# Процедура построения сингулярного множества для решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана

А.С. Родин
alexey.rodin.ekb@gmail.com

ИМКН, УрФУ (Екатеринбург)
ИММ УрО РАН (Екатеринбург)

**Аннотация**

Рассматривается краевая задача Коши уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана. Предполагается, что решение данной задачи содержится в классе кусочно-гладких функций. Рассматривается случай, когда гамильтониан зависит только от импульсной переменной и является непрерывно-дифференцируемой функцией, как и краевая функция. Предложена процедура построения сингулярного множества с помощью характеристик уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана и условия Ранкина–Гюгонио. Метод продемонстрирован на классическом примере.

## 1 Введение

Знание множества точек недифференцируемости обобщенного решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана является очень важным инструментом для построения этого решения. В данной статье предложен алгоритм нахождения сингулярного множества по краевым значениям характеристик. Этот алгоритм позволяет находить сингулярное множество не выпуская множество характеристик с краевого многообразия.

## 2 Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу Коши для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} + H(D_x\varphi(t,x)) = 0, \quad \varphi(T,x) = \sigma(x), \tag{1}$$

где $t \in [0,T]$, $x \in R$, $D_x\varphi(t,x) = \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x} = s$.

Обозначим $\Pi_T = \{(t,x) : t \in [0,T], x \in R\}$.

Задача (1) рассматривается при следующих предположениях:

A1. Функция $H(s)$ непрерывно дифференцируема и вогнута по переменной $s$.

A2. Функция $D_sH(s)$ является локально липшицевой по $s$, для любого компакта $D \subset R$ существует константа $L > 0$:

$$|D_sH(s') - D_sH(s'')| \le L \cdot |s' - s''|,$$



In: A.A. Makhnev, S.F. Pravdin (eds.): Proceedings of the International Youth School-conference «SoProMat-2017», Yekaterinburg, Russia, 06-Feb-2017, published at http://ceur-ws.org

для любых $s'$, $s'' \in D$.

A3. Выполнены условия подлинейного роста: существует такое $\alpha > 0$, что выполняются условия

$$|D_s H(s)| \le \alpha \cdot (1 + |s|),$$

для любого $s \in R$.

A4. Функция $\sigma(x)$ непрерывно дифференцируема.

Целью работы является изучение структуры решения $\varphi(\cdot)$ задачи (1).

# 3 Основные определения и утверждения

## 3.1 Метод характеристик Коши. Классическое решение

При указанных предположениях классическое решение задачи (1) $\varphi(\cdot)$ может, в общем случае, существовать лишь локально в некоторой окрестности краевого многообразия

$$C^T = \{(t, x, z) : t = T, x = \xi, z = \sigma(\xi); \quad \xi \in R\}.$$

Это решение $\varphi(\cdot)$ может быть построено с помощью метода характеристик Коши [3]. Выпишем характеристическую систему с краевыми условиями при $t = T$ для задачи (1):

$$\dot{\tilde{x}} = D_s H(\tilde{s}), \quad \dot{\tilde{s}} = -D_x H(\tilde{s}) = 0, \quad \dot{\tilde{z}} = \tilde{s} \cdot D_s H(\tilde{s}) - H(\tilde{s}), \tag{2}$$

$$\tilde{x}(T, \xi) = \xi, \quad \tilde{s}(T, \xi) = D_x \sigma(\xi), \quad \tilde{z}(T, \xi) = \sigma(\xi), \quad \forall \xi \in R. \tag{3}$$

Решения $\tilde{x}$, $\tilde{s}$, $\tilde{z}$ называются, соответственно, фазовыми, импульсными, ценовыми компонентами характеристик уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана (1).

Заметим, что при выполнении условий A1–A4 решение характеристической системы существует, единственно и продолжимо на отрезок $[0, T]$, для $\xi \in R$.

Согласно методу Коши [3] при условии, что якобиан $\frac{\partial \tilde{x}(t,\xi)}{\partial (t,\xi)}$ отличен от нуля, справедливы формулы

$$x = \tilde{x}(t, \xi), \quad \varphi(t, x) = \tilde{z}(t, \xi), \quad D_x \varphi(t, x) = \tilde{s}(t, \xi).$$

## 3.2 Обобщенное решение

В дальнейшем будут рассматриваться неклассические, негладкие решения задачи (1), для описания которых используется следующий инструмент негладкого анализа [4].

**Определение 1** *Супердифференциалом функции $\varphi(\cdot) : \Pi_T \to R$ в точке $(t_0, x_0)$ называется множество*

$$D^+\varphi(t_0, x_0) = co\{(\alpha, s) \in R^2 : \limsup_{t \to t_0, x \to x_0} \frac{\varphi(t, x) - \varphi(t_0, x_0) - \langle (\alpha, s), (\Delta t, \Delta x) \rangle}{|\Delta t| + |\Delta x|} \le 0\}.$$

Символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение. В точках дифференцируемости функции $\varphi(\cdot)$ супердифференциал состоит из единственного элемента, градиента этой функции.

Напомним одно из определений обобщённого решения задачи (1) [1, 2].

**Определение 2** *Обобщенным решением задачи (1) называется локально липшицевая супердифференцируемая функция $\Pi_T \ni (t, x) \mapsto \varphi(t, x) \in R$ такая, что для любой точки $(t_0, x_0) \in \Pi_T$ существует $\xi_0 \in R$ и решения системы (2),(3) $\tilde{x}(\cdot, \xi_0)$, $\tilde{s}(\cdot, \xi_0)$, $\tilde{z}(\cdot, \xi_0)$, удовлетворяющие условию*

$$\tilde{x}(t_0, \xi_0) = x_0, \quad \tilde{z}(t_0, \xi_0) = \varphi(t_0, x_0) \quad и \quad \tilde{z}(t, \xi_0) = \varphi(t, \tilde{x}(t, \xi_0)), \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Из результатов работ [1, Определение 1.20; 2, §1.2; 5, §5.1; 6, Theorem I.10; 7, §1.1] вытекает следующее утверждение о связи определения 2 с определениями минимаксного [5, §5.1] и вязкостного решений [6].

**Утверждение 1** *Если в задаче (1) выполнены условия A1–A4, то существует и единственно обобщенное решение задачи (1) в смысле определения 2, причем определение 2 эквивалентно определениям минимаксного и вязкостного решений задачи (1).*

Заметим, что в случае, когда гамильтониан является выпуклым, обобщенное решение является субдифференцируемой функцией.

### 3.3 Сингулярное множество

Напомним определение сингулярного множества для обобщенного решения $\varphi(\cdot)$ задачи (1).

**Определение 3** *Сингулярным множеством $Q$ для обобщенного решения $\varphi(\cdot)$ задачи (1) называется множество точек $(t,x) \in \Pi_T$, в которых функция $\varphi$ недифференцируема.*

Согласно работ [1, §5.2.4; 2, §1.2], справедливы следующие утверждения

**Утверждение 2** *Пусть в задаче (1) выполнены условия A1–A4. Для того чтобы точка $(t,x)$ принадлежала $Q$, необходимо и достаточно, чтобы существовали $\xi_1, \xi_2 \in R$, $\xi_1 \neq \xi_2$, для которых выполнены соотношения*

$$\tilde{x}(t,\xi_1) = \tilde{x}(t,\xi_2) = x, \quad \tilde{z}(t,\xi_1) = \tilde{z}(t,\xi_2) = \varphi(t,x), \quad \tilde{s}(t,\xi_1) \neq \tilde{s}(t,\xi_2),$$

*где $\tilde{x}(\cdot,\xi_i)$, $\tilde{s}(\cdot,\xi_i)$, $\tilde{z}(\cdot,\xi_i)$, $i = 1,2$ — решения характеристической системы (2), (3).*

**Утверждение 3** *Если множество сингулярности $Q$ содержит кривую, описываемую дифференцируемой функцией $t \mapsto x(t)$, $0 < t \leq t_0 < T$, то справедливо соотношение*

$$(\tilde{s}(t,\xi_1) - \tilde{s}(t,\xi_2)) \cdot \frac{dx(t)}{dt} = H(\tilde{s}(t,\xi_1)) - H(\tilde{s}(t,\xi_2)), \quad \forall t \in (0, t_0] \,.$$

Это соотношение известно как условие Ранкина–Гюгонио.

### 3.4 Класс кусочно-гладких функций

В данной работе рассматриваются обобщенные решения $\varphi(\cdot)$ задачи (1) из класса кусочно-гладких функций (см., [5, §6.3]).

**Определение 4** *Функция $\varphi(\cdot) : \Pi_T \to R$ называется кусочно-гладкой в $\Pi_T$, если*

*(1) Область определения этой функции $\Pi_T$ имеет следующую структуру*

$$\Pi_T = \bigcup_{i \in I} M_i, \quad M_i \bigcap M_j = \emptyset, \quad \textit{если} \quad i \neq j, \quad i,j \in I, \quad I = \{1,2,...N\} \,,$$

*где $M_i$ — дифференцируемые подмногообразия в $\Pi_T$.*

*(2) Сужение кусочно-гладкой функции $\varphi(\cdot,\cdot)$ на $\overline{M}_j$, $j \in J$, является непрерывно дифференцируемой функцией, где*

$$J := \{i \in I : M_i - 2\textit{-мерное многообразие}\},$$

*символ $\overline{M}_j$ означает замыкание множества $M_j$.*

*(3) Для любых $i \in I$, $(t_1,x_1)$, $(t_2,x_2) \in M_i$ выполнено $J(t_1,x_1) = J(t_2,x_2)$, где*

$$J(t,x) := \{j \in J : (t,x) \in \overline{M}_j\}.$$

Выбор для исследования класса кусочно-гладких решений уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана мотивирован тем, что в практических задачах, как правило решения содержатся в классе кусочно-гладких функций. Сингулярное множество $Q$ в этом классе выглядит следующим образом: $Q = \bigcup_{j \in I \setminus J} M_j$, где $M_i \bigcap M_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i,j \in I \setminus J$.

## 4 Процедура построения сингулярного множества

Пусть существуют две характеристики с краевыми параметрами $\xi^*$ и $\xi^{**}$.

Из характеристической системы (2), (3) следует, что $\tilde{s}(t,\xi) = D_x\sigma(\xi)$.

1) Распишем, из утверждения 2, необходимые условия принадлежности точки сингулярному множеству.

$$x(t) = \xi^* + \int_T^t D_s H(D\sigma(\xi^*))dt = \xi^{**} + \int_T^t D_s H(D\sigma(\xi^{**}))dt, \tag{4}$$

$$z(t) = \sigma(\xi^*) + \int_T^t D_s H(D\sigma(\xi^*)) \cdot D\sigma(\xi^*) - H(D\sigma(\xi^*))dt = \tag{5}$$

$$= \sigma(\xi^{**}) + \int_T^t D_s H(D\sigma(\xi^{**})) \cdot D\sigma(\xi^{**}) - H(D\sigma(\xi^{**}))dt.$$

Перепишем равенства (4) и (5) в удобном виде

$$\xi^* - \xi^{**} = (D_s H(D\sigma(\xi^*)) - D_s H(D\sigma(\xi^{**}))) \cdot (T - t), \tag{6}$$

$$\sigma(\xi^*) - \sigma(\xi^{**}) = (D_s H(D\sigma(\xi^*)) \cdot D\sigma(\xi^*) - H(D\sigma(\xi^*)) - D_s H(D\sigma(\xi^{**})) \cdot D\sigma(\xi^{**}) + H(D\sigma(\xi^{**}))) \cdot (T - t) \tag{7}$$

Равенства (6) и (7) говорят о том, что если характеристики пришли в точку $(t, x) \in Q$ то краевые параметры $\xi$ этих характеристик должны удовлетворять равенствам (4) и (5), при этом выполнено $D\sigma(\xi^*) \neq D\sigma(\xi^{**})$, при $\xi^* \neq \xi^{**}$, и $T - t > 0$.

Введем замену

$$\sigma(\xi^*) - \sigma(\xi^{**}) = (\alpha \cdot D\sigma(\xi^*) + (1 - \alpha) \cdot D\sigma(\xi^{**})) \cdot (\xi^* - \xi^{**}) \tag{8}$$

и, если (8), (6) подставить в (7), получим

$$H(D\sigma(\xi^*)) - H(D\sigma(\xi^{**})) = (\alpha \cdot D_s H(D\sigma(\xi^{**})) + (1 - \alpha) \cdot D_s H(D\sigma(\xi^*))) \cdot (D\sigma(\xi^*) - D\sigma(\xi^{**})). \tag{9}$$

Заметим, что нас интересуют $\alpha$ конечные, так как $s^* \neq s^{**}$, $\xi^* \neq \xi^{**}$, $D_s H(s^{**}) \neq D_s H(s^*)$ из того, что $\dot{\tilde{x}}(t, \xi^*) \neq \dot{\tilde{x}}(t, \xi^{**})$ [8]. С другой стороны из того, что гамильтониан H является вогнутым по переменной $s$, следует, что $\alpha \in (0, 1)$.

Для наглядности формул (8) и (9) перейдем к заменам $s^* = D\sigma(\xi^*)$ и $s^{**} = D\sigma(\xi^{**})$. Отсюда получим два представления на параметр $\alpha$.

Первое представление

$$\alpha = \frac{\sigma(\xi^*) - \sigma(\xi^{**}) - s^{**} \cdot (\xi^* - \xi^{**})}{(s^* - s^{**}) \cdot (\xi^* - \xi^{**})}. \tag{10}$$

Второе представление

$$\alpha = \frac{H(s^*) - H(s^{**}) - D_s H(s^*) \cdot (s^* - s^{**})}{(s^* - s^{**}) \cdot (D_s H(s^{**}) - D_s H(s^*))}. \tag{11}$$

Из представлений (10) и (11) видно, что они не зависят от времени и в этом одно из их преимуществ. Удобство этих представлений заключается в том, что первое представление $\alpha$ зависит от функций $\sigma$ и переменных $\xi$, а второе представление $\alpha$ зависит от функций $H$ и переменных $s$. Иногда эти представления можно упростить.

Рассмотрим представление (10) $\alpha$ как функцию от $\xi^*$ и $\xi^{**}$ $\alpha_1 = \alpha(\xi^*, \xi^{**})$, а представление (11) как $\alpha_2 = \alpha(D\sigma(\xi^*), D\sigma(\xi^{**}))$.

Нас интересуют параметры $\xi^*$ и $\xi^{**}$, которые удовлетворяют следующему равенству $\alpha_1 = \alpha_2$. Другими словами, интерес представляют точки $(\xi^*, \xi^{**})$, которые лежат на пересечении двух поверхностей $\alpha_1 = \alpha(\xi^*, \xi^{**})$, $\alpha_2 = \alpha(D\sigma(\xi^*), D\sigma(\xi^{**}))$.

2) Если из пункта первого получили некоторую зависимость между $\xi^*$, $\xi^{**}$, например $\xi^{**} = f(\xi^*)$, это значит, что существуют характеристики с данными начальными параметрами, которые пришли в момент $(T - t) > 0$ в точку с одинаковыми фазовыми и ценовыми значениями.

Для того, чтобы найти эти точки построим график зависимости от $(T - t)$ и $\xi^*$, $\xi^{**}$. Это можно сделать следующим способом: поделим выражение (10) на (11) и воспользуемся формулой (6), получим

$$(T - t) = \frac{\sigma(\xi^*) - \sigma(f(\xi^*)) - D\sigma(f(\xi^*)) \cdot (\xi^* - f(\xi^*))}{H(D\sigma(f(\xi^*))) - H(D\sigma(\xi^*)) - D_s H(D\sigma(\xi^*)) \cdot (D\sigma(f(\xi^*)) - D\sigma(\xi^*))}. \tag{12}$$

3) Из равенства (12) собираем такие $\xi^*$, у которых одинаковое значение $(T - t) > 0$, при этом учтем, что если существует $\xi^{***} \in (\xi^*, \xi^{**})$ с тем же моментом пересечения $(T - t)$, то нужно проверить, что характеристика с краевым параметром $\xi^{***}$ не выживает в графике решения. Это является достаточным условием принадлежности точки $(t, x)$ к сингулярному множеству.

## 5 Пример

Для наглядности данного метода, рассмотрим классический пример с «ласточкиным хвостом»

$$H(s) = \sqrt{1+s^2}, \quad \sigma(x) = \frac{x^2}{2}.$$

$$\sigma(\xi) = \frac{\xi^2}{2}, \quad s^* = \xi^*, \quad s^{**} = \xi^{**}.$$

1) Запишем два представления $\alpha$, которые являются первой частью необходимого условия принадлежности точки сингулярному множеству.

$$\alpha_1 = \frac{\sigma(\xi^*) - \sigma(\xi^{**}) - s^{**}\cdot(\xi^* - \xi^{**})}{(s^* - s^{**})\cdot(\xi^* - \xi^{**})}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}. \tag{13}$$

$$\alpha_2 = \frac{H(s^*) - H(s^{**}) - D_s H(s^*)\cdot(s^* - s^{**})}{(s^* - s^{**})\cdot(D_s H(s^{**}) - D_s H(s^*))}. \tag{14}$$

Представление $\alpha_2$ можно упростить до

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{1+\xi^{**2}}}{\sqrt{1+\xi^{**2}} + \sqrt{1+\xi^{*2}}}$$

Рассмотрим графическое представление пересечения двух графиков $\alpha_1$, $\alpha_2$.

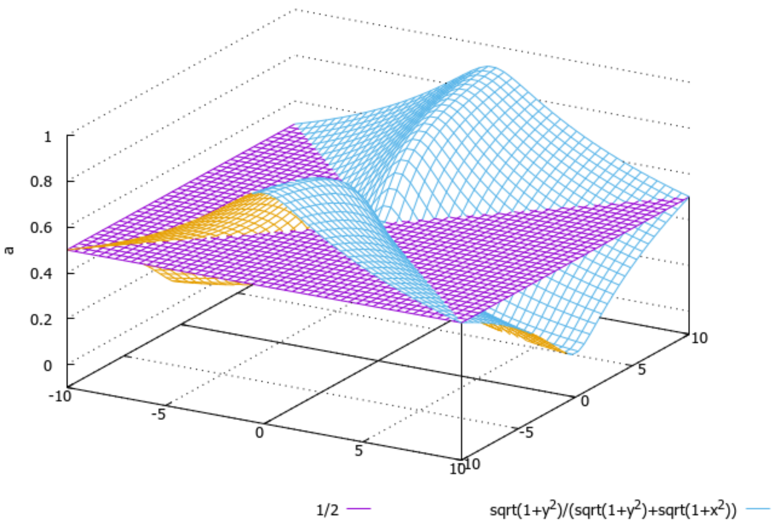


Рис. 1

Легко видеть, что пересечение поверхностей соответствуют двум случаям: $\xi^{**} = \xi^*$ и $\xi^{**} = -\xi^*$, где по осям абсцис и ординат отложены значения параметров $\xi^*$ и $\xi^{**}$.

2) Рассмотрим функцию времени пересечения в упрощенном виде $(T-t)(\cdot)$, где $\xi^{**} = f(\xi^*) = -\xi^*$, это является последней частью необходимого условия принадлежности точки сингулярному множеству, получим

$$(T-t) = \frac{(1+\xi^{*2})\cdot\sqrt{1+f(\xi^*)^2} + (1+\xi^*\cdot f(\xi^*))\cdot\sqrt{1+\xi^{*2}}}{2} = \sqrt{1+\xi^{*2}}.$$

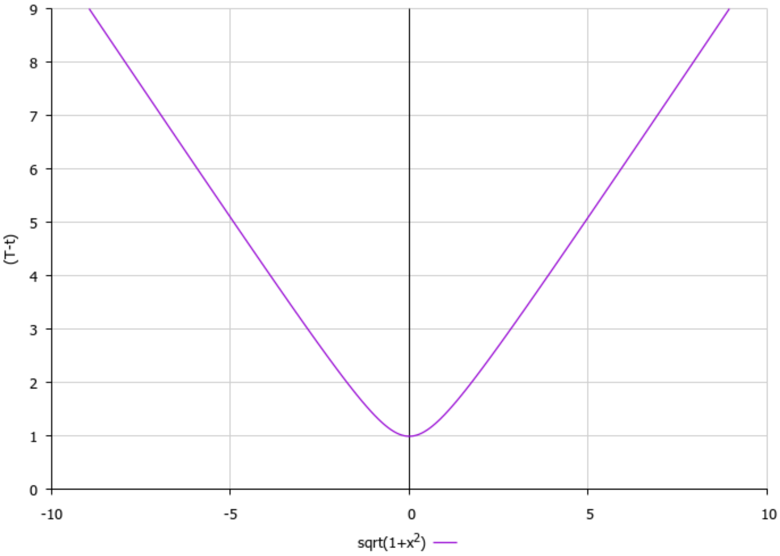


Рис. 2: По оси абсцис отложены значения параметров $\xi^*$.

Отсюда мы получаем, что время пересечения $(T-t)$ строго больше 1.

Из уравнения для фазовой компоненты характеристики $x(t,\xi^*) = \xi^* - \frac{\xi^*}{\sqrt{1+\xi^{*2}}}(T-t)$ и при условии, что $(T-t) = \sqrt{1+\xi^{*2}}$ получаем, что $x(t,\xi^*) = 0$. Отсюда следует, что сингулярное множество выглядит следующим образом

$$Q = \{(t,x) : (T-t) > 1, x = 0\}.$$

## Благодарности

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №17-01-00074) и Комплексной программы УрО РАН (проект №15-16-1-11).

## Список литературы


[1] N.N. Subbotina et al. *The Method of Characteristics for Hamilton–Jacobi–Bellman equations.* UB RAS, Yekaterinburg, 2013 (in Russian). = Н.Н. Субботина и др. *Метод характеристик для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана.* УрО РАН, Екатеринбург, 2013.

[2] E.A. Kolpakova. A generalized method of characteristics in the theory of Hamilton–Jacobi equations and conservation laws. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 16(5):95–102, 2010.

[3] I.G. Petrovskii. *Lectures on the Theory of Ordinary Differential Equations.* Moskow State Univ., Moscow, 1984 (in Russian). = И.Г. Петровский. *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* МГУ, Москва, 1984.

[4] R. Rockafellar. *Convex Analysis. Princeton Univ.*, Princeton, 1970.

[5] A.I. Subbotin. *Generalized Solutions of First-Order PDEs. The Dynamical Optimization Perspective. Birkhäuser*, 1995.

[6] M.G. Crandall, P.L. Lions. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 277(1):1–42, 1983.

[7] N.N. Subbotina, E.A. Kolpakova. On the structure of locally Lipschitz minimax solutions of the Hamilton–Jacobi–Bellman equation in terms of classical characteristics. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 268 (Suppl. 1):S222–S239, 2010.

[8] A.S. Rodin. *On the structure of the singular set of a piecewise smooth minimax solution of the Hamilton–Jacobi–Bellman equation. Ural Mathematical Journal*, 2(1):58-68, 2016.

# The procedure for constructing a singular set for solving the Hamilton–Jacobi–Bellman equation

*Aleksei S. Rodin*
Ural Federal University (Yekaterinburg, Russia)
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics (Yekaterinburg, Russia)

**Keywords:** Hamilton–Jacobi–Bellman equation, minimax solution, singular set, piecewise smooth solution, Rankin–Hugoniot's condition.

We consider the Cauchy boundary value problem of the Hamilton–Jacobi–Bellman equation. It is assumed that the solution of this problem is contained in the class of piecewise smooth functions. We consider the case when the Hamiltonian depends only on the impulse variable is a continuously differentiable function, as well as the edge feature. A procedure for constructing a singular set with the help of characteristics of the Hamilton–Jacobi–Bellman equation and the Rankin–Hugoniot condition is proposed.