К задаче простого преследования

К.А. Щелчков
incognitobox@mail.ru

Удмуртский государственный университет
(Ижевск)

Аннотация

Рассматривается задача простого преследования группой преследователей одного убегающего при условии, что все игроки обладают равными возможностями. В случае если множеством допустимых управлений игроков является многогранник, получены дополнения к теореме Григоренко. Предложен иной способ вычисления числовой характеристики игры, характеризующей её исход. Получены необходимые и достаточные условия на параметры игры, в которой два преследователя осуществляют поимку одного убегающего. Также получены некоторые дополнительные необходимые условия разрешимости задачи преследования.

1 Введение

Естественным обобщением игр преследования-убегания двух лиц [1–3] являются задачи конфликтного взаимодействия группы преследователей с одним или несколькими убегающими [4–7]. Эти игры интересны с теоретической точки зрения, так как их анализ при помощи теории игр для двух лиц достаточно сложен. Одна из причин этого состоит в том, что объединение множеств достижимости всех преследователей и объединение целевых множеств представляют собой множества, не являющиеся выпуклыми и, более того, не являющиеся связными. В работе [8] Б.Н. Пшеничного рассматривалась задача простого преследования группой преследователей одного убегающего при условии, что скорость убегающего и преследователей по норме не превосходит единицы. Были получены необходимые и достаточные условия поимки. Работа [9] обобщает результат Б.Н. Пшеничного на случай l–поимки. В работе [10] Н.Л. Григоренко получены необходимые и достаточные условия поимки убегающего группой преследователей при условии, что убегающий и преследователи обладают простым движением и множество управлений каждого из игроков – один и тот же выпуклый компакт. Обзор работ, посвящённых задаче простого преследования, см. в [11, 12].

Рассматривается задача простого преследования группой преследователей одного убегающего при условии, что все игроки обладают равными возможностями. В случае если множеством допустимых управлений игроков является многогранник, получены дополнения к теореме Григоренко. Предложен иной способ вычисления числовой характеристики игры, характеризующей её исход. Получены необходимые и достаточные условия на параметры игры, в которой два преследователя осуществляют поимку одного убегающего. Также получены некоторые дополнительные необходимые условия разрешимости задачи преследования.

In: A.A. Makhnev, S.F. Pravdin (eds.): Proceedings of the International Youth School-conference «SoProMat-2017», Yekaterinburg, Russia, 06-Feb-2017, published at http://ceur-ws.org

2 Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = u_i, \quad u_i \in U, \quad x_i(0) = x_i^0.$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = v, \quad v \in U, \quad y(0) = y^0,$$

где $x_i, y, u, v \in \mathbb{R}^k$, $U \subset \mathbb{R}^k$ — выпуклый компакт с непустой внутренностью. Обозначим $z_i^0 = x_i^0 - y^0$, $z^0 = \{x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0\}$. Считаем, что $z_i^0 \neq 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Пусть σ — некоторое разбиение $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_s < \ldots$ промежутка $[0, +\infty)$, не имеющее конечных точек сгущения.

О п р е д е л е н и е 1. *Кусочно-программной стратегией* V убегающего E, соответствующей разбиению σ, называется семейство отображений $\{c_l\}_{l=0}^{\infty}$, ставящих в соответствие набору

$$(t_l, x_1(t_l), \ldots, x_n(t_l), y(t_l))$$

измеримую функцию $v_l : [t_l, t_{l+1}) \to U$.

О п р е д е л е н и е 2. *Кусочно-программной контрстратегией* U_i преследователя P_i, соответствующей разбиению σ, называется семейство отображений $\{b_i^l\}_{l=0}^{\infty}$, ставящих в соответствие набору

$$(t_l, x_1(t_l), \ldots, x_n(t_l), y(t_l))$$

и функции $v_l(t), t \in [t_l, t_{l+1})$, измеримую функцию $u_i^l : [t_l, t_{l+1}) \to U$.

Обозначим данную игру $\Gamma(n, z^0)$.

О п р е д е л е н и е 3. В игре $\Gamma(n, z^0)$ *происходит уклонение от встречи,* если существует разбиение σ, стратегия V убегающего E, соответствующая разбиению σ, такие, что для любых траекторий $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ выполнено $x_i(t) \neq y(t)$ для всех $t \geqslant 0$ и всех $i = 1, \ldots, n$, где $y(t)$ — траектория E, порожденная разбиением σ и стратегией V.

О п р е д е л е н и е 4. В игре $\Gamma(n, z^0)$ *происходит поимка*, если существует $T > 0$ такое, что для любого разбиения σ, для любой кусочно-программной стратегии V убегающего E найдутся кусочно-программные контрстратегии $U_1, \ldots, U_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$, для которых $x_p(\tau) = y(\tau)$ при некоторых $p, \tau \in [0, T]$.

В работе [10] доказано, что в игре $\Gamma(n, z^0)$ происходит поимка тогда и только тогда, когда $\delta(z^0) > 0$, и происходит уклонение тогда и только тогда, когда $\delta(z^0) = 0$, где

$$\delta(z^0) = \min_{v \in U} \max_{i=1,\ldots,n} \lambda_i(v), \quad \lambda_i(v) = \sup\{\lambda \mid \lambda \geqslant 0, \ -\lambda z_i^0 \in -v + U\}.$$

3 Задача преследования в случае, когда U — многогранник

Пусть многогранник $U = \operatorname{co}\{A_1, \ldots, A_m\}$, причём для всех j точки A_j являются крайними. Для каждого $i = 1, \ldots, m$ определим следующие множества:

$$L_i = \left\{ \xi \;\middle|\; \xi = \sum_{j=1,\ldots,m,\ j\neq i} \alpha_j (A_j - A_i), \quad \sum_{j=1,\ldots,m,\ j \neq i} \alpha_j = 1, \ \alpha_j \in [0,1] \right\},$$

и

$$C_i = \{\gamma L_i \mid \gamma \geqslant 0\}.$$

Л е м м а 1. *Для любого i верно равенство* $U - A_i = \overline{L}_i = \{\gamma L_i \mid \gamma \in [0,1]\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v \in U$. Тогда $v = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j A_j$, $\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$, $\alpha_j \geqslant 0$. Поэтому

$$v - A_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j A_j - (1 - \alpha_i) A_i.$$

Если $\alpha_i = 1$, то $v - A_i = 0$. Пусть $\alpha_i \neq 1$. Тогда

$$v - A_i = \frac{1}{1-\alpha_i}\left(\sum_{j\neq i}\alpha_j(A_j - A_i)\right)(1-\alpha_i) = (1-\alpha_i)\sum_{j\neq i}\lambda_j(A_j - A_i),$$

где $\lambda_j \geqslant 0$, $\sum\limits_{j\neq i}\lambda_j = 1$. Точка $\sum\limits_{j\neq i}\lambda_j(A_j - A_i) \in L_i$, поэтому $(1-\alpha_i)\sum\limits_{j\neq i}\lambda_j(A_j - A_i) \in \overline{L}_i$. Значит $U - A_i \in \overline{L}_i$.

Пусть теперь $v \in \overline{L}_i$. Значит $v = \beta\sum\limits_{j\neq i}\lambda_j(A_j - A_i)$, $\lambda_j \geqslant 0$, $\sum\limits_{j\neq i}\lambda_j = 1$, $\beta \in [0,1]$. Если $v = 0$, то $v \in U - A_i$. Пусть $v \neq 0$. Тогда

$$v = \beta\sum_{j\neq i}\lambda_j(A_j - A_i) + A_i - A_i = A_i(1-\beta) + \beta\sum_{j\neq i}\lambda_j A_j - A_i.$$

Так как $1 - \beta + \beta\sum\limits_{j\neq i}\lambda_j = 1$, то $\overline{v} = A_i(1-\beta) + \beta\sum\limits_{j\neq i}\lambda_j A_j \in U$. Поэтому $v = \overline{v} - A_i \in U - A_i$.

Лемма доказана.

□

Теорема 1. Для того чтобы в игре $\Gamma(n, z^0)$ происходила поимка, необходимо и достаточно, чтобы существовали множества $J_1, \dots, J_n$ такие, что

$$-z_i^0 \in \bigcap_{j\in J_i} C_j, \ i = 1, \dots, n,$$

$$J_1 \cup \dots \cup J_n = \{1, \dots, m\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем необходимость. Пусть $J_1 \cup \dots \cup J_n \neq \{1, \dots, m\}$. Тогда существует такой номер l, что $-z_j^0 \notin C_l$, $j = 1, \dots, n$. Заметим, что по определению множество C_l является выпуклым конусом с вершиной в 0. В силу леммы 1 справедливо включение $U \subset C_l + A_l$. Тогда для любого $\alpha > 0$ выполнено: $-\alpha z_j^0 + A_l \notin U$, $j = 1, \dots, n$. Следовательно, $\lambda_j(A_l) = 0$, $j = 1, \dots, n$. Поэтому $\delta(z^0) = 0$, то есть происходит уклонение. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть выполнены условия теоремы. Рассмотрим произвольную вершину многогранника U и одну из прилегающих к ней граней. Без ограничения общности можно рассмотреть вершину A_1 и прилегающую к ней грань, которая определяется вершинами $A_1, A_2, \dots, A_s$ (обозначим её G_1). Также без ограничения общности можно считать, что $-z_1^0 \in C_1$. Для каждого $\beta \in (0,1)$ определим множества $Q_1(\beta) = \{v \mid v \in G_1 \cap \{\xi + A_1 \mid \xi \in \gamma L_1, \ \gamma \in [0,\beta]\}\}$. Пусть $\theta > 0$ такое, что $-\theta z_1^0 \in L_1$. Данное θ существует в силу условия теоремы. В силу определения множества $Q_1(\beta)$, любая точка $v \in Q_1(\beta)$ представима в виде $v = \gamma w + A_1$, где $w \in L_1$, $\gamma \in [0,\beta]$. Тогда верно включение $(1-\gamma)(-\theta z_1^0) + v - A_1 = (1-\gamma)(-\theta z_1^0) + \gamma w \in L_1$. Следовательно $(1-\gamma)(-\theta z_1^0) + v \in U$. То есть $\lambda_1(v) \geqslant (1-\gamma)\lambda_1(A_1)$. Поэтому $\min\limits_{v\in Q_1(\beta)}\lambda_1(v) \geqslant (1-\beta)\lambda_1(A_1)$. Так как $z_1^0 \neq 0$ и $-z_1^0 \in C_1$, то существует $\lambda > 0$ такое, что $-\lambda z_1^0 \in L_1$, и поэтому $\lambda_1(A_1) > 0$.

Аналогично определим множества $Q_2(\beta), \dots, Q_s(\beta)$ для вершин $A_2, \dots, A_s$ соответственно. В силу условий теоремы, данным вершинам соответствуют такие индексы $i_2, \dots, i_s$, что $z_{i_j}^0 \in C_j$, $j = 2, \dots, s$. Обозначим $i_1 = 1$. На данных множествах соответствующие функции $\lambda_{i_2}, \dots, \lambda_{i_s}$ принимают значения не меньшие, чем $(1-\beta)\lambda_{i_2}(A_2), \dots, (1-\beta)\lambda_{i_s}(A_s)$ соответственно. Докажем, что $Q_1(1-1/s) \cup \dots \cup Q_s(1-1/s) = G_1$. Возьмем произвольную точку $v \in G_1$. $v = \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_s A_s$, где $\alpha_j \geqslant 0$ и $\alpha_1 + \dots + \alpha_s = 1$. Тогда существует индекс q такой, что $\alpha_q \geqslant 1/s$. Следовательно, $v \in Q_q(1-1/s)$ Поэтому для любой точки $v \in G_1$ существует такое $j \in \{1, \dots, s\}$, что $\lambda_{i_j}(v) \geqslant (1-(1-1/s))\lambda_{i_j}(A_j) = \lambda_{i_j}(A_j)/s > 0$.

Аналогично рассмотрев остальные грани и вершины множества U, получим, что для некоторого $\beta > 0$ для любой точки $v \in \partial U$, где ∂U — граница множества U, существует такое $j \in \{1, \dots, n\}$, что $\lambda_j(v) > 0$. Достаточно рассматривать граничные точки, так как функции λ_j вогнутые (см. [6], приложения). Действительно, пусть $\min\limits_{v\in U}\max\limits_{i=1,\dots,n}\lambda_i(v)$ достигается в некоторой точке $\overline{v} \in \partial U$. Тогда данная точка $\overline{v}$ принадлежит некоторой грани G_η. В силу построений, описаных выше для грани G_1, существует такой индекс $\overline{j} \in \{1, \dots, m\}$, что $\lambda_{\overline{j}}(v) \geqslant \lambda_{\overline{j}}(A_{\overline{i}})/\overline{s} > 0$. Здесь $A_{\overline{i}}$ — одна из точек, образующих грань G_η, $\overline{s}$ — количество точек, образующих данную грань, $z_{\overline{j}} \in C_{\overline{i}}$. Следовательно, $\delta(z^0) > 0$, то есть происходит поимка.

Теорема доказана.

□

Теорема 2. Пусть $m = k + 1$. Для того чтобы в игре $\Gamma(k + 1, z^0)$ происходила поимка, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$-z_i^0 \in C_{i_j},\ j = 1, \dots, m,$$
$$\{i_1\} \cup \dots \cup \{i_{k+1}\} = \{1, \dots, m\}.$$

При этом

$$\delta(z^0) = \min_{j=1,\dots,k+1} \frac{\lambda_j(A_{i_j})}{k}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость и достаточность поимки в данном случае следует из теоремы 1 и того, что $C_i \cap C_j = 0$, для любых $i, j = 1, \dots, m$, $i \neq j$.

Докажем равенство для $\delta(z^0)$. Без ограничения общности можно считать $i_1, \dots, i_{k+1}$ из условия теоремы равными $1, \dots, k + 1$ соответственно. Рассмотрим вершину A_1 и с грань, определяемую вершинами $A_1, \dots, A_k$ (обозначим её G_1). Определим, как и в теореме 1, множество $Q_1(\beta)$. Так как множество L_1 является частью гиперплоскости, то для любого $v \in Q_1(\beta)$ будет выполнено $\lambda_1(v) = (1 - \gamma)\lambda_1(A_1)$ (см. доказательство теоремы 1). Далее, заметим, что при $\beta < 1/k$, $Q_1(\beta) \cup \dots \cup Q_k(\beta) \neq G_1$. Действительно, так как множество

$$Q_i(\beta) = \left\{ \xi \;\middle|\; \xi = (1 - \gamma)A_i + \gamma \sum_{j \neq i} \alpha_j A_j,\ \sum_{j \neq i} \alpha_j = 1,\ \alpha_j \geqslant 0,\ \gamma \in [0, \beta] \right\},$$

то, например, точка $A_1/k + \ldots + A_k/k \notin Q_j(\beta)$ для любого $j = 1, \dots, k$ при $\beta < 1 - 1/k$. При $\beta = 1/k$ для любой точки $v = \alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_k A_k$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1$, $\alpha_j \geqslant 0$, существует $j \in \{1, \dots, k\}$ такое, что $\alpha_j \geqslant 1 - 1/k$, то есть $v \in Q_j(1 - 1/k)$.

Таким образом, для любой точки $v \in \partial U$, $\lambda_i(v) \geqslant \lambda_i(A_i)/k$, $i = 1, \dots, k + 1$. Пусть $\lambda_q(A_q) \geqslant \min\{\lambda_1(A_1), \dots, \lambda_{k+1}(A_{k+1})\}$. Тогда существует такое $\beta \in (1 - 1/k, 1)$, что $\min\limits_{w \in Q_q(\beta)} \lambda_q(w) = (1 - \beta)\lambda_q(A_q) = \min\{\lambda_1(A_1)/k, \dots, \lambda_{k+1}(A_{k+1})/k\}$, где $Q_q(\beta)$ определено для любой грани, смежной с вершиной A_q.

Теорема доказана.

□

Замечание. Теоремы 1 и 2 дополняют результаты Григоренко [10] для случая, когда U — многогранник. В работе [10] число $\delta(z^0)$ вычисляется в общем случае с использованием аппарата опорных функций. В теореме 2 предложен иной способ вычисления числа $\delta(z^0)$.

4 Необходимые условия поимки

Обозначим $L_m(p_1, \dots, p_m)$ — линейное подпространство $\mathbb{R}^k$, определяемое линейно независимыми векторами $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}^k$, $\|p_j\| = 1$. $L_m^{\perp}(p_1, \dots, p_m)$ — ортогональное дополнение к $L_m(p_1, \dots, p_m)$.

Теорема 3. Для осуществления поимки необходимо, чтобы $0 \in \mathrm{co}\{z_1^0, \dots, z_n^0\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $0 \notin \mathrm{co}\{z_1^0, \dots, z_n^0\}$. Тогда существует вектор $q \in \mathbb{R}^k$, $\|q\| = 1$, такой что $(-z_i^0, q) > 0$, $i = 1, \dots, n$. Для данного вектора q существует число $\alpha \in \mathbb{R}$ и точка $\overline{v} \in \partial U$ такие, что $(v, q) \leqslant \alpha$ для любого $v \in U$ и $(\overline{v}, q) = \alpha$. Тогда $(-\lambda z_i^0, q) > \alpha$ для любого $\lambda > 0$ и любого $i = 1, \dots, n$. Следовательно, $\lambda_i(\overline{v}) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Поэтому $\delta(z^0) = 0$, то есть происходит уклонение.

Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть $n \leqslant k$. Тогда для осуществления поимки необходимо существование такого $L_{n-1}(p_1, \dots, p_{n-1})$, что для любой точки $v \in \partial U$, в которой существует опорная гиперплоскость с внешней нормалью $q \in L_{n-1}^{\perp}(p_1, \dots, p_{n-1})$, $\|q\| = 1$, было выполнено $((L_{n-1}(p_1, \dots, p_{n-1}) + v) \setminus \{v\}) \cap U \neq \varnothing$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что такое $L_{n-1}(p_1, \dots, p_{n-1})$ не существует. Из теоремы 3 следует необходимая принадлежность $z_1^0, \dots, z_n^0 \in L_{n-1}(p_1, \dots, p_{n-1})$, где $L_{n-1}(p_1, \dots, p_{n-1})$ — некоторое линейное подпространство, которое мы можем выбрать сами. Но для любого $L_{n-1}(p_1, \dots, p_{n-1})$, в силу предположения противного, существует $\overline{v} \in \partial U$ такой, что $(L_{n-1}(p_1, \dots, p_{n-1}) + \overline{v}) \cap U \neq \{\overline{v}\}$. Следовательно $-\lambda z_i^0 + \overline{v} \notin U$ для любого $\lambda > 0$, $i = 1, \dots, n$. Поэтому $\max\limits_{i=1,\dots,n} \lambda_i(\overline{v}) = \delta(z^0) = 0$, то есть происходит уклонение.

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим случай $\mathbb{R}^3$, $n = 3$, U — выпуклый многогранник с вершинами в точках $A_1, \dots, A_7$, где $A_1 = (0, 0, 0)$, $A_2 = (1, 0, 0)$, $A_3 = (0, 1, 0)$, $A_4 = (0, 0, 2)$, $A_5 = (1, 0, 2)$, $A_6 = (0, 1, 2)$, $A_7 = (3, 3, 1)$.

В данном случае $L_2((1,0,0),(0,1,0))$ удовлетворяет теореме 4. Для того чтобы $\max\limits_{i=1,2,3} \lambda_i(v) \neq 0$ для любого v, принадлежащего верхней или нижней грани (они параллельны друг другу и $L_2((1,0,0),(0,1,0))$), необходимо, чтобы

$$-z_1^0 \in \{\xi \mid \xi = \gamma(\alpha(A_2 - A_1) + (1-\alpha)(A_3 - A_1)), \alpha \in [0,1], \gamma > 0\};$$

$$-z_2^0 \in \{\xi \mid \xi = \gamma(\alpha(A_1 - A_2) + (1-\alpha)(A_3 - A_2)), \alpha \in [0,1], \gamma > 0\};$$

$$-z_3^0 \in \{\xi \mid \xi = \gamma(\alpha(A_1 - A_3) + (1-\alpha)(A_2 - A_3)), \alpha \in [0,1], \gamma > 0\}.$$

Заметим, что z_i^0 можно поменять местами. Необходимость принадлежности данным конусам следует из теоремы 2.

Таким образом выполнены условия теорем 3 и 4. Более того, на гранях, параллельных $L_2((1,0,0),(0,1,0))$, максимум функций λ_i положителен. Также максимум функций λ_i не обращается в 0 и на гранях A_1, A_2, A_4, A_5 и A_1, A_3, A_4, A_6.

Но в точке A_7 необходимо, чтобы хотя бы один из $-z_i^0$ принадлежал конусу

$$\{\xi \mid \xi = \gamma(\alpha(A_2 - A_7) + (1-\alpha)(A_3 - A_7)), \alpha \in [0,1], \gamma > 0\},$$

который не пересекается с конусами, определенными выше. Следовательно, в данном примере для любых начальных положений происходит уклонение, исходя из теоремы 1.

Замечание к примеру. В случае если U определяется только вершинами $A_1, \ldots, A_6$, то условие теоремы 4 будет также и достаточным для существования начальных положений, из которых будет происходить поимка.

5 Поимка двумя преследователями

Для каждого $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$, определим множество $W(p)$ следующим образом: $w \in W(p)$ если выполнены следующие условия:

1) $w \in \partial U$, где ∂U — граница множества U;
2) существуют вектор $q \in \mathbb{R}^k$, $\|q\| = 1$, $(q,p) = 0$, и число $\alpha \in \mathbb{R}$ такие, что для любого $v \in U$, $(v,q) \leqslant \alpha$, $(w,q) = \alpha$.

Введём следующие обозначения:

$$D_{\max}(p,w) = w + p \cdot \max\{\gamma \in \mathbb{R}^1 \mid \gamma p + w \in \partial U\},$$

$$D_{\min}(p,w) = w + p \cdot \min\{\gamma \in \mathbb{R}^1 \mid \gamma p + w \in \partial U\}.$$

Теорема 5. Для существования начальных положений z_1^0 и z_2^0, из которых в данной игре происходит поимка, необходимо и достаточно существование такого вектора $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$, что для любой точки $w \in W(p)$ выполнено $D_{\max}(p,w) \neq D_{\min}(p,w)$. При этом поимка будет гарантирована, если $z_1^0 = \alpha p$, $z_2^0 = -\beta p$ для некоторых $\alpha, \beta > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем необходимость. Пусть существуют начальные положения $z_1^0, \ldots, z_n^0$, из которых происходит поимка, то есть $\delta(z^0) > 0$. Предположим противное условиям теоремы. Пусть для любого вектора $p \in \mathbb{R}^k$, $\|p\| = 1$, существует такой вектор $w \in W(p)$, что $D_{\max}(p,w) = D_{\min}(p,w)$.

Рассмотрим случай, когда векторы z_1^0, z_2^0 не лежат на одной прямой, то есть существует такой вектор l, что $(-z_1^0, l) > 0$ и $(-z_2^0, l) > 0$. Так как U — выпуклый компакт, то существует точка $\overline{v} \in \partial U$ и число α такие, что для любого $v \in U$, $(v,l) \leqslant \alpha$, $(\overline{v}, l) = \alpha$. Поэтому $-\gamma z_1^0 + \overline{v} \notin U$ и $-\gamma z_2^0 + \overline{v} \notin U$ для любого $\gamma > 0$. То есть $\lambda_1(\overline{v}) = \lambda_2(\overline{v}) = 0$, следовательно $\delta(z^0) = 0$. Противоречие.

Пусть векторы z_1^0, z_2^0 лежат на одной прямой. Так как предполагается поимка, то, в силу теоремы 3, начальные положения имеют следающий вид: $z_1^0 = \alpha_1 l$, $z_2^0 = -\alpha_2 l$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\|l\| = 1$ (случай, когда $\alpha_1, \alpha_2 < 0$, рассматривается аналогично). В силу предположения существует $w \in W(l)$, что $\|D_{\max}(p,w) - D_{\min}(p,w)\| = 0$, то есть существуют вектор $\|\overline{q}\| = 1$, $(\overline{q}, l) = 0$, и число α такие, что $(w,q) = \alpha$ и для любого $v \in U$, $v \neq w$ выполнено $(v,q) < \alpha$. Следовательно $-\gamma z_1^0 + w \notin U$ и $-\gamma z_2^0 + w \notin U$ для любого $\gamma > 0$. То есть $\lambda_1(w) = \lambda_2(w) = 0$, следовательно $\delta(z^0) = 0$. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть выполнены условия теоремы. Возьмём точку $\overline{v} \in \partial U$ такую, что $\delta(z^0) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \lambda_i(\overline{v})$. Если $\overline{v} \in W(p)$, то, в силу определения, точка v лежит на отрезке, соединяющем точки $D_{\max}(p,\overline{v})$ и $D_{\min}(p,\overline{v})$. Тогда либо $\lambda_1(\overline{v}) \geqslant \|D_{\max}(p,\overline{v}) - D_{\min}(p,\overline{v})\|/(2\|z_1^0\|)$, либо $\lambda_2(\overline{v}) \geqslant \|D_{\max}(p,\overline{v}) - D_{\min}(p,\overline{v})\|/(2\|z_2^0\|) > 0$. Это выполнено в силу определенных в условии теоремы z_1^0, z_2^0.

Рассмотрим случай, когда $\overline{v} \in \partial U$ и $\overline{v} \notin W(p)$. Предположим, что $\lambda_1(\overline{v}) = \lambda_2(\overline{v}) = 0$, следовательно $(\overline{v} + l(p)) \cap U = \overline{v}$, где $l(p) = \{\xi \mid \xi = \gamma p,\ \gamma \in \mathbb{R}\}$. Докажем, что существует опорная гиперплоскость к множеству U в точке $\overline{v}$ с внешней нормалью q, которая содержит прямую $\overline{v} + l(p)$, то есть $(q,p) = 0$. Множества $\overline{v} + l(p)$ и $\operatorname{Int} U$ ($\operatorname{Int} U$ — внутренность множества U) отделимы, так как данные множества являются выпуклыми и не пересекаются. В силу того, что $\overline{v} + l(p)$ пересекает границу множества U, то отделяющая гиперплоскость будет проходить через $\overline{v}+l(p)$. Следовательно существует вектор $\overline{q} \neq 0$ такой, что $(l,\overline{q}) = 0$ и $(w,\overline{q}) < 0$, где $l \in l(p)$ и $w \in \operatorname{Int} U - \overline{v}$. Тогда для любого $v \in U$ будет выполнено неравенство $(v - \overline{v}, q) \leqslant 0$, то есть данная отделяющая гиперплоскость является искомой опорной гиперплоскостью. Поэтому из определения множества $W(p)$ следует, что $\overline{v} \in W(p)$. Таким образом получили противоречие с предположением $\overline{v} \notin W(p)$.

Следовательно, если $\overline{v} \notin W(p)$, то $\max\limits_{i=1,2} \lambda_i(\overline{v}) > 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_1(\overline{v}) > 0$.

Докажем включение $U \subset \operatorname{co} W(p) + l(p)$, где $\operatorname{co} W(p)$ — выпуклая оболочка множества $W(p)$. Обозначим $M(q)$ — опорное полупространство к множеству U с нормальным вектором q; $\alpha(q)$ — соответствующее число, определяющее опорную гиперплоскость,

$$M(W(p)) = \bigcap_{(p,q)=0,\|q\|=1} M(q).$$

Заметим, что $U \subset M(W(p))$. Предположим противное включению $U \subset \operatorname{co} W(p) + l(p)$. Пусть существует такая точка $v \in U$, что $v \notin \operatorname{co} W(p) + l(p)$. Следовательно, точка $v + l \notin \operatorname{co} W(p) + l(p)$, где $l \in l(p)$. Тогда существует гиперплоскость $\hat{M} = \{x | (x,\hat{q}) = \hat{\alpha}, (\hat{q},p) = 0\}$, которая не пересекает множество $\operatorname{co} W(p)$. Так как $v + l(p) \subset M(W(p))$, то для любой точки $w \in \hat{M}$ выполнено неравенство $(w,\hat{q}) \leqslant \alpha(\hat{q})$. Но существует такая точка $\xi \in W(p)$, что $(\xi,\hat{q}) = \alpha(\hat{q})$, что противоречит определению множества $\hat{M}$. Следовательно, $U \subset \operatorname{co} W(p) + l(p)$. Следовательно, существует вектор $w_1 \in \operatorname{co} W(p)$ и число $\alpha > 0$ такие, что $w_1 + \alpha p = v$ (либо $-\alpha$ и далее для функции λ_2), где $v \in U$, $v \notin W(p)$. Поэтому $\lambda_1(v) \geqslant \|D_{\max}(p,w) - D_{\min}(p,w)\|/(2\|z_1^0\|)$, для некоторого $w \in W(p)$. Отсюда следует, что $\delta(z^0) > 0$ и достигается на $W(p)$, то есть происходит поимка.

Теорема доказана.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00346а).

Список литературы

[1] R. Isaacs. *Differential games.* John Wiley and Sons, New York, 1965.

[2] N. N. Krasovskii, A. I Subbotin. *Positional differential games.* Nauka, Moscow, 1974 (in Russian). = Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. *Позиционные дифференциальные игры.* Наука, Москва, 1974.

[3] L. A. Petrosyan. *Differential pursuit games.* University Press, Leningrad, 1977 (in Russian). = Л.А. Петросян. *Дифференциальные игры преследования.* Изд-во ЛГУ, Ленинград, 1977.

[4] B. B. Rikhsiev. *Differential games with simple motion.* Fan, Tashkent, 1989 (in Russian). = Б.Б. Рихсиев. *Дифференциальные игры с простыми движениями.* Фан, Ташкент, 1989.

[5] A. A. Chikrii. *Conflict–controlled processes.* Kluwer Academic Publishers, Boston—London—Dordrecht, 1997.

[6] N. L. Grigorenko. *Mathematical methods of multiple dinamic processes management.* Moscow State University, Moscow, 1990 (in Russian). = Н.Л. Григоренко. *Математические методы управления несколькими динамическими процессами.* Изд-во МГУ, Москва, 1990.

[7] A. I. Blagodatskikh, N. N. Petrov. *Conflict interaction of groups of controlled objects*. Udmurt State University, Izhevsk, 2009 (in Russian). = Благодатских А.И., Петров Н.Н. *Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов*. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2009.

[8] B. N. Pshenichnyi. Simple pursuit by a few objects. *Kibernetika*, 3:145–146, 1976 (in Russian). = Б.Н. Пшеничный. Простое преследование несколькими объектами. *Кибернетика*, 3:145–146, 1976.

[9] L. G. Vasil'eva. On one differential evasion problem. *Differentcial'nyie, beskoalitcionnyie, kooperativnyie i strategicheskiie igry. Kalinin. Izdatel'stvo Kalininskogo instituta*, 26–33, 1979 (in Russian). = Л.Г. Васильева. Об одной дифференциальной игре убегания. *Дифференциальные, бескоалиционные, кооперативные и статистические игры*, Изд-во Калининского ин-та, Калилин, 1979.

[10] N. L. Grigorenko. Simple pursuit–evasion game of pursuit group and one evader. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. XV. Vychisl. Mat. Kibernet.*, 1:41–47, 1983 (in Russian). = Н.Л. Григоренко. Игра простого преследования–убегания группы преследователей и одного убегающего. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн.*, 1:41–47, 1983.

[11] A. S. Bannikov. Some non-stationary problems of group pursuit. *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 41(1):43–46, 2013 (in Russian). = А.С. Банников. Некоторые нестационарные задачи группового преследования. *Известия ин-та математики и информатики УдГУ*, 41(1):43–46, 2013.

[12] S. S. Kumkov, S. Le Menec, V. S. Patsko. Zero-Sum Pursuit-Evasion Differential Games with Many Objects: Survey of Publications. *Dyn Games Appl*, Published online: 16 November, 2016, 25 pages.

To the simple pursuit problem

Kirill A. Shchelchkov
Udmurt State University (Izhevsk, Russia)

Keywords: differential game, simple motion, group pursuit.

A simple pursuit problem, in which a group of pursuers and one evader are involved, is considered. All the participants have equal capabilities. In the case when the admissible control set of all participants is a polyhedral with non–empty interior, additions to the Grigorenko's theorem have been received. Another method of finding a numerical game characteristic, characterizing the game result, hase been proposed. Required and sufficient conditions on game parameters, when two pursuers realize the capture of one evader, have been received. Also, some additional necessary conditions of solvability pursuit problem have been received.