Точное неравенство Джексона в L^2 в терминах неклассического модуля непрерывности

А.Г. Бабенко
ИММ УрО РАН (Екатеринбург)
УрФУ (Екатеринбург)
babenko@imm.uran.ru

Ю.А. Юнашева
УрФУ (Екатеринбург)
yulya.yunasheva@mail.ru

Аннотация

Рассматривается задача о точной оценке величины $E_{n-1}(f)$ наилучшего среднеквадратического приближения на периоде произвольной комплекснозначной 2π-периодической функции $f \in L^2$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $n-1$ через её неклассический модуль непрерывности $\omega^*_{2m-1}(f,\delta)$ в L^2, порождённый конечно-разностным оператором $\Delta^*_{t,2m-1}f(x) = \sum_{\nu=0}^{2m-1}(-1)^{\nu+1}f(x+\nu t)$. С помощью одного результата С. Н. Васильева (2001) здесь доказано, что при фиксированных $n \geqslant 1$ и $m \geqslant 2$ точное обобщенное неравенство Джексона

$$E_{n-1}(f) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2m}}\,\omega^*_{2m-1}\left(f,\frac{\gamma}{n}\right), \quad f \in L^2,$$

выполняется при $\gamma \geqslant 1.4\,\pi$. Этот результат уточняет аналогичный результат Н. А. Барабошкиной (2001), получившей такое неравенство при $\gamma \geqslant 2\pi$. Случай $m = 1$ был полностью исследован Н. И. Черных (1967), который установил, что в этом случае в качестве γ можно взять любое число, удовлетворяющее неравенству $\gamma \geqslant \pi$, причем значение $\gamma = \pi$ является минимально возможным.

1 Постановка задачи. История вопроса

Пусть L^2 — пространство 2π-периодических комплекснозначных измеримых функций f, квадрат модуля которых суммируем на периоде $\mathbf{T} = \mathbf{R}/(2\pi\mathbf{Z}) = [0, 2\pi)$, с конечной нормой $\|f\| = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$; $\mathcal{T}_{n-1}$ — подпространство тригонометрических полиномов $\tau(t) = \sum\limits_{k=-(n-1)}^{n-1} c_k e^{ikx}$ порядка не выше $n-1$ с комплексными коэффициентами;

$$E_{n-1}(f) = \inf\left\{\|f-\tau\| :\ \tau \in \mathcal{T}_{n-1}\right\} \qquad (1)$$

— величина наилучшего приближения функции $f \in L^2$ подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$.

In: A.A. Makhnev, S.F. Pravdin (eds.): Proceedings of the International Youth School-conference «SoProMat-2017», Yekaterinburg, Russia, 06-Feb-2017, published at http://ceur-ws.org

Хорошо известно, что для функции $f \in L^2$ ее ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}_k e^{ikx}, \qquad \widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt, \tag{2}$$

сходится к ней по норме пространства L^2, т. е. $\|f - S_{n-1}(f)\| \to 0$ при $n \to \infty$, где $S_{n-1}(f,x) = \sum\limits_{|k|\leqslant n-1} \widehat{f}_k e^{ikx}$ — частная сумма порядка $n-1$ ряда (2); корме того, точная нижняя грань в правой части (1) достигается на единственном полиноме из $\mathcal{T}_{n-1}$, совпадающим с частной суммой $S_{n-1}(f)$, и

$$E_{n-1}(f) = \left(\sum_{|k|\geqslant n} |\widehat{f}_k|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\right)^{1/2}, \quad \text{где} \quad \rho_k^2(f) = |\widehat{f}_k|^2 + |\widehat{f}_{-k}|^2 \quad \text{при} \quad k \in \mathbf{N}. \tag{3}$$

Зафиксируем произвольное натуральное число m. В дальнейшем используются следующие обозначения:

$$C_m^\nu = \frac{m!}{\nu!(m-\nu)!} \text{ — биномиальный коэффициент, где } \nu = 0, 1, \dots, m;$$

$$\Delta_t^m f(x) = \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^{m-\nu} C_m^\nu f(x+\nu t) \text{ — } m\text{-я разность функции } f \text{ с шагом } t;$$

$$\omega_m(f,\delta) = \sup\Big\{\,\|\Delta_t^m f\| :\ |t| \leqslant \delta\,\Big\} \text{ — (классический) модуль непрерывности порядка } m \text{ функции } f \in L^2.$$

Для заданных $m, n \in \mathbf{N}$ и $\gamma > 0$ опишем результаты, относящиеся к задаче о точной константе $K = K(m,n,\gamma)$ в классическом неравенстве Джексона–Стечкина

$$E_{n-1}(f) \leqslant K\,\omega_m\Big(f, \frac{\gamma}{n}\Big), \quad f \in L^2,$$

т. е. к задаче о величине

$$K(m,n,\gamma) := \sup\left\{\frac{E_{n-1}(f)}{\omega_m(f,\gamma/n)} :\ f \in L^2,\ f \not\equiv \mathrm{const}\right\}. \tag{4}$$

В случае модуля непрерывности первого порядка ($m = 1$) Н. И. Черных доказал [9], [12], что

$$K(1,n,\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{при} \quad \gamma \geqslant \pi, \quad K(1,n,\gamma) > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{при} \quad 0 < \gamma < \pi. \tag{5}$$

При этом для оценки сверху величины $K(1,n,\pi)$ он установил следующее весовое неравенство:

$$E_{n-1}^2(f) \leqslant \frac{n}{4}\int\limits_0^{\pi/n} \omega_1^2(f,t)\sin nt\,dt, \quad f \in L^2, \tag{6}$$

и указал весь класс функций, на которых это неравенство обращается в равенство.

В случае модуля непрерывности порядка $m = 2, 3, \dots$ Н. И. Черных [10] доказал, что[1]

$$K(m,n,2\pi) = \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}} \quad \text{при} \quad n > m. \tag{7}$$

Для оценки сверху величины $K(m,n,2\pi)$ он показал, что при любых фиксированных $m, n \in \mathbf{N}$ выполняется точное неравенство

$$E_{n-1}^2(f) \leqslant \frac{1}{C_{2m}^m}\frac{n}{4}\int\limits_0^{2\pi/n} \omega_m^2(f,t)\varphi_n(t)\,dt, \quad f \in L^2, \quad \text{где} \quad \varphi_n(t) = \sin\frac{nt}{2} + \frac{1}{2}\sin nt. \tag{8}$$

[1]Из результатов работ [6, 7, 4] следует, что равенство (7) выполняется и при $1 \leqslant n \leqslant m$.

Введём разностный оператор и соответствующий модуль непрерывности функции $f \in L^2$ (см. [1, 2])

$$\Delta^*_{t,2m-1} f(x) = \sum_{\nu=0}^{2m-1} (-1)^{\nu+1} f(x+\nu t), \qquad \omega^*_{2m-1}(f,\delta) := \sup\Big\{ \|\Delta^*_{t,2m-1} f\| : \ |t| \leqslant \delta \Big\}, \quad \delta \geqslant 0. \tag{9}$$

При $m = 1$ этот модуль непрерывности совпадает с классическим модулем непрерывности 1-го порядка

$$\omega^*_1(f,\delta) = \omega_1(f,\delta) \quad \text{при всех} \quad f \in L^2 \quad \text{и} \quad \delta \geqslant 0. \tag{10}$$

Несложно доказать, что при любых фиксированных $m \in \mathbf{N}$, $\delta > 0$ равенство $\omega^*_{2m-1}(f,\delta) = 0$ выполняется для $f \in L^2$, эквивалентных постоянным функциям, и только для них.

Зафиксируем произвольно натуральные числа m, n, положительное число γ и рассмотрим задачу о точной константе $K^* = K^*(m,n,\gamma)$ в следующем неравенстве Джексона – Стечкина:

$$E_{n-1}(f) \leqslant K^* \omega^*_{2m-1}\left(f, \frac{\gamma}{n}\right), \quad f \in L^2,$$

т. е. рассмотрим задачу о вычислении величины

$$K^*(m,n,\gamma) := \sup\left\{ \frac{E_{n-1}(f)}{\omega^*_{2m-1}(f,\gamma/n)} : \ f \in L^2, \ f \not\equiv \mathrm{const} \right\}. \tag{11}$$

2 Некоторые свойства величины $K^*(m,n,\gamma)$

В силу (10) величины (4), (11) при $m = 1$ совпадают, т. е. $K^*(1,n,\gamma) = K(1,n,\gamma)$ при всех $n \in \mathbf{N}$, $\gamma > 0$. Поэтому в силу (5) имеет место равенство

$$K^*(1,n,\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{при} \quad n \in \mathbf{N}, \ \gamma \geqslant \pi.$$

В работах [1, 3, 6, 7] изучались задачи о точных L^2-неравенствах Джексона с модулями непрерывности достаточно общего вида. В частности, из результатов работ [6, 7, 4] следует, что

$$K^*(m,n,\gamma) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2m}} \quad \text{при} \quad m,n \in \mathbf{N}, \ m \geqslant 2, \ \gamma > 0. \tag{12}$$

В [2] доказано, что для любых $m, n \in \mathbf{N}, m \geqslant 2$ справедлив аналог неравенства (8)

$$E^2_{n-1}(f) \leqslant \frac{1}{2m} \frac{n}{4} \int\limits_0^{2\pi/n} \{\omega^*_{2m-1}(f,t)\}^2 \varphi_n(t)\, dt, \quad f \in L^2,$$

с весовой функцией φ_n, определенной в (8), и что это неравенство влечет оценку

$$K^*(m,n,2\pi) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2m}}. \tag{13}$$

Из (12), (13) вытекает равенство

$$K^*(m,n,2\pi) = \frac{1}{\sqrt{2m}} \quad \text{при} \quad m,n \in \mathbf{N}, \ m \geqslant 2. \tag{14}$$

Введем следующие величины:

$$\beta_m = m - 2\sum_{\ell=1}^{m-1} \frac{\ell}{4(m-\ell)^2 - 1}, \qquad \chi_m = \frac{1}{\sqrt{\beta_m}}. \tag{15}$$

В терминах этих величин в [11, теорема 1] при любых $m, n \in \mathbf{N}$, $m \geqslant 2$, был получен следующий аналог неравенства (6):

$$E_{n-1}(f) \leqslant \frac{\chi_m}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{n}{2} \int\limits_0^{\pi/n} \left[\omega^*_{2m-1}(f,t)\right]^2 \sin nt\, dt \right\}^{1/2}, \quad f \in L^2, \tag{16}$$

при этом неравенство (16) обращается в равенство на функции $f^*(x) = \cos nx$.

Отметим, что из (16) следует оценка

$$K^*(m, n, \pi) \leqslant \chi_m \quad \text{при} \quad m, n \in \mathbf{N},\ m \geqslant 2.$$

Обратим внимание на то, что величина χ_m с ростом m стремится к нулю по порядку, как $\dfrac{1}{\sqrt{\ln m}}$, т. е.

$$\chi_m \asymp \frac{1}{\sqrt{\ln m}} \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{17}$$

Действительно, применив замену $j = m - \ell$ преобразуем формулу для

$$\beta_m = m - 2\sum_{j=1}^{m-1} \frac{m-j}{4j^2-1} = m - 2m\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{4j^2-1} + 2\sum_{j=1}^{m-1} \frac{j}{4j^2-1}.$$

С помощью известной формулы $\displaystyle\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{4j^2-1} = \frac{m-1}{2m-1}$ (см. [8, гл. 4, п. 4.1.5, с. 601, формула 10]), приходим к равенству $\displaystyle\beta_m = m - \frac{2m(m-1)}{2m-1} + 2\sum_{j=1}^{m-1} \frac{j}{4j^2-1} = \frac{m}{2m-1} + 2\sum_{j=1}^{m-1} \frac{j}{4j^2-1}$. При $m \geqslant 3$ можно еще раз преобразовать выражение для $\displaystyle\beta_m = \frac{m}{2m-1} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} \frac{2j-1+2j+1}{(2j-1)(2j+1)} = \frac{m}{2m-1} + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{2j+1} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{2j-1}\right)$. Произведя замену $j' = j + 1$ индекса суммирования в первой сумме, расположенной в круглых скобках, вновь упростим выражение для $\displaystyle\beta_m = \frac{2m}{2m-1} + \sum_{j=2}^{m-1} \frac{1}{2j-1}$. Отсюда и (15) следует (17).

3 Основной результат

В данной заметке с помощью результата С. Н. Васильева [3, теорема 1] доказано, что равенство (14) сохранится, если точку 2π в последнем аргументе K^* заменить на точку $1.4\,\pi$. А именно, имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Справедливо равенство* $K^*(m, n, 1.4\,\pi) = \dfrac{1}{\sqrt{2m}}$ *при* $m, n \in \mathbf{N}$, $m \geqslant 2$.

Доказательство. Как следует из [1, следствие 1, пример 2], [2, доказательство теремы 1], разностный оператор $\Delta^*_{t,2m-1}$ (см. (9)) переводит функцию $f \in L^2$ с рядом Фурье (2) в функцию, квадрат нормы которой удовлетворяет соотношению

$$\|\Delta^*_{t,2m-1} f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 \psi(kt), \quad t \in \mathbf{R},$$

в котором числа ρ_k связаны с коэффициентами Фурье $\widehat{f}_k$ функции f равенствами $\rho_k^2(f) = |\widehat{f}_k|^2 + |\widehat{f}_{-k}|^2$ (см. (3)), а функция ψ задается формулой

$$\psi(t) = \frac{1-\cos 2mt}{1+\cos t} = 2m - 2\sum_{l=1}^{2m-1} (-1)^{l+1}(2m-j)\cos jt.$$

В силу теоремы 1 из [3] для доказательства теоремы достаточно установить, что в нашем случае функция ψ является ненулевой, неотрицательной и удовлетворяет следующим условиям:

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(-t) = \psi(t) \quad \text{и} \quad \psi(\pi - t) = \psi(\pi + t) \quad \text{для} \quad t \in \mathbf{R}; \tag{18}$$

$$\frac{1}{t}\int_0^t \psi(x)dx \leqslant I(\psi) \quad \text{для любого} \quad t \in (0, \pi), \quad \text{где} \quad I(\psi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \psi(t)\,dt = 2m. \tag{19}$$

Очевидно, что ψ является ненулевой и неотрицательной. Справедливость условий (18) проверяется легко. Осталось установить справедливость условия (19). Несложно понять, что (19) равносильно неравенству

$$\sum_{j=1}^{2m-1}(-1)^{j+1}(2m-j)\frac{\sin jt}{jt}\geqslant 0 \quad \text{при} \quad t\in(0,\pi), \tag{20}$$

т. е. равносильно условию неотрицательности на $(0,\pi)$ следующей функции:

$$\Upsilon_m(t):=\sum_{j=1}^{2m-1}(-1)^{j+1}(2m-j)\frac{\sin jt}{jt}. \tag{21}$$

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно доказать неравенство (20), или, что тоже самое, доказать неравенство

$$\Upsilon_m(t)\geqslant 0 \quad \text{при} \quad t\in(0,\pi).$$

Наряду с функцией Υ_m рассмотрим синус-полиномы F_m, G_m порядка $2m-1$, определенные формулами

$$F_m(t):=t\Upsilon_m(t)=\sum_{j=1}^{2m-1}(-1)^{j+1}\frac{2m-j}{j}\sin jt,$$

$$G_m(t):=F_m(\pi-t)=\sum_{j=1}^{2m-1}(-1)^{j+1}\frac{2m-j}{j}\sin j(\pi-t)=\sum_{j=1}^{2m-1}\frac{2m-j}{j}\sin jt. \tag{22}$$

Очевидно, что (20) равносильно неотрицательности синус-полинома G_m на $(0,\pi)$.

Синус-полином G_m можно записать в виде ряда

$$G_m(t)=\sum_{j=1}^{\infty}a_j\sin jt, \quad \text{где} \quad a_j=\frac{2m-j}{j} \quad \text{при} \quad j=1,2,\dots 2m-1, \quad a_j=0 \quad \text{при} \quad j\geqslant 2m.$$

Несложно проверить, что коэффициенты этого ряда образуют невозрастающую выпуклую последовательность стремящуюся к нулю, т. е.

$$a_j\to 0 \quad \text{при} \quad j\to\infty,$$
$$\Delta a_j=a_j-a_{j+1}\geqslant 0 \quad \text{при} \quad j\geqslant 1,$$
$$\Delta^2 a_j=a_j-2a_{j+1}+a_{j+2}\geqslant 0 \quad \text{при} \quad j\geqslant 1.$$

Отсюда (см., например, в [5, гл. 5, § 1, с. 297] абзац, идущий после формулировки теоремы 1.14) следует положитнельность синус-полинома G_m на $(0,\pi)$.

Таким образом, теорема доказана.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-9356.2016.1) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Список литературы

[1] A.G. Babenko. On the Jackson – Stechkin Inequality for the Best $\mathbf{L^2}$-Approximations of Functions by Trigonometric Polynomials. *Proc. Steklov Inst. Math.*, Suppl. 1:30–47, 2001. = А.Г. Бабенко. О неравенстве Джексона – Стечкина для наилучших L^2-приближений функций тригонометрическими полиномами. *Труды Института матем. и мех. УрО РАН*, 7(1):30–46, 2001.

[2] N. A. Baraboshkina. The Jackson – Stechkin Inequality with a Nonclassic Modulus of Continuity. *Proc. Steklov Inst. Math.*, Suppl. 1:65–70, 2001. = Н.А. Барабошкина. Неравенство Джексона – Стечкина с неклассическим модулем непрерывности. *Труды Института матем. и мех. УрО РАН*, 7(1):62–66, 2001.

[3] S.N. Vasil'ev. The Jackson–Stechkin Inequality in $L_2[-\pi,\pi]$. *Proc. Steklov Inst. Math.*, Suppl. 1:243–253, 2001. = С.Н. Васильев. Неравенство Джексона – Стечкина в $L_2[-\pi,\pi]$. *Труды ИММ УрО РАН*, 7(1):75–84, 2001.

[4] S.N. Vasil'ev. Sharp Jackson – Stechkin Inequality in L^2 for best approximations by trigonometric polynomials. *Elektron. zhurn. "Issledovano v Rossii"*, 140:1577–1586, 2002 (in Russian). = С.Н. Васильев. Точное неравенство Джексона – Стечкина в L^2 для наилучших приближений тригонометрическими полиномами. *Электрон. журн. "Исследовано в России"*, 140:1577–1586, 2002. http://wwwinfo.jinr.ru/invest_in_Russia.html

[5] A. Zygmund. *Trigonometric series. Vol. I.* Cambridge University Press, New York, 1959. = А. Зигмунд. *Тригонометрические ряды. Т. 1.* Мир, Москва, 1965.

[6] A.I. Kozko, A.V. Rozhdestvenskii. On Jackson's inequality in L_2 with a generalized modulus of continuity *Math. Notes*, 73(5-6):736–741, 2003. = А.И. Козко, А.В. Рождественский. О неравенстве Джексона в L_2 с обобщенным модулем непрерывности. *Мат. заметки*, 73(5):783–788, 2003.

[7] A.I. Kozko, A.V. Rozhdestvenskii. On Jackson's inequality in L_2 with a generalized modulus of continuity *Sb. Math.*, 195(7-8): 1073–1115, 2003. = А.И. Козко, А.В. Рождественский. О неравенстве Джексона в L_2 с обобщенным модулем непрерывности. *Мат. сб.*, 195(8):3–46, 2004.

[8] A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov, O.I. Marichev. *Integrals and series / Elementary functions.* Nauka, Moscow, 1981 (in Russian). = А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. *Интегралы и ряды.* Наука, Москва, 1981.

[9] N.I. Chernykh. Jackson's Inequality in L_2. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 88:75–78, 1967. = Н.И. Черных. О неравенстве Джексона в L_2. *Труды МИАН СССР*, 88:71–74, 1967.

[10] N.I. Chernykh. Best approximation of periodic functions by trigonometric polynomials in L_2. *Math. Notes*, 2(5):803–808, 1967. = Н.И. Черных. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2. *Мат. заметки*, 2(5):513–522, 1967.

[11] M.Sh. Shabozov, A.D. Farozova. The Jackson – Stechkin inequality with nonclassical modulus of continuity. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 22(4):311–319, 2016 (in Russian). = М.Ш. Шабозов, А.Д. Фарозова. Точное неравенство Джексона – Стечкина с неклассическим модулем непрерывности. *Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН*, 22(4):311–319, 2016.

[12] V.V. Arestov, N.I. Chernykh. On the L_2-approximation of periodic functions by trigonometric polynomials. *Approximation and functions spaces: proc. intern. conf., Gdan′sk, 1979*, North-Holland, Amsterdam, 25–43, 1981.

Sharp Jackson inequality in L^2 in terms of a nonclassical modulus of continuity

Alexander G. Babenko[1,2], *Yulya A. Yunasheva*[2]
1 – Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics (Yekaterinburg, Russia)
2 – Ural Federal University (Yekaterinburg, Russia)

Keywords: best approximation, nonclassical modulus of continuity, Jackson – Stechkin inequality, best constants.

We consider the problem of an exact estimate of the value $E_{n-1}(f)$ of the best mean-square approximation on the period of an arbitrary complex-valued 2π-periodic function $f \in L^2$ by trigonometric polynomials of degree at most $n-1$ through its nonclassical modulus of continuity $\omega^*_{2m-1}(f,\delta)$ in L^2, generated by a finite-difference operator $\Delta^*_{t,2m-1}f(x) = \sum_{\nu=0}^{2m-1}(-1)^{\nu+1}f(x+\nu t)$. With the help of one the result of S. N. Vasil'ev (2001) here it is proved, that for fixed $n \geq 1$, $m \geq 2$ and $\gamma \geq 1.4\,\pi$ the sharp generalized Jackson inequality

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{\sqrt{2m}}\,\omega^*_{2m-1}\left(f, \frac{\gamma}{n}\right), \quad f \in L^2,$$

holds. This result refines similar result of N. A. Baraboshkina (2001), she obtained such an inequality for $\gamma \geq 2\pi$. Case $m = 1$ was completely investigated by N. I. Chernykh (1967), he established that in this case any number can be taken as γ, which satisfies the inequality $\gamma \geq \pi$, and the $\gamma = \pi$ is the lowest possible.