О классах функций с ограничением на фрактальность их графиков

М.Л. Гриднев
coraxcoraxg@gmail.com

ИММ УрО РАН (Екатеринбург)

Аннотация

Рассматриваются классы непрерывных на отрезке функций с ограничениями на фрактальную размерность их графиков. Вводится характеристика фрактальности графика непрерывной функции и определяются соответствующие ей классы функций. Изучена связь этих классов с классами функций обобщенной ограниченной вариации.

1 Необходимые определения и обозначения

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\tau = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = b\}$ — разбиение отрезка $[a, b]$. Напомним, что вариацией функции f на отрезке $[a, b]$ называется следующая величина

$$Vf = \sup_{\tau} V(f, \tau) = \sup_{\tau} \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|.$$

Функции, вариация которых конечна на отрезке, называются функциями ограниченной вариации, а класс таких функций обозначается $BV[a, b]$.

Определение 1. Пусть $1 \leqslant p < +\infty$, обобщенной p-вариацией или просто p-вариацией функции f называется следующая величина

$$V_p f = \sup_{\tau} V_p(f, \tau) = \sup_{\tau} \left(\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Функции, p-вариация которых конечна на отрезке, называются функциями обобщенной ограниченной p-вариации, а класс таких функций обозначается $BV_p[a, b]$ (см., например, [1, гл.IV, §5]).

Определение 2. Пусть дана ограниченная функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда модулем фрактальности функции f будем называть функцию $\nu(f, \varepsilon)$, которая любому ε, большему нуля, сопоставляет минимальное число квадратов, со сторонами длины ε, параллельными осям координат, которыми можно покрыть график функции f.

Определение 3. Пусть $\mu : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — невозрастающая функция, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mu(\varepsilon) = +\infty$. Определим класс функций F^{μ} следующим образом

$$F^{\mu} := \{f \in C[a, b] : \nu(f, \varepsilon) = O(\mu(\varepsilon))\}.$$

Copyright © by the paper's authors. Copying permitted for private and academic purposes.

In: A.A. Makhnev, S.F. Pravdin (eds.): Proceedings of the International Youth School-conference «SoProMat-2017», Yekaterinburg, Russia, 06-Feb-2017, published at http://ceur-ws.org

Далее, принимая $\mu(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^\alpha}$, мы будем рассматривать только следующие классы:

$$F_\alpha := F^{\frac{1}{\varepsilon^\alpha}}, 1 \leqslant \alpha \leqslant 2.$$

Через $\lceil x \rceil$ будем обозначать целочисленное округление вверх числа x.

2 Равенство классов F_1 и $BV[a,b] \bigcap C[a,b]$

Теорема 1. *Если функция f принадлежит классу F_1, то она является функцией ограниченной вариации.*

Доказательство. Будем доказывать от противного: пусть существует функция f из F_1, не принадлежащая классу $BV[a,b]$.

Тогда для любых положительных чисел A и δ существует разбиение $\tau = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < < t_n = b\}$ отрезка $[a,b]$ такое, что

$$V(f,\tau) = \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| > 3A,$$

$$t_k - t_{k-1} < \delta, \quad k = 1, \dots, n.$$

Возьмем $\varepsilon = \max(t_k - t_{k-1})$. Так как функция f непрерывна, то образом отрезка будет отрезок. Тогда,

$$\left\lceil \frac{|f(t_k) - f(t_{k-1})|}{\varepsilon} \right\rceil \leqslant \nu_{[t_k, t_{k-1}]}(f,\varepsilon),$$

где $\nu_{[t_{k-1},t_k]}(f,\varepsilon)$ — минимальное число квадратов со сторонами длины ε, которыми можно покрыть прямоугольник $[t_{k-1},t_k] \times f([t_{k-1},t_k])$, а, следовательно, и участок графика на отрезке $[t_{k-1},t_k]$. Принимая во внимание тот факт, что $\nu_{[t_{k-1},t_k]}(f,\varepsilon)$ меньше числа квадратов, покрывающих график функции f на отрезке $[t_{k-2},t_{k+1}]$ и подсчитанных при вычислении числа $\nu(f,\varepsilon)$, можно получить следующую оценку

$$\frac{V(f,\tau)}{\varepsilon} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left\lceil \frac{|f(t_k) - f(t_{k-1})|}{\varepsilon} \right\rceil \leqslant \sum_{k=1}^{n} \nu_{[t_{k-1},t_k]}(f,\varepsilon) \leqslant 3\nu(f,\varepsilon).$$

Итак,

$$\nu(f,\varepsilon) \geqslant \frac{V(f,\tau)}{3\varepsilon} > \frac{3A}{3\varepsilon} = \frac{A}{\varepsilon}.$$

И мы получаем отрицание того, что $\nu(f,\varepsilon) = O(\frac{1}{\varepsilon})$, а именно

$$\forall \delta > 0 \; \forall A > 0 \; \exists \varepsilon \in (0,\delta) \quad \nu(f,\varepsilon) > \frac{A}{\varepsilon},$$

а это противоречит тому, что f принадлежит классу F_1. Теорема доказана.

Теорема 2. *Непрерывная функция ограниченной вариации принадлежит классу F_1.*

Теорема 2 является частным случаем теоремы 3, которую мы сформулируем и докажем ниже.

Из теорем 1 и 2 вытекает, что $F_1 = BV[a,b] \bigcap C[a,b]$.

3 Связь классов F_α и $BV_p[a,b]$

Всюду далее без ограничения общности будем считать, что $[a,b] = [0,1]$.

Теорема 3. *Пусть $1 \leqslant p < \infty$, тогда любая функция $f \in BV_p[a,b] \bigcap C[a,b]$ принадлежит классу $F_{2-\frac{1}{p}}$.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть

$$n = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil,$$

d_k - минимальное количество квадратов, которыми можно покрыть график функции f на отрезке $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}],\ k = 1, ..., n$, тогда

$$\nu(f, \varepsilon) \leqslant \sum_{k=1}^{n} d_k.$$

Понятно, что

$$\sum_{k=1}^{n} (d_k - 1)^p \varepsilon^p \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\max_{t \epsilon [\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}]} f(t) - \min_{t \epsilon [\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}]} f(t) \right)^p \leqslant (V_p f)^p.$$

Воспользовавшись выпуклостью функции x^p:

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right)^p \leqslant \frac{a^p}{2} + \frac{b^p}{2}, \quad a, b \geqslant 0,$$

получим следующую оценку

$$\sum_{k=1}^{n} (d_k \varepsilon)^p = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2(d_k - 1)}{2} + \frac{2}{2} \right)^p \varepsilon^p \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (2d_k - 2)^p \varepsilon^p \ + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} 2^p \varepsilon^p \leqslant$$

$$\leqslant 2^{p-1} \sum_{k=1}^{n} (d_k - 1)^p \varepsilon^p + 2^{p-1} \varepsilon^p \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \leqslant C = const, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

И наконец, используя неравенство Гельдера, получаем

$$\nu(f, \varepsilon) \leqslant \sum_{k=1}^{n} d_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} (d_k \varepsilon)^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{p}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \leqslant C^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{p}{p-1}+1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} = \frac{C^{\frac{1}{p}}}{\varepsilon^{2-\frac{1}{p}}}.$$

Иными словами,

$$\nu(f, \varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^{2-\frac{1}{p}}} \right),$$

что и требовалось доказать.

Теперь покажем невозможность обратного вложения.

Теорема 4. *Пусть* $1 < \alpha < 2$, *тогда для любого* $q \geqslant 1$ *существует функция* $f \in F_\alpha$, *которая не принадлежит классу* $BV_q[0, 1]$.

Доказательство. Пусть $p > 0$ такое, что $\alpha = 2 - \frac{1}{p+1}$. Теперь возьмём последовательность чисел $\{x_k\}$, где $x_k = k^{-\frac{1}{p}},\ k \in \mathbb{N}$.

Зададим функцию $f_p : [0, 1] \to [0, 1]$ следующим образом

$$f_p(x) = \begin{cases} \dfrac{x_k + x_{k-1} - 2x}{x_{k-1} - x_k}, & x \in [x_k, \frac{x_{k-1}+x_k}{2}),\ k \in \mathbb{N}; \\[2ex] \dfrac{2x - x_k - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}, & x \in [\frac{x_k + x_{k+1}}{2}, x_k),\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Можно заметить, что $f_p(x_k) = 1$ и $f_p(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}) = 0,\ k \in \mathbb{N}$.

При $\varepsilon > 0$(всюду далее будем считать, что ε мало) рассмотрим следующее покрытие графика этой функции: покроем квадратами со стороной ε прямоугольник $[0, \varepsilon^{\frac{1}{p+1}}] \times [0, 1]$ – это будет покрытие графика сужения функции f_p на отрезок $[0, \varepsilon^{\frac{1}{p+1}}]$, состоящее не более чем из $\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil \cdot \lceil \varepsilon^{\frac{1}{p+1}-1} \rceil \leqslant 4 \lceil \varepsilon^{\frac{1}{p+1}-2} \rceil$ квадратов. Оставшуюся часть графика будем покрывать на каждом участке линейности функции отдельно, при этом для каждого участка достаточно не более $\frac{2}{\varepsilon}$ квадратов, а таких участков не более $\lceil 2\varepsilon^{\frac{-p}{p+1}} \rceil$ (т.к. $x_k = k^{-\frac{1}{p}} \geqslant \varepsilon^{\frac{1}{p+1}}$).

В итоге, количество квадратов в покрытии можно оценить так

$$\nu(f_p,\varepsilon) \leqslant 4\lceil \varepsilon^{\frac{1}{p+1}-2}\rceil + \frac{2}{\varepsilon}\lceil 2\varepsilon^{\frac{-p}{p+1}}\rceil \leqslant 8\varepsilon^{\frac{1}{p+1}-2} + \frac{8}{\varepsilon}\varepsilon^{\frac{-p}{p+1}} = 16\varepsilon^{\frac{1}{p+1}-2},$$

то есть $\nu(f_p,\varepsilon) = O(\varepsilon^{-\alpha})$.

Пусть $0 < \beta = \frac{p}{2q}$, возьмём непрерывную функцию $x^\beta f_p(x)$, можно заметить, что если покрывать её график так же, как мы это делали выше, то мощность такого покрытия не увеличится, значит $x^\beta f_p(x) \in F_\alpha$.

Возьмём разбиение $\tau_n = \{0 = t_n < ... < t_{2k+2} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} < t_{2k+1} = x_k < ... < t_1 = 1\}$. Оценим с его помощью $q-$вариацию функции $x^\beta f_p(x)$ снизу следующим образом

$$(V_q[x^\beta f_p(x)])^q \geqslant \sum_{k=1}^{n} |t_k^\beta f_p(t_k) - t_{k-1}^\beta f_p(t_{k-1})|^q = \sum_{k=1}^{n} x_k^{\beta q} = \sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{\beta q}{p}} = \sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

а это значит, что $x^\beta f_p(x) \notin BV_q[0,1]$.

Теорема доказана.

Лемма 1. *Пусть функции f и g непрерывны на $[0,1]$, тогда*

$$\nu(f+g,\varepsilon) \leqslant 3\nu(f,\varepsilon) + 3\nu(g,\varepsilon).$$

Доказательство. Покроем график функции $f+g$ так же, как в доказательстве теоремы 3. Тогда

$$\nu(f+g,\varepsilon) \leqslant \sum_{k=1}^{n} d_k = \sum_{k=1}^{n} \Big\lceil \max_{t\epsilon[\frac{k-1}{n};\frac{k}{n}]}(f(t)+g(t)) - \min_{t\epsilon[\frac{k-1}{n};\frac{k}{n}]}(f(t)+g(t))\Big\rceil \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \Big\lceil \max_{t\epsilon[\frac{k-1}{n};\frac{k}{n}]} f(t) - \min_{t\epsilon[\frac{k-1}{n};\frac{k}{n}]} f(t)\Big\rceil + \sum_{k=1}^{n} \Big\lceil \max_{t\epsilon[\frac{k-1}{n};\frac{k}{n}]} g(t) - \min_{t\epsilon[\frac{k-1}{n};\frac{k}{n}]} g(t)\Big\rceil \leqslant$$

$$\leqslant 3\nu(f,\varepsilon) + 3\nu(g,\varepsilon).$$

Следствие. *Если $f \in F_\alpha$ и $g \in F_\alpha$, то и $f+g \in F_\alpha$.*

Теперь покажем точность вложения в теореме 3.

Теорема 5. *Для любых $p > 1$ и $\delta > 0$ найдется непрерывная функция $T \in BV_{p+\delta}[0,1]$ такая, что $T \notin F_{2-\frac{1}{p}}$.*

Доказательство. Положим $T_0(x) = |2x|$ для $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ и продолжим эту функцию периодически с периодом 1. Далее для $k > 1$ положим

$$T_k(x) = \left(\frac{1}{2^{a_k}}\right)^{\frac{1}{p+\frac{\delta}{2}}} T_0(2^{a_k}x),$$

где $\{a_k\}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел, которую мы сейчас определим по индукции. Пусть $a_1 = 2\lceil p + \frac{\delta}{2}\rceil$. Далее, предположим, что уже определены $a_1, ..., a_{m-1}$; выберем a_m так, чтобы оно удовлетворяло условиям (1), (2) и (3):

$$\left(\frac{1}{2^{a_m}}\right)^{\frac{1}{p+\frac{\delta}{2}}} \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^m; \tag{1}$$

нетрудно понять, что

$$\sum_{k=0}^{m-1} T_k \in BV[0,1],$$

тогда по теореме 3

$$\sum_{k=0}^{m-1} T_k \in F_1, \text{ то есть } \nu\left(\sum_{k=0}^{m-1} T_k, \varepsilon\right) \leqslant C_{m-1}\frac{1}{\varepsilon}$$

значит, a_m можно взять таким большим, что

$$\nu\left(\sum_{k=0}^{m-1} T_k, 2^{-a_m}\right) \leqslant \frac{1}{24}(2^{-a_m})^{\frac{1}{p+\frac{\delta}{2}}-2}; \tag{2}$$

кроме того, a_m можно выбрать так, чтобы

$$\left(\frac{1}{2^{a_m}}\right)^{\frac{1}{p+\frac{\delta}{2}}} \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{2^{a_{m-1}}}. \tag{3}$$

Так как элементы последовательности $\{a_k\}$ удовлетворяют (3), то справедливы неравенства

$$\sum_{k=m+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{a_k}}\right)^{\frac{1}{p+\frac{\delta}{2}}} \leqslant \frac{1}{2^{a_m}}, \quad m \geqslant 1,$$

откуда

$$0 \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} T_k(x) \leqslant \frac{1}{2^{a_m}},$$

значит

$$\exists m_0 \geqslant 1\ \forall m \geqslant m_0\ \ \nu\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} T_k, 2^{-a_m}\right) \leqslant 2^{a_m} \leqslant \frac{1}{24}(2^{-a_m})^{\frac{1}{p+\frac{\delta}{2}}-2}; \tag{4}$$

Легко видеть, что $T_k(x)$ – непрерывная периодическая функция с периодом 2^{-a_k} и максимальным значением $\left(2^{a_k}\right)^{\frac{-1}{p+\frac{\delta}{2}}}$. Теперь определим на $[0,1]$ функцию $T(x)$ так:

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{a_k}}\right)^{\frac{1}{p+\frac{\delta}{2}}} T_0(2^{a_k}x).$$

Так как $|T_k(x)| \leqslant 4^{-k}$, то по признаку Вейерштрасса $T(x)$ равномерно сходится на $[0,1]$, а значит функция $T(x)$ непрерывна. (При построении функции $T(x)$ мы частично воспользовались конструкцией из [2, глава 2, пример 21])

Покажем, что $T \in BV_{p+\delta}[0,1]$.

Возьмём произвольное разбиение $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ отрезка $[0,1]$. Имеем

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(T_k(t_i))^{p+\delta}\right)^{\frac{1}{p+\delta}} \leqslant \left(2\cdot 2^{a_k}\left(\frac{1}{2^{a_k}}\right)^{\frac{p+\delta}{p+\frac{\delta}{2}}}\right)^{\frac{1}{p+\delta}} = 2^{\frac{1}{p+\delta}}\left(\frac{1}{2^{a_k}}\right)^{\frac{\delta}{(2p+\delta)(p+\delta)}}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Оценим сверху $V_p(T,\tau)$. Последовательно применяя неравенство Минковского N раз и оценку (5), получаем

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|T(t_i)-T(t_{i-1})|^{p+\delta}\right)^{\frac{1}{p+\delta}} \leqslant 2\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t_i)\right)^{p+\delta}\right)^{\frac{1}{p+\delta}} \leqslant 2\left(\sum_{i=1}^{n}(T_1(t_i))^{p+\delta}\right)^{\frac{1}{p+\delta}} +$$

$$+2\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=2}^{\infty}T_k(t_i)\right)^{p+\delta}\right)^{\frac{1}{p+\delta}} \leqslant \cdots \leqslant 2\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n}(T_k(t_i))^{p+\delta}\right)^{\frac{1}{p+\delta}} + 2\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}T_k(t_i)\right)^{p+\delta}\right)^{\frac{1}{p+\delta}} \leqslant$$

$$\leqslant 4\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2^{a_k}}\right)^{\frac{\delta}{(2p+\delta)(p+\delta)}} + 4n\left(\frac{1}{2^{a_N}}\right)^{\frac{1}{p+\frac{\delta}{2}}}.$$

Можно подобрать N так, чтобы

$$4n\left(\frac{1}{2^{a_N}}\right)^{\frac{1}{p+\frac{\delta}{2}}} \leqslant 1,$$

и так как сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{a_k}}\right)^{\frac{\delta}{(2p+\delta)(p+\delta)}},$$

то мы можем оценить сверху $V_p(T,\tau)$ независимо от разбиения. Значит, мы показали, что $T \in BV_{p+\delta}[0,1]$.

Осталось показать, что $T \notin F_{2-\frac{1}{p}}$.

Возьмём последовательность $\varepsilon_m = 2^{-a_m}$, $m \geqslant m_0$, где m_0 из (4). Оптимально покроем квадратами со стороной ε_m участки графика функции $T_m(x)$ на каждом отрезке вида $[2^{-a_m}(2k), 2^{-a_k}(2k+1)]$, $k = 0,...,(2^{a_k-1}-1)$, таких участков 2^{a_k-1}, а квадратов из покрытия на каждом таком участке

$$\left\lceil \left(2^{-a_m}\right)^{\frac{1}{p+\frac{\delta}{2}}}\varepsilon^{-1}\right\rceil,$$

при этом весь график $T_m(x)$ нельзя покрыть

$$2^{a_k-1}\left\lceil \left(2^{-a_m}\right)^{\frac{1}{p+\frac{\delta}{2}}}\varepsilon^{-1}\right\rceil$$

квадратами, поэтому

$$\nu(T_m,\varepsilon_m) \geqslant \frac{1}{2}(\varepsilon_m)^{-2}\left(2^{-a_m}\right)^{\frac{1}{p+\frac{\delta}{2}}} = \frac{1}{2}(\varepsilon_m)^{\frac{1}{p+\frac{\delta}{2}}-2}. \tag{6}$$

Из неравенств (2), (4) и (6) получим, что

$$\frac{1}{3}\nu(T_m,\varepsilon_m) - \nu\left(\sum_{k=1}^{m-1}T_k,\varepsilon_m\right) - \nu\left(\sum_{k=m+1}^{\infty}T_k,\varepsilon_m\right) \geqslant \frac{1}{12}(\varepsilon_m)^{\frac{1}{p+\frac{\delta}{2}}-2}.$$

По лемме 1

$$\nu(T_m,\varepsilon_m) = \nu\left(\sum_{k=0}^{\infty}T_k - \sum_{k=1}^{m-1}T_k - \sum_{k=m+1}^{\infty}T_k,\varepsilon_m\right) \leqslant 3\nu\left(\sum_{k=1}^{\infty}T_k,\varepsilon_m\right) + 3\nu\left(\sum_{k=1}^{m-1}T_k,\varepsilon_m\right) + 3\nu\left(\sum_{k=m+1}^{\infty}T_k,\varepsilon_m\right),$$

то есть

$$\nu\left(\sum_{k=1}^{\infty}T_k,\varepsilon_m\right) \geqslant \frac{1}{3}\nu(T_m,\varepsilon_m) - \nu\left(\sum_{k=1}^{m-1}T_k,\varepsilon_m\right) - \nu\left(\sum_{k=m+1}^{\infty}T_k,\varepsilon_m\right) \geqslant \frac{1}{12}(\varepsilon_m)^{\frac{1}{p+\frac{\delta}{2}}-2},$$

следовательно $T \notin F_{2-\frac{1}{p}}$. Теорема доказана.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

Список литературы

[1] N.C. Bari. *Trigonometric series.* GIMFL, Moscow, 1961 (in Russian). = Н.К. Бари. *Тригонометрические ряды.* ГИМФЛ, Москва, 1961.

[2] B. Gelbaum, J. Olmsted. *Counterexamples in analysis.* Platon, Volgograd, 1997 (in Russian). = Б. Гелбаум, Дж. Олмстед. *Контрпримеры в анализе.* Волгоград: Платон, 1997.

About classes of functions with a restriction on the fractality of their graphs

Maxim L. Gridnev
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics (Yekaterinburg, Russia)

Keywords: fractal dimension, functions of bounded variation.

We investigate classes of continuous functions with a restriction on the fractal dimension of their graphs. The fractality characteristic of graph of continuous function is given and the classes of functions according to it are determined. The connection between these classes and the classes of functions of generalized bounded variation investigated.