Одностороннее приближение сверху в $L(-1,1)$ характеристической функции интервала алгебраическими многочленами

А. Ю. Торгашова
anastasiya.torgashova@mail.ru

УрФУ (Екатеринбург)

Аннотация

Изучается задача одностороннего приближения сверху в $L(-1,1)$ характеристической функции интервала $J = (-\sqrt{3/5}, 2/5)$ алгебраическими многочленами пятой степени. Задача сводится к приближению снизу характеристической функции множества $[-1, -\sqrt{3/5}) \cup (2/5, 1]$, уже не являющегося промежутком. Для решения последней задачи построена соответствующая квадратурная формула с положительными весами. Приближение снизу в $L(-1,1)$ характеристической функции интервала J многочленами пятой степени было найдено автором ранее.

1 Введение

1.1 Обозначения. Постановка задачи

Пусть $L = L(-1,1)$ есть пространство вещественнозначных суммируемых функций на $(-1,1)$, наделенное нормой

$$\|f\| = \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx, \quad f \in L. \tag{1}$$

При целом $m \geqslant 0$ обозначим через $\mathcal{P}_m$ множество алгебраических многочленов степени не выше m с вещественными коэффициентами. Функции f, измеримой и ограниченной на отрезке $[-1,1]$, сопоставим множества

$$\mathcal{P}_m^-(f) = \{p \in \mathcal{P}_m \colon p \leqslant f\}, \quad \mathcal{P}_m^+(f) = \{p \in \mathcal{P}_m \colon p \geqslant f\}$$

многочленов из $\mathcal{P}_m$, графики которых лежат соответственно под и над графиком функции f. Здесь и в дальнейшем для пары функций f и g, определенных на отрезке $[-1,1]$, неравенство $f \leqslant g$ означает, что $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in [-1,1]$. Рассмотрим величины наилучшего приближения снизу и сверху в пространстве L функции f множеством $\mathcal{P}_m$:

$$E_m^-(f) = \inf\{\|f - p\| \colon p \in \mathcal{P}_m^-(f)\}, \tag{2}$$

$$E_m^+(f) = \inf\{\|f - p\| \colon p \in \mathcal{P}_m^+(f)\}. \tag{3}$$

In: A.A. Makhnev, S.F. Pravdin (eds.): Proceedings of the International Youth School-conference «SoProMat-2017», Yekaterinburg, Russia, 06-Feb-2017, published at http://ceur-ws.org

В данной статье в качестве приближаемых функций будут рассматриваться характеристические функции $\mathbf{1}_J$ множеств $J \subseteq [-1,1]$, определенные соотношениями

$$\mathbf{1}_J(x) = \begin{cases} 1, & x \in J, \\ 0, & x \in [-1,1] \setminus J. \end{cases} \tag{4}$$

В настоящее время имеется большое число результатов, посвященных исследованию задач (2) и (3) для функции (4) в случае, когда J есть промежуток; см. статьи [1, 2, 3] и приведенную в них библиографию. В [2] дано решение задачи (2) для промежутков $J = (a, 1],\ a \in (-1, 1)$. В [3] этот результат распространен на одностороннее приближение характеристических функций промежутков $J = (a, 1],\ a \in (-1, 1)$, в весовых пространствах L с довольно общим весом. В [3] было отмечено, что предложенная авторами методика для интервала $J = (a, b)$ при $b < 1$ уже неприменима. Это было проиллюстрировано в случае

$$a = -\sqrt{\frac{3}{5}} = -0.774597\ldots, \qquad b = \frac{2}{5} \tag{5}$$

при $m = 5$ для L-нормы (1). В работе автора [4] решена задача (2) об одностороннем приближении снизу функции $\mathbf{1}_J$ в этом конкретном случае. В настоящей статье приведено решение соответствующей задачи (3) об одностороннем приближении сверху.

Для любой (измеримой, ограниченной на $[-1, 1]$) функции f, любой константы c, при любом $m \geqslant 0$, очевидно, имеет место равенство

$$E_m^+(f) = E_m^-(c - f). \tag{6}$$

Так что, задача одностороннего приближения сверху сводится к задаче одностороннего приближения снизу. В частности, одностороннее интегральное приближение сверху функции $\mathbf{1}_{J'}$ для интервала $J' = (a, b)$ совпадает с односторонним приближением снизу функции $\mathbf{1}_J = 1 - \mathbf{1}_{J'}$, для множества

$$J = [-1, 1] \setminus J' = [-1, a] \cup [b, 1]\,. \tag{7}$$

Наряду с (7) рассмотрим множество

$$\mathbf{J} = [-1, a) \cup (b, 1]\,. \tag{8}$$

Нетрудно понять, что множества многочленов $\mathcal{P}_m^-(f) = \{p \in \mathcal{P}_m : p \leqslant f\}$ для функций $\mathbf{1}_J$ и $\mathbf{1}_{\mathbf{J}}$ совпадают. Поэтому $E_m^-(\mathbf{1}_J) = E_m^-(\mathbf{1}_{\mathbf{J}})$. Множество (8) не является промежутком, что приводит к особенностям в исследовании задачи (2) для характеристической функции множества (8) в сравнении с такой задачей для промежутка.

В данной работе как раз и изучается задача $E_m^-(\mathbf{1}_{\mathbf{J}})$ для множества (8) со значениями параметров (5) при $m = 5$.

1.2 Редукция задачи

Задачи (2) и (3) можно переписать в несколько иной, более удобной для аналитического и численного исследования, форме. Если $p \in \mathcal{P}_m^-(f)$, то имеем

$$\|f - p\| = \int_{-1}^{1} |f(x) - p(x)|\,dx = \int_{-1}^{1} (f(x) - p(x))\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \int_{-1}^{1} p(x)\,dx.$$

Поэтому

$$E_m^-(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - I_m^-(f), \tag{9}$$

где

$$I_m^-(f) = \sup\left\{ \int_{-1}^{1} p(x)\,dx \colon p \in \mathcal{P}_m^-(f) \right\}. \tag{10}$$

Аналогично, $E_m^+(f) = I_m^+(f) - \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx$, где

$$I_m^+(f) = \inf\left\{\int\limits_{-1}^{1} p(x)\,dx\colon p \in \mathcal{P}_m^+(f)\right\}. \tag{11}$$

Задачи (10) и (11) являются задачами бесконечномерного линейного программирования: в них число неизвестных — коэффициентов многочлена — конечное, а число ограничений бесконечное.

1.3 Применение квадратурных формул с неотрицательными весами

Важным инструментом исследования задач (2), (3) или, то же самое, (10), (11) являются квадратурные формулы с положительными весами, точные на множестве $\mathcal{P}_m$ алгебраических многочленов. Таким формулам посвящены обширные исследования, см. монографию [5], статьи [6, 3] и приведенную в них библиографию.

Следующее утверждение содержится в доказательстве теоремы 2 работы [7]; доказательство варианта теоремы A можно найти в [8, гл. 1, § 1.7, теорема 1.7.5] и [4].

Теорема A. *Предположим, что на множестве $\mathcal{P}_m$ имеет место квадратурная формула*

$$\int\limits_{-1}^{1} p(x)\,dx = \sum_{k=1}^{M} \lambda_k p(x_k), \qquad p \in \mathcal{P}_m, \tag{12}$$

с узлами $-1 \leqslant x_1 < x_2 < \dots < x_M \leqslant 1$ и положительными весами: $\lambda_k > 0,\ 1 \leqslant k \leqslant M$. Тогда для любой ограниченной и измеримой функции $f \in L$ справедливы оценки

$$I_m^-(f) \leqslant \sum_{k=1}^{M} \lambda_k f(x_k); \qquad I_m^+(f) \geqslant \sum_{k=1}^{M} \lambda_k f(x_k).$$

2 Одностороннее приближение снизу характеристической функции множества $\mathbf{J} = \left[-1, -\sqrt{3/5}\right) \cup (2/5, 1]$ многочленами пятой степени

В этом параграфе будут изучаться величины $E_m^-(\mathbf{1_J})$ и $I_m^-(\mathbf{1_J})$ для множества

$$\mathbf{J} = \left[-1, -\sqrt{3/5}\right) \cup (2/5, 1]$$

при $m = 5$. Для краткости будем использовать для них обозначения $\mathbf{E}_5^-$ и $\mathbf{I}_5^-$ соответственно. Ниже будут построены квадратурная формула с неотрицательными весами и многочлен $p_5 \in \mathcal{P}_5^-(\mathbf{1_J})$, которые дадут совпадающие между собой двусторонние оценки этих величин, а значит и их значения.

2.1 Численный эксперимент

С целью выработки гипотезы относительно вида экстремального многочлена и соответствующей квадратурной формулы было проведено приближенное решение задачи (10) для функции $\mathbf{1_J}$ при $m = 5$. Для реализации численного эксперимента оказалось удобным использовать разложение многочленов $p \in \mathcal{P}_m$ в виде линейной комбинации

$$p(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k \pi_k(x)$$

многочленов Лежандра $\{\pi_k\}_{k \geqslant 0}$, ортогональных на $(-1, 1)$ с единичным весом (см. например, [9, гл. IV]). Поскольку $\pi_0 \equiv 1$, то из условия ортогональности многочленов Лежандра следует, что $\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = 2c_0$. Поэтому

$$\mathbf{I}_5^- = \sup\left\{2c_0\colon\ \sum_{k=0}^{5} c_k \pi_k(x) \leqslant \mathbf{1_J}(x),\ x \in [-1, 1]\right\}. \tag{13}$$

Ограничения на отрезке $[-1,1]$ в (13) были заменены ограничениями на густой сетке. Решение полученной задачи с помощью пакета Matlab дало следующие примерные значения коэффициентов: $c_0 = 0.193580$; $c_1 = 0.329033$; $c_2 = 0,673871$; $c_3 = 0.002890$; $c_4 = 0.047953$; $c_5 = -0.416519$. На рисунке изображены графики функции $\mathbf{1_J}$ и найденного многочлена.

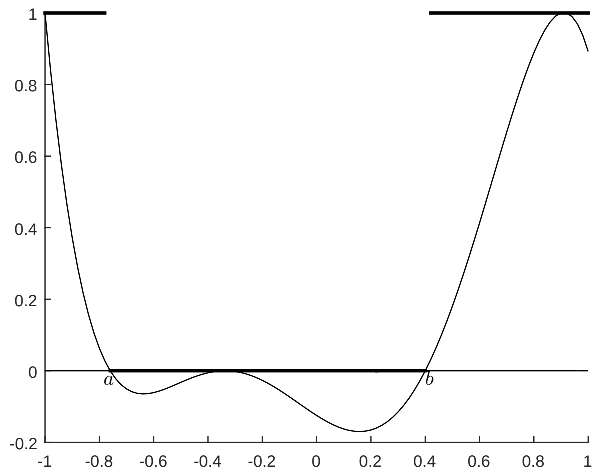

График экстремального многочлена

В результате этого эксперимента сформировалась гипотеза, что для экстремального многочлена задачи (13) точки $a = -\sqrt{3/5}$ и $b = 2/5$ являются простыми нулями, этот многочлен имеет двойной ноль $x_1 \in \left(-\sqrt{3/5}\,, 0\right)$, простой нуль $x_3 > 1$ и достигает максимального значения на отрезке $[-1,1]$, равного 1, в некоторой точке $x_2 \in (2/5, 1)$, а также в точке -1. Как следствие, соответствующая задаче (13) квадратурная формула (12) должна иметь вид

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = \sum_{\ell=1}^{3} A_\ell p(a_\ell) + \sum_{k=1}^{2} B_k p(x_k), \qquad p \in \mathcal{P}_5,$$

с узлами

$$a_1 = -1, \qquad a_2 = a = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \qquad a_3 = b = \frac{2}{5}, \qquad x_1 \in \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\,, 0\right), \qquad x_2 \in \left(\frac{2}{5}\,, 1\right). \tag{14}$$

2.2 Построение точек $x_1,\ x_2,\ x_3$

Осуществим теперь точный выбор узлов $x_1,\ x_2$ и точки x_3. Наложим на узлы $x_1,\ x_2$ и точку x_3 следующие условия.

(1) Выполнены ограничения (14) и ограничение $x_3 > 1$.

(2) Точка x_1 выбирается из условия, что квадратурная формула с фиксированными узлами a_1, a_2, a_3, x_2 и свободным узлом x_1 имела бы максимальный, в данном случае, пятый, алгебраический порядок точности. Это свойство означает, что должно быть выполнено условие ортогональности (см., например, [5, гл. 9, § 1])

$$\int_{-1}^{1} \omega(x)\,dx = 0, \qquad \omega(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-x_1)(x-x_2). \tag{15}$$

(3) Потребуем, чтобы производная многочлена $\overline{p}_5(x) = (x-a_2)(x-a_3)(x-x_3)(x-x_1)^2$ в точке x_2 была равна нулю:

$$\overline{p}_5{}'(x_2) = 0. \tag{16}$$

(4) Потребуем, чтобы совпадали значения многочлена $\overline{p}_5(x)$ в точках a_1 и x_2:

$$\overline{p}_5(x_2) = \overline{p}_5(a_1). \tag{17}$$

При сделанных предположениях многочлен $\overline{p}_5$ после домножения на нормирующий множитель окажется экстремальным.

Условия (15), (16) и (17) образуют систему трех полиномиальных уравнений относительно трех неизвестных x_1, x_2, x_3:

$$\frac{6}{25} + \frac{2}{75}\sqrt{15} - \frac{2}{15}\,x_1 - \frac{2}{25}\sqrt{15}\,x_1 - \frac{2}{15}\,x_2 - \frac{2}{25}\sqrt{15}\,x_2 + \frac{2}{5}\,x_1\,x_2 - \frac{2}{75}\sqrt{15}\,x_1\,x_2 = 0;$$

$$\begin{gathered}\left(x_2 + \frac{1}{5}\sqrt{15}\right)\left(x_2 - \frac{2}{5}\right)(x_2 - x_1)^2 \\ + (x_2 - x_3)\left(x_2 - \frac{2}{5}\right)(x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_3)\left(x_2 + \frac{1}{5}\sqrt{15}\right)(x_2 - x_1)^2 \\ + (2\,x_2 - 2\,x_3)\left(x_2 + \frac{1}{5}\sqrt{15}\right)\left(x_2 - \frac{2}{5}\right)(x_2 - x_1) = 0;\end{gathered} \tag{18}$$

$$\left(x_2 + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\left(x_2 - \frac{2}{5}\right)(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)^2 = -\frac{7}{5}(-1 - x_3)\left(-1 + \frac{1}{5}\sqrt{15}\right)(-1 - x_1)^2. \tag{19}$$

Первое из них можно записать в виде явного выражения x_2 через x_1:

$$x_2 = W(x_1), \quad \text{где} \quad W(z) = -\frac{-9 - \sqrt{15} + 5\,z + 3\sqrt{15}\,z}{5 + 3\sqrt{15} - 15\,z + \sqrt{15}\,z}. \tag{20}$$

Подставив это выражение в (18), можно выразить явно x_3 через x_1:

$$\begin{gathered}x_3 = \frac{U_1(x_1)}{U_2(x_1)}, \quad \text{где } U_1(z) = \frac{1}{5}(16485 + 140550z^2 - 57360z - 25880\sqrt{15}z^3 \\ - 21040\sqrt{15}z + 25545z^4 + 3159\sqrt{15} + 22554\sqrt{15}z^2 - 43720z^3 + 75\sqrt{15}z^4); \\ U_2(z) = 6030\sqrt{15}z^2 - 2440\sqrt{15}z + 1113\sqrt{15}z^4 - 15648z^3 - 32\sqrt{15}z^3 \\ + 893\sqrt{15} - 15272z + 2625 - 1995z^4 + 8862z^2.\end{gathered} \tag{21}$$

При подстановке (20) и (21) в выражение (19) получаем, что x_1 является корнем многочлена одиннадцатой степени

$$H(z)(-21z + 12 + 5\sqrt{15})(-85z + 40 + 13\sqrt{15})^2,$$

где

$$\begin{gathered}H(z) = -36280044675z^8 + 129561147450z^7 + 83973134070\sqrt{15}z^7 \\ - 1401463484190z^6 - 239870661660\sqrt{15}z^6 + 2724305213610z^5 + 870761213330\sqrt{15}z^5 \\ - 4607311500000z^4 - 1049020167712\sqrt{15}z^4 + 3030422326950z^3 + 856064046114\sqrt{15}z^3 \\ - 774569826930z^2 - 176550391084\sqrt{15}z^2 - 342609058890z - 84302075578\sqrt{15}z \\ + 143003290515 + 37239075672\sqrt{15}.\end{gathered}$$

Многочлен H имеет четыре вещественных и четыре комплексных корня. Нас интересует отрицательный вещественный корень. Локализуем этот корень. Рассмотрим точки $z_1 = -0.4$ и $z_2 = -0.3$. Имеем

$$\begin{gathered}H(z_1) = -1.896517908 \cdot 10^{11} - 4.896785856 \cdot 10^{10}\sqrt{15} < 0, \\ H(z_2) = 4.92616539 \cdot 10^{10} + 1.272019016 \cdot 10^{10}\sqrt{15} > 0.\end{gathered}$$

Значит, многочлен H имеет корень на интервале (z_1, z_2), его мы и возьмем в качестве x_1.

Функция W, определенная в (20), убывает по z на полуоси $(-\infty, Z)$, где $Z = \dfrac{5\sqrt{15}+12}{21} > 1$. Поэтому для $x_1 \in (-0.4, -0.3)$ имеем

$$x_2 = W(x_1) \in \bigl(W(-0.3), W(-0.4)\bigr), \tag{22}$$

при этом

$$W(-0.3) = \frac{103\sqrt{15}-228}{191} = 0.8948548\ldots, \qquad W(-0.4) = \frac{-88\sqrt{15}+154}{196} = 0.9264731\ldots.$$

Отношение $U(x_1) = U_1(x_1)/U_2(x_1)$, определенное в (21), убывает на рассматриваемом интервале. А следовательно, $x_3 > U(-0.3) > 1$, что нам и требовалось.

Отметим, что вычисления на компьютере дают следующие значения:

$$x_1 = -0.3278186917\ldots, \qquad x_2 = 0.9039992481\ldots, \qquad x_3 = 1.141897229\ldots.$$

2.3 Исследование экстремальной квадратуры

Рассмотрим интерполяционную квадратурную формулу (см., например, [5, гл. 6, § 1])

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{\ell=1}^{3} A_\ell f(a_\ell) + \sum_{k=1}^{2} B_k f(x_k), \tag{23}$$

построенную по узлам (14) в предположении, что точки x_1, x_2 выбраны на предыдущем этапе рассуждений. В соответствии с выбором точек x_1, x_2, формула (23) точна на множестве $\mathcal{P}_5$ многочленов пятой степени. Коэффициенты формулы (23) строятся с помощью фундаментальных многочленов интерполяционного процесса Лагранжа по узлам квадратурной формулы.

Лемма 1. *Коэффициенты $\{A_\ell\}_{\ell=1}^3$ и $\{B_k\}_{k=1}^2$ квадратурной формулы* (23) *положительные.*

Доказательство. Положительность коэффициента A_2. Рассмотрим квадратуру Лобатто с фиксированными узлами -1, 1 и двумя свободными узлами $\{x_{2,k}\}_{k=1}^2$:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{2} A_{2,k} f(x_{2,k}) + A_{2,3} f(-1) + A_{2,4} f(1), \qquad f \in \mathcal{P}_5. \tag{24}$$

Узлы этой формулы находятся из условия соответствующей ортогональности [5, гл. 9, § 1, теорема 1] и равны

$$x_{2,1} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -0.447213\ldots, \qquad x_{2,2} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.447213\ldots.$$

Коэффициенты квадратурной формулы (24) положительные [5, гл. 7, § 1, теорема 3].

Рассмотрим многочлен пятой степени $g(x) = (x-a_1)(x-a_3)(x-x_1)(x-x_2)(x-1)$. Применив к нему формулы (23) и (24), получаем

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = A_2 g(a_2) = \sum_{k=1}^{2} A_{2,k} g(x_{2,k}).$$

Исходя из (14) и (22), легко понять, что $a_1 = -1 < a_2 < x_1 < a_3 < x_2 < 1$, поэтому $g(a_2) > 0$. При этом

$$a_1 < x_{2,1} < x_1, \qquad a_3 < x_{2,2} < x_2. \tag{25}$$

В силу (25) имеем $g(x_{2,1}) > 0$, $g(x_{2,2}) > 0$. Из этого вытекает, что $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)\,dx > 0$. Тем самым доказана положительность коэффициента A_2.

Положительность коэффициентов A_1, A_3, B_1, B_2 доказывается по такой же схеме, только вместо квадратурной формулы Лобатто используется квадратурная формула Гаусса

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{3} A_{3,k} f(x_{3,k}), \quad f \in \mathcal{P}_5,$$

с тремя узлами $\{x_{3,k}\}_{k=1}^{3}$, а вместо многочлена g — соответственно многочлены

$$\begin{aligned} g_1(x) &= (x-x_1)(x-x_2)(x-a_2)(x-a_3)x, \\ g_2(x) &= (x-x_1)(x-x_2)(x-a_1)(x-a_2)x, \\ g_3(x) &= (x-x_2)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)x, \\ g_4(x) &= (x-x_1)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)x. \end{aligned}$$

Аналогичное рассуждение применялось при обосновании соответствующего утверждения в [4]. Лемма доказана.

2.4 Основной результат

Теорема 1. *Пусть* $m = 5$, $a = -\sqrt{3/5}$, $b = 2/5$, $\mathbf{J} = [-1, a) \cup (b, 1]$. *Тогда*

$$I_m^-(\mathbf{1_J}) = A_1 + B_2, \qquad E_m^-(\mathbf{1_J}) = (a+1) + (1-b) - A_1 - B_2, \tag{26}$$

где A_1 *и* B_2 *— коэффициенты квадратурной формулы* (23). *При этом многочлен пятой степени*

$$p_5^*(x) = \frac{\overline{p}_5(x)}{\overline{p}_5(x_2)}, \qquad \overline{p}_5(x) = (x-a)(x-b)(x-x_3)(x-x_1)^2, \tag{27}$$

является многочленом наилучшего приближения снизу функции $\mathbf{1_J}$; *этот многочлен интерполирует функцию* $\mathbf{1_J}$ *в узлах квадратурной формулы* (23).

Доказательство. Исходя из выбора узлов x_1, x_2 и точки x_3, нетрудно понять, что многочлен (27) удовлетворяет условию $p_5^* \leqslant \mathbf{1_J}$. Этот многочлен дает оценку снизу для величины $\mathbf{I}_5^-$. Применяя теорему A, получим, что квадратурная формула (23) дает для величины $\mathbf{I}_5^-$ оценку сверху, которая, как легко увидеть, совпадает с оценкой снизу. При этом многочлен (27) является экстремальным. Правая часть формулы (23), примененной к многочлену p_5^*, равна $A_1 + B_2$. Следовательно, $\mathbf{I}_5^- = A_1 + B_2$. Для обоснования второго равенства в (26) осталось применить (9). Теорема доказана.

В силу соотношения (6) имеет место равенство $E_m^+(\mathbf{1}_{(a,\,b)}) = E_m^-(\mathbf{1_J})$. Кроме того, как можно заметить, $E_m^+(\mathbf{1}_{(a,\,b)}) = E_m^+(\mathbf{1}_{[a,\,b]})$. Поэтому, вместе с теоремой 1, справедливо такое утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $m = 5$, $a = -\sqrt{3/5}$, $b = 2/5$. *Тогда*

$$E_m^+(\mathbf{1}_{(a,\,b)}) = E_m^+(\mathbf{1}_{[a,\,b]}) = (b-a) - A_1 - B_2.$$

При этом многочленом наилучшего приближения сверху для функций $\mathbf{1}_{[a,\,b]}$ *и* $\mathbf{1}_{(a,\,b)}$ *является многочлен пятой степени* $1 - p_5^*$, *который интерполирует функцию* $\mathbf{1}_{[a,\,b]}$ *в узлах квадратурной формулы* (23).

Благодарности

Автор признателен своему научному руководителю М. В. Дейкаловой за постановку задачи и полезное обсуждение результатов исследования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-9356.2016.1) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Список литературы

[1] A. G. Babenko, Yu. V. Kryakin, V. A. Yudin. One-sided approximation in L of the characteristic function of an interval by trigonometric polynomials. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 280(Suppl. 1):39–52, 2013. = А.Г. Бабенко, Ю.В. Крякин, В.А. Юдин. Одностороннее приближение в L характеристической функции интервала тригонометрическими полиномами. *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, 18(1):82–95, 2012.

[2] J. Bustamante, R. Martínez-Cruz, J.M. Quesada, Quasi orthogonal Jacobi polynomials and best one-sided L_1 approximation to step functions. *J. Approx. Theory*, 198:10–23, 2015.

[3] A. G. Babenko, M. V. Deikalova, Sz. G. Révész. Weighted one-sided integral approximations to characteristic functions of intervals by polynomials on a closed interval. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 297(Suppl. 1):S11–S18, 2017. = А.Г. Бабенко, М.В. Дейкалова, С.Д. Ревес. Односторонние интегральные приближения характеристических функций интервалов многочленами на отрезке с весом. *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, 21(4):46–53, 2015.

[4] A. Yu. Torgashova. One-sided integral approximation of the characteristic function of an interval by algebraic polynomials. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 296(Suppl. 1):S228-S235, 2017. = А.Ю. Торгашова. Одностороннее интегральное приближение характеристической функции интервала алгебраическими многочленами. *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, 22(3):265–272, 2016.

[5] V. I. Krylov. *Approximate calculation of integrals.* Dover, New York, 2005. = В.И. Крылов. *Приближенное вычисление интегралов.* Физматгиз, Москва, 1959.

[6] B. Beckermann, J. Bustamante, R. Martínez-Cruz, J. M. Quesada. Gaussian, Lobatto and Radau positive quadrature rules with a prescribed abscissa. *Calcolo*, 51(2):319–328, 2014.

[7] R. Bojanic, R. DeVore. On polynomials of best one-sided approximation. *Enseign. Math.*, 2(12):139–164, 1966.

[8] N. P. Korneichuk, A. A. Ligun, V. G. Doronin. *Approximation with constraints.* Naukova Dumka, Kiev, 1982 (in Russian). = Н.П. Корнейчук, А.А. Лигун, В.Г. Доронин. *Аппроксимация с ограничениями.* Наукова думка, Киев, 1982.

[9] P. K. Suetin. *Classical orthogonal polynomials.* Nauka, Moscow, 1976 (in Russian). = П.К. Суетин. *Классические ортогональные многочлены.* Наука, Москва, 1976.

One-sided approximation to the characteristic function of an interval from above by algebraic polynomials in $L(-1,1)$

Anastasiya Yu. Torgashova
Ural Federal University (Yekaterinburg, Russia)

Keywords: algebraic polynomials, one-sided approximation, characteristic function of an interval.

We study the problem of one-sided approximation to the characteristic function of the interval $J = (-\sqrt{3/5}\,, 2/5)$ from above by fifth-degree algebraic polynomials in $L(-1,1)$. This problem reduces to the approximation from below to the characteristic function of the set $[-1,-\sqrt{3/5}) \cup (2/5,1]$, which is not an interval. To solve the latter problem, we construct the corresponding quadrature formula with positive weights. The approximation to the characteristic function of the interval J from below by fifth-degree polynomials in $L(-1,1)$ was found by the author earlier.