Тригонометрические полиномы наилучшего одностороннего интегрального приближения обобщенного ядра Пуассона

А.Г. Бабенко
ИММ УрО РАН (Екатеринбург)
babenko@imm.uran.ru

Т.З. Наум
ИММ УрО РАН (Екатеринбург)
УрФУ (Екатеринбург)
tatiana.naum502@gmail.com

Аннотация

В данной работе вычисляются коэффициенты тригонометрических полиномов, которые являются экстремальными в задаче наилучшего одностороннего интегрального приближения обобщенного ядра Пуассона. Указанные полиномы представимы в виде специальных тригонометрических дробей и для нахождения их коэффициентов применяется теория разностных уравнений. Подобного рода задачи возникают не только в теории приближений, но и в теории чисел, теории кодирования и других областях математики.

1 Введение

В различных разделах математики возникают экстремальные задачи с ограничениями не только на значения функций, но и на значения их коэффициентов (преобразования) Фурье. Это относится, например, к теории приближений функций (см. [6], [10]), теории кодирования (см. [9], [5], [12]) и теории чисел (см. [11], [1]). Довольно часто, подозрительными на экстремум являются тригонометрические полиномы, представимые в виде отношения двух тригонометрических полиномов. Поэтому важно знать способы нахождения коэффициентов таких полиномов. Один из таких способов основан на применении теории разностных уравнений, который применялся, например при доказательстве утверждения 1) леммы 3 из работы [2]. Здесь этим способом находятся коэффициенты тригонометрических полиномов, которые являются экстремальными в задаче наилучшего одностороннего интегрального приближения обобщенного ядра Пуассона. Подробнее. В 1979 г. В. Г. Доронин и А. А. Лигун [7, лемма 3] (см. формулы (4) ниже) нашли наилучшие односторонние интегральные приближения классического ядра Пуассона тригонометрическими полиномами заданного порядка. В работе авторов [3] (см. формулы (5) ниже) решена аналогичная задача о величинах наилучших односторонних интегральных приближений обобщенного ядра Пуассона, представляющего собой линейную комбинацию ядра Пуассона и сопряженного ядра Пуассона. В частности, в [3] доказывается формула для соответствующего полинома наилучшего приближения снизу в виде разности двух дробей. После приведения к общему знаменателю эту разность можно преобразовать в тригонометрическую дробь. Кроме того, в [3, теорема] анонсировано представление указанного полинома в виде суммы по синусам и косинусам. В данной заметке приводится развернутое доказательства этого представления.

In: A.A. Makhnev, S.F. Pravdin (eds.): Proceedings of the International Youth School-conference «SoProMat-2017», Yekaterinburg, Russia, 06-Feb-2017, published at http://ceur-ws.org

2 Обозначения

Пусть $\mathbf{T} = [-\pi, \pi)$ — период длины 2π, C — пространство 2π-периодических непрерывных вещественнозначных функций; L — пространство 2π-периодических измеримых вещественнозначных функций с нормой $\|f\| = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbf{T}} |f(t)|\,dt$; $\mathcal{T}_n$ — подпространство тригонометрических полиномов $\tau(t) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu t + b_\nu \sin \nu t)$ порядка не выше n с вещественными коэффициентами. В дальнейшем равенство $g = f$ (неравенство $g \le f$) для $g, f \in C$ означает, что $g(x) = f(x)$ $\big(g(x) \le f(x)\big)$ при всех $x \in \mathbf{R}$. Величины наилучшего (интегрального) приближения, наилучшего приближения снизу и сверху функции $g \in C$ подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$, $n \in \mathbf{N}$, определяются соответственно следующим образом:

$$E_{n-1}(g) = \inf_{\tau \in \mathcal{T}_{n-1}} \|g - \tau\|, \quad E^-_{n-1}(g) = \inf_{\tau \in \mathcal{T}_{n-1},\, \tau \le g} \|g - \tau\|, \quad E^+_{n-1}(g) = \inf_{\tau \in \mathcal{T}_{n-1},\, g \le \tau} \|g - \tau\|. \tag{1}$$

Тригонометрические полиномы, реализующие точные нижние грани в правых частях равенств (1), называются *полиномами наилучшего* (*интегрального*) *приближения функции g и наилучшего одностороннего приближения* (*снизу и сверху*) *соответственно.*

Символами P и Q будем обозначить *ядро Пуассона и сопряженное ядро Пуассона*, которые определяются соответственно формулами (см. [13, т. 1, гл. 1, § 1, с. 12; гл. 3, § 6, формулы (6.2), (6.3)])

$$P(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos kt = \frac{1 - q^2}{2(1 - 2q\cos t + q^2)}, \quad Q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \sin kt = \frac{q \sin t}{1 - 2q\cos t + q^2}, \quad |q| < 1. \tag{2}$$

Обобщенным ядром Пуассона называется следующая линейная комбинация ядер P, Q :

$$\Pi_{q,\alpha}(t) = \cos\frac{\alpha\pi}{2} P(t) + \sin\frac{\alpha\pi}{2} Q(t) = \frac{(1 - q^2)\cos\frac{\alpha\pi}{2} + 2q\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sin t}{2(1 - 2q\cos t + q^2)}, \quad |q| < 1,\ \alpha \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

3 Постановка задачи

История, относящаяся к одностороннему приближению функций полиномами содержится в монографии [10]. Здесь приведем лишь один результат, имеющий непосредственное отношение к теме данной заметки. В конце 70-х годов прошлого века В. Г. Доронин и А. А. Лигун нашли величины наилучшего интегрального приближения снизу и сверху ядра Пуассона $P = \Pi_{q,0}$ тригонометрическими полиномами. А именно, они доказали [7, лемма 3] (см. [10, теорема 3.2.2]), что

$$E^-_{n-1}(P) = \frac{q^n}{1 + q^n}, \quad E^+_{n-1}(P) = \frac{q^n}{1 - q^n}, \quad 0 < q < 1, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{4}$$

Недавно авторы получили аналогичный результат для обобщенного ядра Пуассона. В частности, было доказано [3, теорема], что при любых $n \in \mathbf{N}$, $q \in (-1, 1)$, $\alpha \in \mathbf{R}$ выполняются равенства

$$E^-_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) = \frac{|q|^n}{1 - q^{2n}} \left(1 - |q|^n \cos\frac{\alpha\pi}{2}\right), \quad E^+_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) = \frac{|q|^n}{1 - q^{2n}} \left(1 + |q|^n \cos\frac{\alpha\pi}{2}\right). \tag{5}$$

При этом полином $\tau^+_{q,\alpha} \in \mathcal{T}_{n-1}$ наилучшего интегрального приближения сверху функции $\Pi_{q,\alpha}$ связан с полином $\tau^-_{q,\alpha+2} \in \mathcal{T}_{n-1}$ наилучшего приближения снизу функции $\Pi_{q,\alpha+2}$ равенством

$$\tau^+_{q,\alpha} = -\tau^-_{q,\alpha+2},$$

поскольку

$$\Pi_{q,\alpha+2}(t) = -\Pi_{q,\alpha}(t), \quad q \in (-1, 1), \quad \alpha, t \in \mathbf{R}. \tag{6}$$

Поэтому достаточно исследовать лишь задачу приближения снизу.

Кроме того, в силу следующего легко проверяемого соотношения:

$$\Pi_{q,\alpha}(t + \pi) = \Pi_{-q,\alpha}(t), \quad q \in (-1, 1), \quad \alpha, t \in \mathbf{R}, \tag{7}$$

выполняются равенства

$$E^-_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) = E^-_{n-1}(\Pi_{-q,\alpha}) = E^-_{n-1}(\Pi_{|q|,\alpha}) \quad \text{при} \quad q \in (-1, 1), \quad \alpha, t \in \mathbf{R}. \tag{8}$$

Учитывая свойства (6), (7), (8) несложно понять, что задача во всех допустимых случаях изменения параметров q и α, сводятся к рассмотрению следующего случая:

$$q \in (0,1), \quad \alpha \in [0,4]; \tag{9}$$

здесь также учтено, что в случае $q = 0$ решение задачи является тривиальным.

Ясно также, что в случае $n = 1$ полином $\tau^-_{q,\alpha} \in \mathcal{T}_0$ наилучшего интегрального приближения снизу ядра $\Pi_{q,\alpha}$ является постоянной функцией, значение которой совпадает с глобальным минимумом ядра $\Pi_{q,\alpha}$, который известен [3, лемма 1], т. е.

$$\tau^-_{q,\alpha}(t) \equiv \min_{\xi\in\mathbf{T}} \Pi_{q,\alpha}(\xi) = \frac{1+q^2}{2(1-q^2)} \cos\frac{\alpha\pi}{2} - \frac{q}{1-q^2} \quad \text{при} \quad n=1, \quad q \in (0,1), \quad \alpha \in [0,4]. \tag{10}$$

Обозначим через $B = B_{q,\alpha,n}$ тригонометрическую дробь

$$B(t) = \frac{q^n(1-q^2)}{(1-q^{2n})^2} \cdot \frac{1+q^{2n} - 2q^n\cos\frac{\alpha\pi}{2} + \big[(1+q^{2n})\cos\frac{\alpha\pi}{2} - 2q^n\big]\cos nt + (1-q^{2n})\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sin nt}{1-2q\cos t + q^2}. \tag{11}$$

Заметим, что в силу (3) ядро $\Pi_{q,\alpha}$ тоже является тригонометрической дробью, знаменатель которой совпадает (с точностью до постоянного множителя) со знаменателем дроби B. Поэтому разность $\Pi_{q,\alpha} - B$ представляет собой тригонометрическую дробь, числитель которой есть тригонометрический полином порядка n, а знаменатель — тригонометрический полином первого порядка. В [3] доказано, что указанная дробь является тригонометрическим полиномом[1] порядка $n-1$, причем наилучшим образом приближающий снизу функцию $\Pi_{q,\alpha}$ в интегральной метрике. Иными словами, для полинома $\tau^-_{q,\alpha} \in \mathcal{T}_{n-1}$ наилучшего интегрального приближения снизу функции $\Pi_{q,\alpha}$ имеет место представление

$$\tau^-_{q,\alpha}(t) = \Pi_{q,\alpha}(t) - B(t). \tag{12}$$

Кроме того, в [3] анонсировано утверждение, что полином

$$\Upsilon_{q,\alpha}(t) := (1-q^{2n})\tau^-_{q,\alpha}(t) = (1-q^{2n})\big[\Pi_{q,\alpha}(t) - B(t)\big] \tag{13}$$

представим в виде суммы[2]

$$\Upsilon_{q,\alpha}(t) = \frac{(1+q^{2n})\cos\frac{\alpha\pi}{2} - 2q^n}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} q^k\big(1-q^{2(n-k)}\big)\Big[\frac{(1+q^{2n})\cos\frac{\alpha\pi}{2} - 2q^n}{1-q^{2n}}\cos kt + \sin\frac{\alpha\pi}{2}\sin kt\Big] \tag{14}$$

при любых $n \in \mathbf{N}$, $q \in (-1,1)$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Цель данной заметки заключается в доказательстве этой формулы.

4 Доказательство формулы (14)

В справедливости формулы (14) при $n = 1$ несложно убедиться с помощью утверждения (10). Поэтому в дальнейшем будем рассматривать случай $n \geq 2$.

Запишем полином (13) в виде

$$\Upsilon_{q,\alpha}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos kt + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin kt. \tag{15}$$

Требуется найти коэффициенты a_k, b_k, и убедиться, что они совпадают с соответствующими коэффициентами разложения (14).

Подставив в правую часть равенства (13) выражения (3), (11) для функций $\Pi_{q,\alpha}$, B, а затем приравняв полученное выражение к правой части формулы (15), придем к равенству

[1] То есть знаменатель указанной дроби делит числитель без остатка.

[2] Сумма, у которой верхний предел суммирования меньше нижнего считается равной нулю.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos kt + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin kt = \frac{(1-q^{2n})\big[(1-q^2)\cos\frac{\alpha\pi}{2} + 2q\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sin t\big]}{2(1-2q\cos t+q^2)} -$$

$$-\frac{q^n(1-q^2)}{1-q^{2n}} \cdot \frac{1+q^{2n}-2q^n\cos\frac{\alpha\pi}{2} + \big[(1+q^{2n})\cos\frac{\alpha\pi}{2} - 2q^n\big]\cos nt + (1-q^{2n})\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sin nt}{1-2q\cos t+q^2}. \tag{16}$$

Приравняв четные и нечетные части функций, расположенных в обеих частях этого равенства[3], получим следующие два равенства:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos kt =$$

$$= \frac{(1-q^{2n})(1-q^2)\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{2(1-2q\cos t+q^2)} - \frac{q^n(1-q^2)}{1-q^{2n}} \cdot \frac{1+q^{2n}-2q^n\cos\frac{\alpha\pi}{2} + \big[(1+q^{2n})\cos\frac{\alpha\pi}{2} - 2q^n\big]\cos nt}{1-2q\cos t+q^2}, \tag{17}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin kt = \frac{q(1-q^{2n})\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sin t - q^n(1-q^2)\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sin nt}{1-2q\cos t+q^2}. \tag{18}$$

Займемся поиском коэффициентов b_k.

Рассмотрим сначала случай $n \geq 3$. Умножим обе части равенства (18) на полином $\frac{1}{q}(2q\cos t - 1 - q^2)$, в результате получим

$$\frac{1}{q}(2q\cos t - 1 - q^2)\sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin kt = q^{n-1}(1-q^2)\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sin nt - (1-q^{2n})\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sin t. \tag{19}$$

Функцию, расположенную в левой части этого равенства, обозначим через F, т. е. положим

$$F(t) = \frac{1}{q}(2q\cos t - 1 - q^2)\sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin kt. \tag{20}$$

Используя известные тригонометрические формулы, преобразуем эту функцию

$$F(t) = \sum_{k=1}^{n-1} 2b_k \cos t \sin kt - \frac{1+q^2}{q}\sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin kt = \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin{(k+1)t} + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin{(k-1)t} - \frac{1+q^2}{q}\sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin kt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin{(k+1)t} + \sum_{k=2}^{n-1} b_k \sin{(k-1)t} - \frac{1+q^2}{q}\sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin kt.$$

Отсюда, с помощью подходящих замен переменных суммирования, получим

$$F(t) = \sum_{k=2}^{n} b_{k-1}\sin kt + \sum_{k=1}^{n-2} b_{k+1}\sin kt - \frac{1+q^2}{q}\sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin kt.$$

Положив

$$b_0 = 0, \quad b_n = 0, \quad b_{n+1} = 0, \tag{21}$$

перепишем выражение для F в виде

$$F(t) = \sum_{k=1}^{n} b_{k-1}\sin kt + \sum_{k=1}^{n} b_{k+1}\sin kt - \frac{1+q^2}{q}\sum_{k=1}^{n} b_k \sin kt = \sum_{k=1}^{n}\left(b_{k-1} - \frac{1+q^2}{q}b_k + b_{k+1}\right)\sin kt.$$

[3] Иными словами, применим к обеим частям равенства (16) преобразования вида $\dfrac{f(t)+f(-t)}{2}$, $\dfrac{f(t)-f(-t)}{2}$.

Отсюда с учетом определения (20) функции F и равенства (19) придем к системе уравнений n

$$\begin{cases} b_0 - \dfrac{1+q^2}{q} b_1 + b_2 = -(1-q^{2n}) \sin \dfrac{\alpha\pi}{2}, \\ b_{k-1} - \dfrac{1+q^2}{q} b_k + b_{k+1} = 0 \quad \text{при} \quad k = 2, 3, \ldots, n-1, \\ b_{n-1} - \dfrac{1+q^2}{q} b_n + b_{n+1} = q^{n-1}(1-q^2) \sin \dfrac{\alpha\pi}{2} \end{cases} \tag{22}$$

относительно $n+2$ коэффициентов $b_0, b_1, \ldots, b_{n+1}$, три из которых нулевые (см. (21)).

Рассмотрим подсистему системы (22) без первого уравнения. В результате придем к разностному уравнению второго порядка

$$b_{k-1} - \frac{1+q^2}{q} b_k + b_{k+1} = 0 \quad \text{при} \quad k = 2, 3, \ldots, n-1, \tag{23}$$

с краевыми условиями

$$b_{n-1} = q^{n-1}(1-q^2) \sin \frac{\alpha\pi}{2}, \qquad b_n = 0, \tag{24}$$

которые следуют из последнего уравнения в (22) и условий (21).

Согласно теории разностных уравнений с постоянными коэффициентами (см. [8, гл. 5, § 4, с. 329–347]) сначала находим характеристическое уравнение, которое возникает при замене $b_k = \lambda^k$ в однородном уравнении (23) А именно,

$$\lambda^{k-1} - \frac{1+q^2}{q} \lambda^k + \lambda^{k+1} = 0, \quad \text{или} \quad \lambda^{k-1} \left(\lambda^2 - \frac{1+q^2}{q} \lambda + 1 \right) = 0.$$

Поскольку $\lambda^{k-1} \neq 0$, то отсюда получаем уравнение

$$\lambda^2 - \frac{1+q^2}{q} \lambda + 1 = 0,$$

которое и является *характеристическим уравнением* для конечно-разностного уравнения (23). Решения характеристического уравнения следующие: $\lambda_1 = q, \quad \lambda_2 = 1/q$. Общее решение однородного уравнения (23) имеет вид

$$b_k = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k = q^k C_1 + \frac{C_2}{q^k},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. С помощью краевых условий (24) находим

$$C_1 = \sin \frac{\alpha\pi}{2}, \qquad C_2 = -q^{2n} \sin \frac{\alpha\pi}{2}.$$

Таким образом, получаем

$$b_k = (q^k - q^{2n-k}) \sin \frac{\alpha\pi}{2} \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{25}$$

Осталось убедиться, что первое уравнение в системе (22) выполняется автоматически. Действительно, в силу (21) и (25) имеем

$$b_0 = 0, \quad b_1 = (q - q^{2n-1}) \sin \frac{\alpha\pi}{2}, \quad b_2 = (q^2 - q^{2n-2}) \sin \frac{\alpha\pi}{2}.$$

Подставим эти коэффициенты в левую часть первого уравнения системы (22), в результате придем к равенствам

$$b_0 - \frac{1+q^2}{q} b_1 + b_2 = -\frac{1+q^2}{q} (q - q^{2n-1}) \sin \frac{\alpha\pi}{2} + (q^2 - q^{2n-2}) \sin \frac{\alpha\pi}{2} =$$

$$= \Big(q^2 - q^{2n-2} - (1+q^2)(1-q^{2n-2}) \Big) \sin \frac{\alpha\pi}{2} = \Big(q^2 - q^{2n-2} - 1 + q^{2n-2} - q^2 + q^{2n} \Big) \sin \frac{\alpha\pi}{2} = \Big(-1 + q^{2n} \Big) \sin \frac{\alpha\pi}{2}.$$

Отсюда видно, что первое уравнение в системе (22) выполняется.

Проверка справедливости равенства (18) в случае $n = 2$ проводится аналогично.

Равенство (17) проверяется по той же схеме, которая использовалась при доказательстве равенства (18).

Таким образом, формула (14) доказана.

Благодарности

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

Список литературы

[1] V.V. Arestov. Extremal properties of nonnegative trigonometric polynomials. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics*, 1: 50–70, 221, 1992 (in Russian). = В.В. Арестов. Об экстремальных свойствах неотрицательных тригонометрических полиномов *Труды ИММ УрО РАН*, 1:50–70, 1992.

[2] A.G. Babenko. Jackson's inequality for mean-square approximations of periodic functions by trigonometric polynomials on a uniform grid. *Math. Notes*, 43(4):264–272, 1988. = А.Г. Бабенко. Неравенство Джексона для среднеквадратичных приближений периодических функций тригонометрическими полиномами на равномерной сетке. *Матем. заметки*, 43(4): 460–473, 1988.

[3] A.G. Babenko, T. Z. Naum. One-sided integral approximations of the generalized Poisson kernel by trigonometric polynomials. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 22(4):53–63, 2016. = А.Г. Бабенко, Т.З. Наум. Односторонние интегральные приближения обобщенного ядра Пуассона тригонометрическими полиномами. *Труды Института матем. и мех. УрО РАН*, 22(4):53–63, 2016.

[4] N.A. Baraboshkina. L-approximation of a linear combination of the Poisson kernel and its conjugate kernel by trigonometric polynomials. *Proc. Steklov Instit. Math*, 273(suppl. 1):59–67, 2011. = Н.А. Барабошкина. Приближение в L линейной комбинации ядра Пуассона и его сопряженного тригонометрическими полиномами *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, 16(4):79–86, 2010.

[5] J.H. Conway, N.J.A. Sloane. *Sphere Packings, Lattices and Groups.* Springer Verlag, New York, 1988. = Дж. Конвей, Н. Слоэн. *Упаковки шаров, решетки и группы. Т. 1, 2.* Мир, Москва, 1990.

[6] N.I. Chernykh. Best approximation of periodic functions by trigonometric polynomials in L_2. *Math. Notes*, 2(5):803–808, 1967. = Н.И. Черных. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2. *Мат. заметки*, 2(5):513–522, 1967.

[7] V.G. Doronin, A.A. Ligun. Exact values of best one-sided approximations of certain classes of periodic functions. *Soviet Mathematics*, 23(8):20–25, 1979. = В.Г. Доронин, А.А. Лигун. Точные значения наилучших односторонних приближений некоторых классов периодических функций. *Изв. вузов. Математика*, 8(207):20–25, 1979.

[8] A.O. Gel'fond. *Finite Difference Calculus.* Gosudarstv. Izdat. Fiz.-Mat. Lit., Moscow, 1959 (in Russian). = А.О. Гельфонд *Исчисление конечных разностей.* Гос. изд-во Физ.-мат. лит., Москва, 1959.

[9] G.A. Kabatyanskii, V.I. Levenstein. On the Bounds of Packings on a Sphere and in Space. *Problemy Peredachi Inform.*, 14(1):3–25, 1978 (in Russian). = Г.А. Кабатянский, В.И. Левенштейн. О границах для упаковок на сфере и в пространстве. *Проблемы передачи информации*, 14(1):3–25, 1978.

[10] N.P. Korneichuk, A.A. Ligun, V.G. Doronin. *Approximation with Constraints.* Naukova Dumka, Kiev, 1976 (in Russian). = Н.П. Корнейчук, А.А. Лигун, В.Г. Доронин. *Аппроксимация с ограничениями.* Наукова думка, Киев, 1982.

[11] S.B. Stechkin. Some extremal properties of positive trigonometric polynomials. *Math. Notes*, 7(4):248–255, 1970. = С.Б. Стечкин. О некоторых экстремальных свойствах положительных тригонометрических полиномов. *Матем. заметки*, 7(4):411–422, 1970.

[12] V.A. Yudin. The minimum of potential energy of a system of point charges. *Discrete Math. Appl.*, 3(1): 75–81, 1993. = В.А. Юдин. Минимум потенциальной энергии точечной системы зарядов. *Дискретная математика*, 4(2):115–121, 1992.

[13] A. Zygmund. *Trigonometric series, 2nd ed., Vol. 1, 2*, Cambridge University Press, New York, 1959. = А. Зигмунд. *Тригонометрические ряды: в 2 т. / пер. с англ.*, Мир, Москва, 1965.

Trigonometric polynomials of the best one-sided integral approximations of the generalized Poisson kernel

Alexander G. Babenko[1], *Tatiana Z. Naum*[1,2]
1 – Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics (Yekaterinburg, Russia)
2 – Ural Federal University (Yekaterinburg, Russia)

Keywords: approximation with constraints, trigonometric polynomials, generalized Poisson kernel.

In this paper we calculate the coefficients of trigonometric polynomials that are extremal in the problem of the best one-sided integral approximation of the generalized Poisson kernel. These polynomials are representable in the form of special trigonometric fractions and the theory of difference equations is used to find their coefficients. Similar problems arise not only in approximation theory, but also in number theory, coding theory and other areas of mathematics.