Неравенство Планшереля – Полиа для целых функций экспоненциального типа в $L^2(\mathbb{R})$

Е.В. Берестова
BerestovaEkaterina@gmail.com

УрФУ (Екатеринбург)

Аннотация

На множестве целых функций f экспоненциального типа не выше $\nu > 0$, принадлежащих пространству $L^2(\mathbb{R})$, изучается неравенство Планшереля – Полиа $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(k)|^2 \leqslant c_2(\nu)\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$. Доказано, что $c_2(\nu) = \nu/\pi$, если ν/π – натуральное.

1 Введение

Для $1 \leqslant p < \infty$ обозначим через $\mathfrak{M}^p_\nu$ множество функций $f(z)$ экспоненциального типа не выше ν, сужение которых на вещественную ось имеет конечную норму в пространстве $L^p(\mathbb{R})$, т. е.

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < \infty.$$

В статье изучается неравенство Планшереля – Полиа

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(k)|^p \leqslant c_p(\nu)\|f\|^p_p, \quad f \in \mathfrak{M}^p_\nu, \tag{1.1}$$

для значения $p = 2$. Неравенство (1.1) можно интерпретировать как задачу о норме линейного оператора, сопоставляющего целой функции $f \in L^p(\mathbb{R})$ последовательность $\{f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell_p$ значений функции на счетном множестве точек.

В силу классической теоремы Уиттекера – Найквиста – Котельникова – Шеннона (см. [4, 20.2, Theorem 1]) для всех $0 < \nu \leqslant \pi$ и $f \in \mathfrak{M}^2_\nu$ справедливо равенство

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(k)|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx, \tag{1.2}$$

и, таким образом, $c_2(\nu) = 1$ для всех $0 < \nu \leqslant \pi$.

М. Планшерель и Г. Полиа (см. [4, пп. 20.3–21.2, пп. теорема 5]) установили конечность величины $c_p(\nu)$ для значений $1 < p < \infty$, $\nu \leqslant \pi$ и $p = 1$, $\nu < \pi$. С.М. Никольский в 1951 г. ([3, п. 1], см. также [2, п.3.3]) получил следующую оценку:

$$c_p(\nu) \leqslant (1 + \nu)^p, \quad 1 \leqslant p < \infty. \tag{1.3}$$

In: A.A. Makhnev, S.F. Pravdin (eds.): Proceedings of the International Youth School-conference «SoProMat-2017», Yekaterinburg, Russia, 06-Feb-2017, published at http://ceur-ws.org

Р. П. Боас, Д. Л. Донохо и Б. Ф. Логан, С. Норвидас изучали более общую в сравнении с (1.1) задачу. Вместо значений $\{f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ они рассматривали значения $\{f(\lambda_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, где последовательность $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ удовлетворяет некоторым достаточно общим условиям (см. [6]). При $\lambda_k = k$ их результаты дают следующие оценки величины $c_p(\nu)$.

Д. Л. Донохо и Б. Ф. Логан в 1992 г. [5] доказали, что при $p = 2$ и $0 < \nu\delta < \pi$ справедливы оценки

$$c_2(\nu) \leqslant \frac{2\nu([\delta]+1)}{\nu\delta+\sin(\nu\delta)}, \qquad c_1(\nu) \leqslant \frac{\nu([\delta]+1)}{2\sin(\nu\delta/2)}. \tag{1.4}$$

С. Норвидас в 2014 г. [6] рассмотрел случай $1 \leqslant p \leqslant 2$. Он показал, что при $0 < \nu\delta < \pi$

$$c_p(\nu) \leqslant \frac{[\delta]+1}{2\delta\|\cos(\nu\delta\cdot)\|^p_{L^p[0,1/2]}}. \tag{1.5}$$

Если $p = 1$ или $p = 2$, то $\|\cos(\nu\delta\cdot)\|^p_{L^p[0,1/2]}$ может быть вычислен по формулам

$$\|\cos(\nu\delta\cdot)\|_{L^1[0,1/2]} = \frac{\sin(\nu\delta/2)}{\nu\delta} \quad \text{и} \quad \|\cos(\nu\delta\cdot)\|^2_{L^2[0,1/2]} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{\sin(\nu\delta)}{\nu\delta}\right).$$

В этих случаях оценки С. Норвидаса (1.5) совпадают с оценками Д. Л. Донохо и Б. Ф. Логана (1.4).

Найдем инфимум оценки (1.5) по параметру δ при $p = 2$ и $\nu > \pi$. Тогда $0 < \delta < \pi/\nu < 1$ и, следовательно, $[\delta] = 0$. Поскольку функция $x + \sin x$ возрастает по x, то

$$c_2(\nu) \leqslant \lim_{\delta\to\frac{\pi}{\nu}-0} \frac{2\nu}{\nu\delta+\sin(\nu\delta)} = \lim_{\delta\to\frac{\pi}{\nu}-0} \frac{2\nu}{\nu\delta\left(1+\dfrac{\sin(\nu\delta)}{\nu\delta}\right)} = \frac{2\nu}{\pi}. \tag{1.6}$$

Так же отметим тот факт, что если функция $f \in \mathfrak{M}^p_0$, то f тождественно равна нулю ([2, гл. 3.2.2], см. также [7]). Поэтому естественно рассматривать только $\nu > 0$.

Далее мы будем использовать обозначение $[x]$ для наибольшего целого числа, не превосходящего x, и обозначение $\lceil x\rceil$ для наименьшего целого числа, которое больше или равно x, таким образом, $[x] \leqslant x \leqslant \lceil x\rceil$.

В работе будет доказана следующая теорема

Теорема 1. *Для всех $\nu > 0$ справедливы оценки*

$$[\nu/\pi] \leqslant 2[\nu/\pi] + 1 - \frac{[\nu/\pi]^2 + [\nu/\pi]}{\nu/\pi} \leqslant c_2(\nu) \leqslant \lceil \nu/\pi\rceil. \tag{1.7}$$

В частности, если ν/π натуральное, то неравенство (1.7) *обращается в равенство*

$$c_2(\nu) = \nu/\pi.$$

2 Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 мы разобъем на три леммы.

Лемма 1 (Оценка $c_2(\nu)$ сверху)**.** *Для всех $\nu > 0$ справедливо неравенство*

$$c_2(\nu) \leqslant \lceil \nu/\pi\rceil.$$

Доказательство. Пусть m есть наименьшее натуральное число со свойством $\nu/m \leqslant \pi$, т. е. $m = \lceil\nu/\pi\rceil$. Функции $f(z)$ сопоставим функцию $g(z) = f(z/m)$. Нетрудно проверить, что $g \in \mathfrak{M}^2_\pi$. Применим к функции g равенство (1.2):

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(k/m)|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |g(k)|^2 = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx = m\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx.$$

Поскольку

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(k)|^2 \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(k/m)|^2,$$

то мы заключаем, что $c_2(\nu) \leqslant m = \lceil \nu/\pi \rceil$. Лемма доказана. ∎

Преобразование Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ определим формулой

$$\mathcal{F}f(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i z x} dx.$$

Оператор преобразования Фурье в пространствах $L^1(\mathbb{R})$ и $L^2(\mathbb{R})$ обозначим $\mathcal{F}$.

Лемма 2. *Если $f \in \mathfrak{M}_\nu^2$ и $f = \mathcal{F}g$, то*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f^2(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (g*g)(k), \quad (g*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(t)g(x-t)dt. \tag{2.1}$$

Доказательство. По теореме Пэли–Винера [1, гл. 3, теорема 4.1] функция f есть преобразование Фурье некоторой функции $g \in L^2[-\nu/(2\pi), \nu/(2\pi)]$, т.е. $f = \mathcal{F}g$. По свойствам преобразования Фурье [1, гл. 1 теорема 1.4] имеем

$$\mathcal{F}(g*g) = (\mathcal{F}g)^2 = f^2.$$

Проверим, что для свертки $g*g$ справедлива формула суммирования Пуассона [1, гл. 7, теорема 2.4]. Поскольку мера множества $[-\nu/(2\pi), \nu/(2\pi)]$ конечна, то $g \in L^1[-\nu/(2\pi), \nu/(2\pi)]$. По теореме [1, гл. 1 теорема 1.3] свертка $g*g$ также принадлежит $L^1[-\nu/(2\pi), \nu/(2\pi)]$. Тогда ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} (g*g)(k+x)$ сходится в пространстве $L^1[-1/2, 1/2]$, и его сумма имеет разложение в ряд Фурье $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(g*g)(k) e^{2\pi i k x} = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} f^2(k) e^{2\pi i k x}$. Докажем, что справедливо равенство

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (g*g)(k+x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f^2(k) e^{2\pi i k x}, \quad x \in [-1/2, 1/2]. \tag{2.2}$$

В силу конечности величины $c_2(\nu)$ ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |f(k)|^2$ сходится. Следовательно, ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} f^2(k) e^{2\pi i k x}$, состоящий из непрерывных функций, равномерно сходится к непрерывной функции. Далее, свертка $g*g$ имеет ограниченный носитель, поэтому ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} (g*g)(k+x)$ на отрезке $[-1/2, 1/2]$ превращается в конечную сумму. Кроме того, свертка $g*g$ есть непрерывная функция, поскольку

$$|(g*g)(x) - (g*g)(x_0)| = \left| \int_{\mathbb{R}} g(t)(g(x-t) - g(x_0-t))dt \right| \leqslant \|g\|_2^2 \|g(x-\cdot) - g(x_0-\cdot)\|_2^2$$

и $\|g(x-\cdot) - g(x_0-\cdot)\|_2 \to 0$, $x \to x_0$ (см., например, [1, гл. 1, доказательство теоремы 1.18]). Таким образом, $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} (g*g)(k+x)$ является непрерывной функцией. Итак, обе части (2.2) являются непрерывными функциями, следовательно, они должны быть равны. Подставляя в равенство (2.2) $x = 0$, получаем (2.1). ∎

Лемма 3 (Оценка $c_2(\nu)$ снизу)**.** *Для всех $\nu > 0$ справедливы неравенства*

$$[\nu/\pi] \leqslant 2[\nu/\pi] + 1 - \frac{[\nu/\pi]^2 + [\nu/\pi]}{\nu/\pi} \leqslant c_2(\nu). \tag{2.3}$$

В частности, если ν/π натуральное, то неравенство (2.3) *принимает вид*

$$\nu/\pi \leqslant c_2(\nu).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(z) = \sin(\nu z)/(\pi z)$, которая является целой функцией экспоненциального типа ν. Как известно, функция $f(z)$ есть преобразование Фурье функции

$$\chi_\sigma(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [-\sigma, \sigma]; \\ 0, & \text{если } t \notin [-\sigma, \sigma], \end{cases} \qquad \sigma = \nu/(2\pi).$$

Нетрудно проверить, что свертка $(\chi_\sigma * \chi_\sigma)(x) = 2\sigma - |x|$ для $|x| \leqslant 2\sigma$ и $(\chi_\sigma * \chi_\sigma)(x) = 0$ в противном случае.

Воспользуемся леммой 2 для данной функции $f(z)$:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f^2(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\chi_\sigma * \chi_\sigma)(k) = \sum_{k=-[2\sigma]}^{[2\sigma]} (\chi_\sigma * \chi_\sigma)(k) = 2\sum_{k=1}^{[2\sigma]} (\chi_\sigma * \chi_\sigma)(k) + (\chi_\sigma * \chi_\sigma)(0) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{[2\sigma]} (2\sigma - k) + 2\sigma = 2\frac{2\sigma - 1 + 2\sigma - [2\sigma]}{2}[2\sigma] + 2\sigma = (4\sigma - [2\sigma] - 1)[2\sigma] + 2\sigma.$$

По теореме Планшереля

$$\|f\|_2^2 = \left\|\frac{\sin(\nu z)}{\pi z}\right\|_2^2 = \|\chi_\sigma\|_2^2 = \int_{-\sigma}^{\sigma} dx = \nu/\pi.$$

Учитывая, что функция f принимает вещественные значения на $\mathbb{R}$, $\sigma = \nu/(2\pi)$, $[2\sigma] = [\nu/\pi]$, мы приходим к такому результату

$$\frac{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(k)|^2}{\|f\|_2^2} = \frac{(4\sigma - [2\sigma] - 1)[2\sigma] + 2\sigma}{2\sigma} = 2[2\sigma] + 1 - \frac{[2\sigma]^2 + [2\sigma]}{2\sigma} = 2[\nu/\pi] + 1 - \frac{[\nu/\pi]^2 + [\nu/\pi]}{\nu/\pi}.$$

Нетрудно проверить, что $[\nu/\pi] \leqslant 2[\nu/\pi] + 1 - \dfrac{[\nu/\pi]^2 + [\nu/\pi]}{\nu/\pi}$. В частности, если ν/π натуральное, то

$$2[\nu/\pi] + 1 - \frac{[\nu/\pi]^2 + [\nu/\pi]}{\nu/\pi} = 2\nu/\pi + 1 - \nu/\pi = \nu/\pi.$$

Лемма доказана. ■

Благодарности

Благодарим профессора Г. Тамберга из Таллинского технического университета за постановку задачи.

Работа выполнена при поддержке Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-9356.2016.1) и поддержке постановления № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006.

Список литературы

[1] E. Stein, G. Weiss. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces.* Mir, Moscow, 1974 (in Russian). = Е. Стейн, Г. Вейс. *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.* Мир, Москва, 1974.

[2] S. M. Nikol'skii. *Approximation of functions of several variables and embedding theorems.* Nauka, Moscow, 1977 (in Russian). = С. М. Никольский. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* Наука, Москва, 1977.

[3] S. M. Nikol'skii. Inequalities for entire functions of finite degree and their application in the theory of differentiable functions of several variables. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 38:244–278, 1951 (in Russian). = С. М. Никольский. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных. *Труды математического института имени В. А. Стеклова*, 38:244–278, 1951.

[4] B. Ya. Levin. Lectures on entire functions. *Translations of mathematical monographs by the American mathematical society. – Volume 150*, 1996.

[5] D. L. Donoho, B. F. Logan. Signal recovery and the large sieve. *SIAM J.*, 52(2):577–591, April 1992.

[6] S. Norvidas. Concentration of L^p-bandlimited functions on discrete sets. *Lithuanian Mathematical Journal*, 54(4):471–481, October 2014.

[7] G. Polya. Über ganze Funktionen vom Minimaltypus der Ordnung 1. Aufgabe 105. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung*, 40(80):9–12, 1931.

The Plancherel – Polya inequality for entire functions of exponential type in $L^2(\mathbb{R})$

Ekaterina V. Berestova
Ural Federal University (Yekaterinburg, Russia)

Keywords: Plancherel – Polya inequality, entire function of exponential type, Fourier transform.

We investigate the Plancherel – Polya inequality $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(k)|^2 \leqslant c_2(\nu)\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$ on the set of entire functions f of exponential type $\leqslant \nu$ that belong to the space $L^2(\mathbb{R})$. We proved that $c_2(\nu) = \nu/\pi$, when ν/π is a positive integer.