{Id}\, CP(X)$ суть в точности псевдодополнения в ней, а элементы вида $(e_x) = CP(\{x\})$, $A \subseteq X$ — ее минимальные псевдодополнения. Конечнопорожденные идеалы полукольца $CP(X)$ будут компактными элементами решетки $\mathrm{Id}\, CP(X)$.

По предложению 1 пересечением идеалов, максимальных в подрешетке $\mathrm{Id}\, CP(A)$, $A \subseteq X$, будет идеал $O(A) = (CP(A) \setminus C(A)) \cup \{\theta_A\}$. Идеал $P(A) = CP(A) \setminus C(A)$ будет точной верхней гранью псевдодополнений решетки $\mathrm{Id}\, CP(X)$, содержащихся в идеале $O(A)$. Невыполнение соотношения $CP(A) \geqslant (e_x)$ равносильно тому, что $x \notin A$. Идеал $CP(A \cup \{x\})$ является наименьшим из псевдодополнений $J$, для которых $J \geqslant CP(A)$ и $J \geqslant (e_x)$.

В силу леммы 1 множество $A \subseteq X$ замкнуто тогда и только тогда, когда для всех $x \in X$

$$x \notin A \Rightarrow \exists e \in (e_{A \cup \{x\}}) \big((e(A) = \{1\}) \wedge (e(x) = 0)\big). \tag{1}$$

Покажем, что замкнутость множества $A \subseteq X$ эквивалентна выполнению следующего условия (*):

*Для любого идеала $(e_x)$, $x \in X$, не удовлетворяющего условию $CP(A) \geqslant (e_x)$, найдется такой конечнопорожденный идеал $(f_1, \ldots, f_n) \leqslant CP(A \cup \{x\})$, что $(f_1, \ldots, f_n) \vee P(A)$ является максимальным идеалом в $CP(A \cup \{x\})$ и не выполняется условие $(f_1, \ldots, f_n) \vee P(A) \geqslant (e_x)$.*

Пусть множество $A$ замкнуто в $X$. Возьмем произвольную точку $x \in X \setminus A$. Рассмотрим функцию $e$ из критерия (1). Получаем главный идеал $(e) \leqslant (e_{A \cup \{x\}})$, для которого не выполняется соотношение$(e) \vee P(A) \geqslant (e_x)$ и $(e) \cap C(A \cup \{x\}) = M_x = \{f \in C(A \cup \{x\}) : f(x) = 0\}$ — максимальный идеал в кольце $C(A \cup \{x\})$. Ясно, что $(e) \vee P(A)$ является максимальным идеалом в $CP(A \cup \{x\})$. Значит, выполняется условие (*).

Обратно, пусть для множества $A \subseteq X$ выполняется условие (*). Среди функций $f_1, \ldots, f_n \in CP(A \cup \{x\})$ найдутся функции из $C(A \cup \{x\})$. Рассмотрим эти функции $f_{i_1}, \ldots, f_{i_k}$ и соответствующий идеал $I = (f_{i_1}, \ldots, f_{i_k})$ кольца $C(A \cup \{x\})$.

Идеал $I = (f_{i_1}, \ldots, f_{i_k}) = (f_1, \ldots, f_n) \cap C(A \cup \{x\})$ — максимальный в кольце $C(A \cup \{x\})$. Поскольку не выполняется $(f_1, \ldots, f_n) \geqslant (e_x)$, то $f_i(x) = 0$ для любого $i = i_1, \ldots, i_k$, стало быть, $I \subseteq M_x$. Поэтому $I = M_x$.

Идеал $M_x = I = (f_{i_1}, \ldots, f_{i_k})$ является главным в кольце $C(A \cup \{x\})$. Действительно, положим

$$g = \sqrt[3]{f_{i_1}^2 + \ldots + f_{i_k}^2} \in C(A \cup \{x\}).$$

Для каждой функции $f_i$ при $i = i_1, \ldots, i_k$ найдется такая функция $h_i \in C(A \cup \{x\})$, что $f_i = h_i g$:

$$h_i(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathrm{Z}(f_i), \\ f_i/g, & x \in \mathrm{coz} f_i \end{cases} \quad \text{и } |h_i| = \left| \sqrt[3]{\frac{f_i^3}{f_i^2 + \sum\limits_{j \neq i} f_j^2}} \right| \leqslant \left| \sqrt[3]{\frac{f_i^3}{f_i^2}} \right| = |\sqrt[3]{f_i}| \text{ на } \mathrm{coz} f_i.$$

Поскольку $\{h_i(x_j)\} \to 0$ для любой точки $y \in \mathrm{Z}(f_i)$ и произвольной направленности $\{x_j\} \to y$, то функция $h_i$ непрерывна на $A \cup \{x\}$.

Получаем $M_x = (g)$. Функция $g$ положительна на $A$ и равна 0 в точке $x$. При этом $\sqrt{g} = hg$ для некоторой функции $h \in C(A \cup \{x\})$. Имеем $g = (h^2 g) g$ и $h^2 g$ — идемпотент, причем $(h^2 g)(x) = 0$ и $(h^2 g)(A) = \{1\}$. Значит, множество $A$ замкнуто во всех подпространствах $A \cup \{x\}$ $T_1$-пространства $X$, $x \notin A$. Следовательно, $A$ замкнуто в $X$.

Тем самым $T_1$-пространство $X$ можно сконструировать как множество $\{(e_x) : x \in X\}$ с системой замкнутых множеств — псевдодополнений $(e_A)$, соответствующих замкнутым множествам $A \subseteq X$.

**Следствие 2.** ([5, теорема 1]). *Любое $T_1$-пространство $X$ определяется полукольцом $CP(X)$.*

Рассмотрим на полукольце $CP(X)$ естественный порядок $\leqslant$:

$$f \leqslant g \Leftrightarrow (D(f) \subseteq D(g)) \wedge (f(x) \leqslant g(x))$$

для $x \in D(f)$.

Порядок $\leqslant$ порождает операцию $\wedge$:

$$D(f \wedge g) = D(f) \cap D(g), \quad (f \wedge g)(x) = \min(f(x), g(x)) \text{ для всех } x \in D(f \wedge g).$$

Получаем нижнюю полурешетку $\langle CP(X), \wedge \rangle$ с наименьшим элементом $\emptyset$.

Упорядоченное множество $\{e_A : A \subseteq X\}$ всех унитарных идемпотентов изоморфно булеану $\wp(X)$ пространства $X$. Для любых $A, B \subseteq X$ имеем

$$e_A \wedge e_B = e_{A \cap B}, \qquad e_A \vee e_B = e_{A \cup B}.$$

Отметим, что для произвольного тихоновского пространства $X$ существование $f \vee g = \sup(f, g)$ относительно порядка $\leqslant$ для всех $f, g \in CP(X)$ равносильно дискретности пространства $X$. Для антидискретных топологических пространств $X$ операция $\vee$ на $CP(X)$ также определена.

Полукольцевой гомоморфизм $\alpha \colon CP(X) \to CP(Y)$, сохраняющий единицу 1, назовем $\vee$-*полным*, если $\alpha$ сохраняет точную верхнюю грань любого множества $\{e_A : A \in F\}$, $F \subseteq \wp(X)$, унитарных идемпотентов:

$$\alpha\Big(\bigvee_{A \in F} e_A\Big) = \bigvee_{A \in F} \alpha(e_A).$$

Любое непрерывное отображение $\varphi \colon Y \to X$ топологических пространств индуцирует полукольцевой гомоморфизм $\overline{\varphi} \colon CP(X) \to CP(Y)$ по правилу $\overline{\varphi}(f)(y) = f(\varphi(y))$ для любой функции $f \in CP(X)$ и всех $y \in D(\overline{\varphi}(f)) = \varphi^{-1}(D(f))$, т. е. $\overline{\varphi}(f) = f \circ \varphi$.

Ясно, что индуцированные гомоморфизмы сохраняют функции-константы, унитарные идемпотенты $e_A, A \subseteq X$, переводят в унитарные идемпотенты $e_B$, где $B = \varphi^{-1}(A) \subseteq Y$, поглощающий элемент в поглощающий.

**Предложение 8.** *Для произвольного $T_1$-пространства $X$ полукольцевой гомоморфизм $CP(X) \to CP(Y)$ будет индуцированным тогда и только тогда, когда он является $\vee$-полным.*

**Доказательство.** Пусть полукольцевой гомоморфизм $\alpha \colon CP(X) \to CP(Y)$ индуцирован отображением $\varphi \colon Y \to X$. Тогда $\alpha$ сохранят единицу 1. Для любого множества $F$ подмножеств $A \subseteq X$ обозначим $\bigcup_{A \in F} A = D$. Тогда $D(\alpha(\vee e_A)) = \varphi^{-1}(D(\vee e_A)) = \varphi^{-1}(D)$. Для любой точки $y \in \varphi^{-1}(D)$ имеем

$$\alpha(\vee e_A)(y) = \alpha(e_D)(y) = (e_D)(\varphi(y)) = 1 = \vee e_A(\varphi(y)) = \vee \alpha(e_A)(y).$$

Значит, $\alpha$ является $\vee$-полным.

Пусть полукольцевой гомоморфизм $\alpha : CP(X) \to CP(Y)$ является $\vee$-полным. Тогда для любой точки $y \in Y$ найдется точка $x \in X$, такая, что $\alpha(e_x) = e_B$, $B \subseteq Y, y \in B$. Действительно, существование точки $y \in Y$ такой, что для любого $x \in X$ $\alpha(e_x) = e_B, B \subseteq Y \setminus \{y\}$, противоречит $\vee$-полноте гомоморфизма:

$$\alpha\big(\bigvee_{x \in X} e_x\big) = 1 \neq \vee_{x \in X} \alpha(e_x) = e_C, \quad y \notin C.$$

Для различных точек $x_1, x_2 \in X$ имеем $\alpha(e_{x_1})\alpha(e_{x_2}) = \alpha(e_{x_1}e_{x_2}) = \alpha(\emptyset) = \emptyset$. Таким образом, для любого $y \in Y$ найдется единственный $x \in X$ такой, что $\alpha(e_x) = e_B, B \subseteq Y, y \in B$. Зададим отображение $\varphi \colon Y \to X$ по правилу

$$\varphi(y) = x \Leftrightarrow \exists B \subseteq Y, y \in B \quad \alpha(e_x) = e_B.$$

Покажем, что отображение $\varphi$ непрерывно в каждой точке $y \in Y$. То есть для любой окрестности $U$ точки $\alpha(y) \in X$ множество $W = \varphi^{-1}(U)$ открыто.

Имеем: $W$ открыто в $Y$ тогда и только тогда, когда $Y \setminus W$ замкнуто, что, в свою очередь, равносильно истинности импликации

$$e_{Y \setminus W} e_y = \emptyset \Rightarrow \exists f \in CP(Y) \quad \big((f e_{Y \setminus W} = e_{Y \setminus W}) \wedge (\emptyset \neq f e_y \neq e_y)\big)$$

для каждой функции $e_y \in CP(Y)$. Иными словами, для каждого элемента $y \in Y$ найдется такая функция $f \in CP(Y)$, что

$$y \in W \Rightarrow \exists \big((f(Y \setminus W) = 1) \wedge (f(y) = 0)\big). \tag{2}$$

Зафиксируем произвольную точку $y' \in W$, обозначим $x' = \varphi(y') \in U$. В $CP(X)$ возьмем функцию $f$ такую, что $D(f) = (X \setminus U) \cup \{x'\}$, $f(X \setminus U) = 1$, $f(x') = 0$.

Имеем $e_{\varphi^{-1}(x')} = \alpha(e_{x'}) = \alpha(\theta_{x'} + e_{x'}) = \theta_C + e_{\varphi^{-1}(x')}$, $\alpha(\theta_{x'}) = \theta_C$ для некоторого $C \subseteq Y$, т. е. $y' \in \varphi^{-1}(x') \subseteq C$. Для функции $\alpha(f) \in CP(Y)$ получаем

$$\alpha(f)(y') = \alpha(f)(e_{\varphi^{-1}(x')})(y') = \alpha(f)\alpha(e_{x'})(y') = \alpha(fe_{x'})(y') = \alpha(\theta_{x'})(y') = 0.$$

Так как $W = \varphi^{-1}(U)$, то для любой точки $y'' \notin W$ получаем, что $x'' = \varphi(y'') \notin U$ и $\alpha(e_{x''}) = e_B, y \in B$.

Для любой $y'' \in Y \setminus W$ получаем $\alpha(f)(y'') = \alpha(fe_{x''})(y'') = \alpha(e_{x''})(y'') = 1$. Итак, $W$ удовлетворяет условиям (2), т. е. открыто.

Обозначим через $\mathbf{K}$ категорию всех $T_1$-пространств $X$ и их непрерывных отображений $\varphi$, а через $\mathbf{C}$ — категорию всех полуколец $CP(X)$ и их $\vee$-полных гомоморфизмов $\alpha$. Для любых непрерывных отображений $\psi\colon Z \to Y$ и $\varphi\colon Y \to X$ имеем $\overline{\varphi \circ \psi} = \overline{\psi} \circ \overline{\varphi}$. Поэтому соответствие $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}(X) = CP(X)$ и $F(\varphi) = \overline{\varphi}$ является контрвариантным функтором из категории $\mathbf{K}$ в категорию $\mathbf{C}$.

В результате получаем следующую теорему двойственности.

**Теорема 3.** *Категория всех $T_1$-пространств $X$ и их непрерывных отображений антиэквивалентна (двойственна) категории полуколец $CP(X)$ с $\vee$-полными гомоморфизмами в качестве морфизмов.*

# 4 Дополнения

## 4.1 Определяемость

Теме определяемости топологических пространств различными алгебраическими системами непрерывных функций на них посвящен обзор [3]. Определяемость топологических пространств полугруппами непрерывных частичных функций рассматривалась в [4]. Для произвольного топологического полукольца $S$ с замкнутой единицей $T_1$-пространства $X$ определяются полукольцами $CP(X, S)$ [5]. Наша теорема 2 утверждает определяемость $T_1$-пространств $X$ решеткой идеалов полуколец $CP(X)$. Наконец, имеет место теорема из статьи [9], показывающая, что любое $T_1$-пространство $X$ определяется абсолютно, т. е. в классе всевозможных топологических пространств, решеткой подалгебр полукольца $CP(X)$. При этом *подалгеброй* полукольца $CP(X)$ называется произвольное подполукольцо в $CP(X)$, возможно пустое, выдерживающее умножение на числа-константы из $\mathbf{R}$. Но $T_0$-пространства $X$ не обязаны определяться полукольцами $CP(X)$ [9, примеры 2 и 3]. Напомним, что топологическое пространство называется *$T_0$-пространством*, если для любых его различных точек существует открытое множество, содержащее ровно одну из данных точек. Заметим, что $T_1$-пространства являются $T_0$-пространствами.

Остается открытым вопрос об определяемости $T_1$-пространств $X$ решеткой конгруэнций полуколец $CP(X)$.

## 4.2 Полукольца $CP(X, \mathbf{R}^+)$

Предложение 7 и теорема 1 верны и для полуколец $CP(X, \mathbf{R}^+)$, но следствие 1 для $CP(X, \mathbf{R}^+)$, вообще говоря, не имеет места. Нам понадобится следующий результат, полученный В. И. Варанкиной:

**Теорема Б.** [1, теорема 2.1] *Для всякого топологического пространства $X$ равносильны следующие условия:*

1) *решетка идеалов полукольца $C(X, \boldsymbol{R}^+)$ дистрибутивна*;

2) *решетка идеалов полукольца $C(X, \boldsymbol{R}^+)$ модулярна*;

3) *пространство $X$ будет* F*-пространством.*

**Предложение 9.** *Для любого топологического пространства $X$ эквивалентны следующие утверждения*:

1) *решетка идеалов полукольца $CP(X, \boldsymbol{R}^+)$ дистрибутивна*;

2) *решетка идеалов полукольца $CP(X, \boldsymbol{R}^+)$ модулярна*;

3) *пространство $X$ является наследственным* F*-пространством.*

**Доказательство.** Ясно, что 1) $\Rightarrow$ 2).

2) $\Rightarrow$ 3). Предположим, что решетка $\operatorname{Id} CP(X, \mathbf{R}^+)$ модулярна. Тогда, как и в начале доказательства теоремы 1, модулярна и решетка $\operatorname{Id} C(Y, \mathbf{R}^+)$ для любого подпространства $Y$ пространства $X$. По теореме Б все подпространства $Y$ в $X$ являются F-пространствами, т. е. $X$ будет наследственным F-пространством.

Импликация 3) $\Rightarrow$ 1) доказывается точно так же, как и в теореме 1.

Заметим также, что для полуколец $CP(X, \mathbf{R}^+)$ справедлив аналог теоремы 3 о двойственности.

### 4.3 К теории полуколец $CP(X, S)$

Актуальной является задача исследования свойств полуколец $CP(X, S)$ непрерывных частичных функций со значениями в других числовых полукольцах $S$ с интервальной топологией, в частности в полуполе $\mathbf{P}$ всех положительных действительных чисел с обычными операциями сложения и умножения чисел. Заметим, что на $\mathbf{R}^+$ и $\mathbf{P}$ можно также взять сложение max вместо обычного сложения $+$. Общее направление изучения полуколец $CP(X, S)$, начатое в параграфе 2, допускает дальнейшее развитие.

## Благодарности

Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ «Функциональная алгебра и полукольца» № 1.1375.2014/K, и в рамках госзадания Минобрнауки РФ «Полукольца и их связи», проект № 1.5879.2017/8.9.

## Список литературы

[1] V. I. Varankina, E. M. Vechtomov, I. A. Semenova. Semirings of continuous nonnegative functions: divisibility, ideals, congruences. *Fundam. Prikl. Mat.*, 4:2: 493–510, 1998 (in Russian). = В. И. Варанкина, Е. М. Вечтомов, И. А. Семенова. Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции. *Фундамент. и прикл. матем.*, 4:2: 493–510, 1998.

[2] E. M. Vechtomov. Distributive rings of continuous functions and $F$-spaces. *Mat. Zametki*, 34:3: 321–332, 1983 (in Russian). = Е. М. Вечтомов. Дистрибутивные кольца непрерывных функций и F-пространства. *Матем. заметки*, 34:3: 321–332, 1983.

[3] E. M. Vechtomov. Questions on the determination of topological spaces by algebraic systems of continuous functions. *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Algebra. Topol. Geom.*, 28: 3–46, 1990 (in Russian). = Е. М. Вечтомов. Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций. *Итоги науки и техн*, ВИНИТИ. Адгебра. Геометрия. Топология, 28: 3–46, 1990.

[4] E. M. Vechtomov. On semigroups of continuous partial functions of topological spaces. *Uspekhi Mat. Nauk*, 45:4(274): 143–144, 1990 (in Russian). = Е. М. Вечтомов. О полугруппах непрерывных частичных функций на топологических пространствах. *Успехи матем. наук*, 45:4(274): 143–144, 1990.

[5] E. M. Vechtomov, E. N. Lubyagina. About semirings of partial functions. *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Computer science.* 1 (19): 3–11, 2014 (in Russian). = Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина. О полукольцах частичных функций. *Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1: Матем. Мех. Инф.*, 1 (19): 3–11, 2014.

[6] E. M. Vechtomov, E. N. Lubyagina. Semirings of Partial Functions. *Materials of the XIII International Conference «Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: Modern Problems and Applications», dedicated to S. S. Ryshkov*, TGPU, Tula: 148-150, 2015 (in Russian). = Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина. Полукольца частичных функций. *Материалы XIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященной С. С. Рышкову*, ТГПУ, Тула: 148-150, 2015.

[7] E. M. Vechtomov, E. N. Lubyagina. On the category of semirings of continuous partial numerical functions. *Materials of Internat. Conf. On algebra, analysis and geometry, dedicated to the anniversaries of outstanding professors of the Kazan University, mathematicians Peter Alekseevich (1895-1944) and Alexander Petrovich (1926-1998) Shirokovs*, Izd. Akad. Sciences of the Republic of Tatarstan, Kazan: 128–129, 2016 (in Russian). = Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина. О категории полуколец непрерывных частичных числовых функций. *Материалы медунар. конф. по алгебре, анализу и геометрии, посвященной юбилеям выдающихся профессоров Казанского ун-та, математиков Петра Алексеевича (1895–1944) и Александра Петровича (1926–1998) Широковых*, Изд-во Акад. наук РТ, Казань: 128–129, 2016.

[8] E. M. Vechtomov, E. N. Lubyagina. On semirings of continuous partial real-valued functions. *Algebra and logic: theory and applications, Proceedings of the Internat. Conf., Dedicated. To the 70th anniversary of V. M. Levchuk*, Siberian Federal University, Krasnoyarsk: 11-12, 2016 (in Russian). = Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина. О полукольцах непрерывных частичных действительнозначных функций. *Алгебра и*

*логика: теория и приложения, тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 70-летию В. М. Левчука*, Сиб. федерал. ун-т, Красноярск: 11–12, 2016.

[9] E. M. Vechtomov, E. N. Lubyagina. Determinability of $T_1$-spaces by the lattice of subalgebras of semirings of continuous partial real-valued functions on them. *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Computer science.*, 1(22): 21-28, 2017 (in Russian). = Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина. Определяемость $T_1$-пространств решеткой подалгебр полуколец непрерывных частичных действительнозначных функций на них. *Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1: математика, механика, информатика*, 1(22): 21–28, 2017.

[10] E. M. Vechtomov, E. N. Lubyagina, V. V. Sidorov, D. V. Chuprakov. *Elements of a functional algebra*, Vol. 1, Raduga-Press, Kirov, 2016 (in Russian). = Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина, В. В. Сидоров, Д. В. Чупраков. *Элементы функциональной алгебры*, т. 1, Радуга-ПРЕСС, Киров, 2016.

[11] E. M. Vechtomov, E. N. Lubyagina, V. V. Sidorov, D. V. Chuprakov. *Elements of a functional algebra*, Vol. 2, Raduga-Press, Kirov, 2016 (in Russian). = Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина, В. В. Сидоров, Д. В. Чупраков. *Элементы функциональной алгебры*, т. 2, Радуга-ПРЕСС, Киров, 2016.

[12] E. M. Vechtomov, E. N. Lubyagina, V. V. Chermnykh. *Elements of the theory of semirings*, Raduga-PRESS, Kirov, 2012 (in Russian). = Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина, В. В. Чермных. *Элементы теории полуколец*, Радуга-ПРЕСС, Киров, 2012.

[13] E. M. Vechtomov, A. A. Petrov. Multiplicatively idempotent semirings. *Fundam. Prikl. Mat.*, 18(4):41-70, 2013 (in Russian). = Е. М. Вечтомов, А. А. Петров. Мультипликативно идемпотентные полукольца. *Фундаментальная и прикладная математика*, 18(4): 41–70, 2013.

[14] R. Engelking. *General topology.* Mir, Moscow, 1986 (in Russian). = Р. Энгелькинг. *Общая топология.* Мир, Москва, 1986.

[15] L. Gillman, M. Jerison. *Rings of Continuous Functions.* New York, 1976.

# Semirings of continuous partial real-valued functions

*Evgenii M. Vechtomov, Elena N. Lubyagina*
Vyatka State University (Kirov, Russia)

**Keywords:** semiring, ideal, congruence, lattice, $T_1$-space, field of real numbers, continuous partial function, definability, duality.

The paper is devoted to the general theory of semirings of continuous functions. We study semirings $CP(X, S)$ of continuous partial functions on topological spaces $X$ with values in topological semirings $S$. We explore their ideals and congruences. The main attention is paid to semirings $CP(X) = CP(X, \mathbf{R})$. We show that the distributivity of the lattice of all ideals of a semiring $CP(X)$ is equivalent to the fact that $X$ is a hereditary $F$-space. We prove the definability of any $T_1$-space $X$ by the lattice of all ideals of a semiring $CP(X)$. A duality between the category of all $T_1$-spaces $X$ and their continuous mappings and the category of all semirings $CP(X)$ with $\vee$-complete homomorphisms considered as morphisms is established.