Исследование коэффициентов тригонометрического полинома при двусторонних ограничениях

Д.О. Зыков
mitya130@mail.ru

Институт естественных наук и математики УрФУ (Екатеринбург)

Аннотация

В данной статье исследуются наибольшие и наименьшие значения коэффициентов тригонометрических полиномов при условии, что полиномы ограничены сверху и снизу непрерывными 2π-периодическими функциями. Исследование наибольших и наименьших значений коэффициентов нечётных тригонометрических полиномов, ограниченных сверху на отрезке $[0, 2\pi]$ функцией $\varphi(x) = x$, было проведено в более ранней работе автора [6].

1 Постановка задачи. Основной результат

Пусть u и v – две непрерывные 2π-периодические функции, удовлетворяющие всюду на оси $\mathbb{R}$ (или, что то же самое, на периоде $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$) условию $u < v$. При $n \geqslant 1$ обозначим через $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}_n(u, v)$ множество тригонометрических полиномов

$$f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

порядка n с вещественными коэффициентами, которые удовлетворяют ограничениям

$$u(x) \leqslant f_n(x) \leqslant v(x), \qquad -\pi \leqslant x \leqslant \pi. \tag{2}$$

Нетрудно понять, что, по крайней мере, при достаточно большом n множество $\mathfrak{F}_n$ не пусто; обозначим через $n^* = n^*(u, v)$ неотрицательное целое число со свойством, что при $n \geqslant n^*$ множество $\mathfrak{F}_n$ не пусто.

Основной вопрос, который нас интересует: какие значения могут принимать коэффициенты тригонометрических полиномов из множества $\mathfrak{F}_n$? Точнее, нас интересуют следующие величины:

$$\begin{aligned} A_n^+(k) &= \sup\{a_k(f_n)\colon f_n \in \mathfrak{F}_n\}, \qquad & A_n^-(k) &= \inf\{a_k(f_n)\colon f_n \in \mathfrak{F}_n\}, \\ B_n^+(k) &= \sup\{b_k(f_n)\colon f_n \in \mathfrak{F}_n\}, \qquad & B_n^-(k) &= \inf\{b_k(f_n)\colon f_n \in \mathfrak{F}_n\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Величины $A_n^+(k)$ и $B_n^+(k)$, очевидно, по n не убывают, а величины $A_n^-(k)$ и $B_n^-(k)$ не возрастают. В следу-

Copyright © by the paper's authors. Copying permitted for private and academic purposes.

In: A.A. Makhnev, S.F. Pravdin (eds.): Proceedings of the International Youth School-conference «SoProMat-2017», Yekaterinburg, Russia, 06-Feb-2017, published at http://ceur-ws.org

ющей теореме будут выписаны экстремальные значения

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^+(k) &= \sup\{A_n^+(k)\colon n \geqslant n^*\} = \lim_{n\to\infty} A_n^+(k),\\
\mathcal{A}^-(k) &= \inf\{A^-n(k)\colon n \geqslant n^*\} = \lim_{n\to\infty} A_n^-(k),\\
\mathcal{B}^+(k) &= \sup\{B_n^+(k)\colon n \geqslant n^*\} = \lim_{n\to\infty} B_n^+(k),\\
\mathcal{B}^-(k) &= \inf\{B_n^-(k)\colon n \geqslant n^*\} = \lim_{n\to\infty} B^-n(k)
\end{aligned} \tag{4}$$

величин (3). Для функции χ, определенной на числовой оси, обозначим через χ_+ и χ_- ее положительную и отрицательную срезки: $\chi_+ = \max\{\chi, 0\}$, $\chi_- = \min\{\chi, 0\}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Величины* (4) *имеют следующие значения*:

$$\mathcal{A}^+(k) = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} v(x)\cos_+(kx)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} u(x)\cos_-(kx)\,dx\right),$$

$$\mathcal{A}^-(k) = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} v(x)\cos_-(kx)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} u(x)\cos_+(kx)\,dx\right),$$

$$\mathcal{B}^+(k) = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} v(x)\sin_+(kx)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} u(x)\sin_-(kx)\,dx\right),$$

$$\mathcal{B}^-(k) = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} v(x)\sin_-(kx)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} u(x)\sin_+(kx)\,dx\right).$$

К настоящему времени экстремальным задачам для тригонометрических полиномов, в частности, для полиномов с ограничениями на их значения, посвящено немалое число исследовательских работ (см., к примеру, [1, 2, 3, 4, 5] и приведенную там библиографию). В работе автора [6] изучены аналоги величин $\mathcal{B}_n^+(k)$, $\mathcal{B}_n^-(k)$ на множестве нечетных тригонометрических полиномов f_n, удовлетворяющих ограничению $f_n(x) \leqslant x$, $x \in (0, 2\pi)$. Эта работа, в свою очередь, представляет собой развите идей, содержащихся в статье автора [7], в которой были рассмотрены границы второго коэффициента для множества нечётных тригонометрических полиномов.

Утверждения теоремы 1 содержатся в приведенных ниже теореме 2 и ее следствии.

2 Более общая задача

Пусть $L_{2\pi}$ есть пространство вещественнозначных, измеримых, 2π-периодических функций, суммируемых на произвольном отрезке длины 2π, наделенное нормой

$$\|f\|_{L_{2\pi}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx, \qquad f \in L_{2\pi}.$$

Обозначим через $L_{2\pi}^\infty$ пространство вещественнозначных, измеримых, 2π-периодических, существенно ограниченных функций f, наделенное нормой

$$\|f\|_{L_{2\pi}^\infty} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)|:\ x \in \mathbb{R}\}, \qquad f \in L_{2\pi}^\infty.$$

С помощью некоторой функции $\eta \in L_{2\pi}$ определим на $L_{2\pi}^\infty$ функционал

$$I(f) = I(f, \eta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\eta(x)\,dx. \tag{5}$$

Рассмотрим более общую в сравнении с (3) задачу о наибольшем значении на множестве $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}_n(u, v)$ функционала (5) для фиксированной функции $\eta \in L_{2\pi}$. Более точно, нас интересуют при $n \geqslant n^* = n^*(u, v)$ величины

$$E_n^+(\eta) = E_n^+(\eta; u, v) = \sup\{I(f_n, \eta) \colon f_n \in \mathfrak{F}_n\} \tag{6}$$

и их экстремальное значение

$$\mathcal{E}^+(\eta) = \mathcal{E}^+(\eta; u, v) = \sup\{E_n^+(\eta; u, v) \colon n \geqslant n^*\} = \lim_{n\to\infty} E_n^+(\eta). \tag{7}$$

По функции η определим на оси 2π-периодическую функцию f^+ соотношением

$$f^+(x) = \begin{cases} v(x), & \eta(x) > 0; \\ (v(x) + u(x))/2, & \eta(x) = 0; \\ u(x), & \eta(x) < 0. \end{cases} \tag{8}$$

Согласно следующей теореме, в некотором смысле функция (8) является экстремальной в задаче (7). Отметим на будущее, что с помощью срезок $\eta_+ = \max\{\eta, 0\}$, $\eta_- = \min\{\eta, 0\}$ функции η функционал (5) для функции (8) принимает вид

$$I(f^+, \eta) = \int_{-\pi}^{\pi} u(x)\, \eta_-(x)\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} v(x)\, \eta_+(x)\, dx.$$

Теорема 2. *Для любой функции* $\eta \in L_{2\pi}$ *величина* (7) *имеет следующее значение*:

$$\mathcal{E}^+(\eta) = \int_{-\pi}^{\pi} u(x)\, \eta_-(x)\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} v(x)\, \eta_+(x)\, dx.$$

Доказательство. Если тригонометрический полином f_n принадлежит множеству $\mathfrak{F}_n$, т. е. удовлетворяет ограничениям (2), то имеем

$$I(f_n) = \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)\, \eta(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)(\eta_-(x) + \eta_+(x))\, dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)\, \eta_-(x)\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)\, \eta_+(x)\, dx \quad \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} u(x)\, \eta_-(x)\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} v(x)\, \eta_+(x)\, dx = I(f^+, \eta).$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\mathcal{E}^+(\eta) \leqslant I(f^+, \eta). \tag{9}$$

Получим теперь для величины $\mathcal{E}^+(\eta)$ такую же оценку снизу. Возьмем такое малое число $\varepsilon > 0$, что $v - \varepsilon > u + \varepsilon$. Определим на оси вспомогательную функцию

$$f^{\varepsilon}(x) = \begin{cases} v(x) - \varepsilon, & \eta(x) > 0; \\ (v(x) + u(x))/2, & \eta(x) = 0; \\ u(x) + \varepsilon, & \eta(x) < 0; \end{cases}$$

Функция f^{ε}, очевидно, удовлетворяет ограничениям

$$u(x) + \varepsilon \leqslant f^{\varepsilon}(x) \leqslant v(x) - \varepsilon, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Функция f^{ε} в общем случае разрывная; с помощью стандартной процедуры сгладим ее. Обозначим через $\varphi_\delta,\ \delta > 0$, функцию Соболева со следующими свойствами: функция φ_δ определена, неотрицательная, четная, бесконечно дифференцируемая на $\mathbb{R}$, ее носитель лежит на отрезке $[-\delta, \delta]$ и, наконец,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\delta(x) dx = \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_\delta(x) dx = 1.$$

С её помощью зададим на оси вспомогательную функцию $f_\delta = f_\delta^\varepsilon$ в виде свертки

$$f_\delta(x) = (f^{\,\varepsilon} * \varphi_\delta)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\,\varepsilon}(t)\, \varphi_\delta(t-x)\, dt = \int\limits_{-\delta}^{\delta} f^{\,\varepsilon}(t+x)\, \varphi_\delta(t)\, dt. \tag{11}$$

В силу (10) для функции (11) имеем

$$\begin{aligned} f_\delta(x) &= \int\limits_{-\delta}^{\delta} f^{\,\varepsilon}(t+x)\, \varphi_\delta(t)\, dt \leqslant \int\limits_{-\delta}^{\delta} (v(t+x)-\varepsilon)\, \varphi_\delta(t)\, dt = \int\limits_{-\delta}^{\delta} v(t+x)\, \varphi_\delta(t)\, dt - \varepsilon, \\ f_\delta(x) &= \int\limits_{-\delta}^{\delta} f^{\,\varepsilon}(t+x)\, \varphi_\delta(t)\, dt \geqslant \int\limits_{-\delta}^{\delta} (u(t+x)+\varepsilon)\, \varphi_\delta(t)\, dt = \int\limits_{-\delta}^{\delta} u(t+x)\, \varphi_\delta(t)\, dt + \varepsilon. \end{aligned} \tag{12}$$

Функции u и v непрерывные на $\mathbb{R}$ и 2π-периодические, поэтому равномерно непрерывные на $\mathbb{R}$. Следовательно, существует $\overline{\delta} > 0$ такое, что для любой пары точек $x', x'' \in \mathbb{R}$ со свойством $|x' - x''| < \overline{\delta}$ выполняются неравенства $|u(x') - u(x'')| < \varepsilon/2,\ |v(x') - v(x'')| < \varepsilon/2$. Отсюда и из оценок (12) для функции f_δ заключаем, что если $0 < \delta < \overline{\delta}$, то всюду на $\mathbb{R}$

$$u(x) + \frac{\varepsilon}{2} < f_\delta(x) < v(x) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13}$$

Функция f_δ бесконечно дифференцируемая (и 2π-периодическая). Поэтому ряд Фурье этой функции сходится к ней равномерно. Следовательно, существует такое N, что при $n > N$ на всей оси для разности между функцией f_δ и частичными суммами $S_n(x) = S_n(x; f_\delta)$ порядка n ряда Фурье функции f_δ выполняется оценка

$$|f_\delta(x) - S_n(x)| < \varepsilon/2. \tag{14}$$

Из (14) и (13) вытекает, что при $n > N$ (тригонометрический полином) S_n удовлетворяет ограничениям (2), т. е. принадлежит множеству $\mathfrak{F}_n$. Следовательно, если $n > N$, то для величины (6) справедлива оценка снизу $E_n^+(\eta) \geqslant I(S_n, \eta)$. Поскольку последовательность $\{S_n\}$ сходится к функции f_δ равномерно, то

$$I(S_n, \eta) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} S_n(t)\, \eta(t)\, dt \longrightarrow \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\delta(t)\, \eta(t)\, dt = I(f_\delta, \eta), \qquad n \to \infty.$$

Отсюда заключаем, что для величины (7) справедлива оценка снизу

$$\mathcal{E}^+(\eta) \geqslant I(f_\delta, \eta), \qquad 0 < \delta < \overline{\delta}. \tag{15}$$

Убедимся, что если $\delta \to +0$, то

$$I(f_\delta, \eta) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\delta(t)\, \eta(t)\, dt \longrightarrow I(f^\varepsilon, \eta) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^\varepsilon(t)\, \eta(t)\, dt. \tag{16}$$

В самом деле, имеем

$$I(f_\delta, \eta) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_\delta(x)\, \eta(x)\, dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\int\limits_{-\delta}^{\delta} f^{\,\varepsilon}(t+x)\, \varphi_\delta(t)\, dt \right) \eta(x)\, dx.$$

В последнем двойном интеграле сменим порядок интегрирования, заменим переменную интегрирования x на $y = x + t$ и еще раз сменим порядок интегрирования:

$$I(f_\delta, \eta) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\int\limits_{-\delta}^{\delta} f^{\,\varepsilon}(t+x)\, \varphi_\delta(t)\, dt \right) \eta(x)\, dx = \int\limits_{-\delta}^{\delta} \varphi_\delta(t) \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\,\varepsilon}(t+x)\, \eta(x)\, dx\, dt$$

$$= \int\limits_{-\delta}^{\delta} \varphi_\delta(t) \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\,\varepsilon}(y)\,\eta(y-t)\,dy\,dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\,\varepsilon}(y) \int\limits_{-\delta}^{\delta} \varphi_\delta(t)\,\eta(y-t)\,dt\,dy.$$

В результате получено представление

$$I(f_\delta, \eta) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{\,\varepsilon}(y)\,\eta_\delta(y)\,dy, \tag{17}$$

в котором

$$\eta_\delta(y) = \int\limits_{-\delta}^{\delta} \varphi_\delta(t)\,\eta(y-t)\,dt = \int\limits_{-\delta}^{\delta} \varphi_\delta(t)\,\eta(y+t)\,dt. \tag{18}$$

Известно (см., например, [8, гл. I, § 1]), что свертка (18) при $\delta \to +0$ сходится в пространстве $L_{2\pi}$ к функции η. Поэтому представление (17) влечет свойство (16). Неравенство (15) в пределе при $\delta \to +0$ принимает вид

$$\mathcal{E}^+(\eta) \geqslant I(f^\varepsilon, \eta) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (u(x)+\varepsilon)\,\eta_-(x)\,dx + \int\limits_{-\pi}^{\pi} (v(x)-\varepsilon)\,\eta_+(x)\,dx.$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \to +0$, получаем оценку снизу

$$\mathcal{E}^+(\eta) \geqslant I(f^+, \eta),$$

совпадающую с оценкой сверху (9). Теорема 2 доказана.

Наряду с (6) и (7) рассмотрим величины

$$E_n^-(\eta) = E_n^-(\eta; u, v) = \inf\{I(f_n, \eta) \colon f_n \in \mathfrak{F}_n\}, \qquad n \geqslant n^*,$$

$$\mathcal{E}^-(\eta) = \mathcal{E}^-(\eta; u, v) = \inf\{E_n^-(\eta; u, v) \colon n \geqslant n^*\} = \lim_{n\to\infty} E_n^-(\eta). \tag{19}$$

Следствие 1. *Для любой функции $\eta \in L_{2\pi}$ величина* (19) *имеет следующее значение*:

$$\mathcal{E}^-(\eta) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} u(x)\,\eta_+(x)\,dx + \int\limits_{-\pi}^{\pi} v(x)\,\eta_-(x)\,dx.$$

В самом деле, для полинома $f_n \in \mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}_n(u, v)$ имеем $I(f_n, \eta) = -I(f_n, -\eta)$. Отсюда заключаем, что $\mathcal{E}^-(\eta; u, v) = -\mathcal{E}^+(-\eta; u, v)$. Согласно теореме 2

$$\mathcal{E}^+(-\eta) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} u(x)(-\eta)_-(x)\,dx + \int\limits_{-\pi}^{\pi} v(x)(-\eta)_+(x)\,dx.$$

Далее, имеем

$$(-\eta)_- = \min(0, -\eta) = -\max(0, \eta) = -\eta_+, \qquad (-\eta)_+ = \max(0, -\eta) = -\min(0, \eta) = -\eta_-.$$

Следовательно,

$$\mathcal{E}^+(-\eta) = -\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} u(x)\,\eta_+(x)\,dx + \int\limits_{-\pi}^{\pi} v(x)\,\eta_-(x)\,dx \right).$$

Тем самым утверждение следствия проверено.

3 Доказательство теоремы 1

Для коэффициентов тригонометрического полинома (1) имеют место формулы

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_n(x)\cos kx\,dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_n(x)\sin kx\,dx.$$

Они являются значениями функционала (5) в случае, когда η есть соответственно функция

$$\frac{1}{\pi}\cos kx, \qquad \frac{1}{\pi}\sin kx.$$

Утверждения теоремы 2 и следствия для этих двух функций дают утверждения теоремы 1.

Благодарности

Автор благодарит своего научного руководителя профессора В. В. Арестова за полезное обсуждение результатов исследования.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-02705), Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-9356.2016.1) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Список литературы

[1] G. Pólya, G. Szegö. *Problems and Theorems in Analysis. Vol. 1, 2.* Springer, Berlin, 1972. = Г. Полиа, Г. Сеге. *Задачи и теоремы из анализа. Т. 1, 2.* Наука, Москва, 1978.

[2] L. Fejer. Uber trigonometrische Polynome. *J. Angew. Math.*, 146:53–82, 1915.

[3] E. V. Egervary, O. Szasz. Einige Extremalprobleme im Bereiche der trigonometrischen Polynome. *Mathematische Zeitschrift.* 27:641–652, 1928.

[4] V. V. Arestov, V. P. Kondrat'ev. Certain extremal problem for nonnegative trigonometric polynomials. *Mathematical Notes.* 47(1):10–20, 1990. = В.В. Арестов, В.П. Кондратьев. Об одной экстремальной задаче для неотрицательных тригонометрических полиномов. *Математические заметки.* 47(1):15–28, 1990.

[5] V. V. Arestov, V. V. Mendelev. Trigonometric polynomials of least deviation from zero in measure and related problems. *J. Approx. Theory.* 162:1852–1878, 2010.

[6] D. O. Zykov. Sharp estimates for coefficients of odd trigonometric polynomials under one-sided constraint. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 297(Suppl. 1):S1–S9, 2017. = Д.О. Зыков. Точные оценки коэффициентов нечетного тригонометрического полинома при одностороннем ограничении. *Труды Ин-та матем. мех. УрО РАН.* 22(3):130–136, 2016.

[7] D. O. Zykov. Investigation of the second coefficients of trigonometric polynomials under a one-sided constraint. *Proceedings of the 47th International Youth School-conference "Modern Problems in Mathematics and its Applications", Yekaterinburg, Russia, CEUR-WS*, 1662:179-185, 2016 (in Russian). = Д.О. Зыков. Исследование второго коэффициента нечетного тригонометрического полинома при одностороннем ограничении. *Труды 47-й международной молодежной школы-конференции «СоПроМат-2016», Екатеринбург, CEUR-WS*, 1662:179-185, 2016.

[8] E. M. Stein, G. Weiss. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton Univ. Press, Princeton, 1971. = И. Стейн, Г. Вейс. *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.* Мир, Москва, 1974.

Investigation of coefficients of trigonometric polynomials under two-sided constraints

Dmitry O. Zykov
Ural Federal University (Yekaterinburg, Russia)

Keywords: trigonometric polynomials, two-sided constraints, coefficients.

We study the largest and the smallest values of coefficients of trigonometric polynomials bounded from below and above by continuous 2π-periodic functions. A similar problem for coefficients of odd trigonometric polynomials bounded from above by the function $\varphi(x) = x$ on the interval $[0, 2\pi]$ was studied by the author earlier in [6].