О задаче достижимости для нелинейной управляемой системы с интегральными ограничениями

И.В. Зыков
zykoviustu@mail.ru

ИММ УрО РАН (Екатеринбург)

Аннотация

В настоящей работе рассматриваются линейные по управлению системы с интегральными ограничениями на управление и траекторию. Показано, что управление, переводящее систему на границу проекции множества достижимости на заданное линейное подпространство, является решением некоторой задачи оптимального управления с интегральным функционалом и, следовательно, удовлетворяет принципу максимума.

1 Введение и постановка задачи

Свойства множеств достижимости в нелинейных системах с интегральными ограничениями исследовались в работах [1, 2]. Алгоритмы построения множеств достижимости, основанные на дискретных аппроксимациях, изучались в [3, 4]. В работе [5] для систем с интегральными ограничениями на управление доказано, что любое управление, удовлетворяющее интегральным ограничениям и переводящее систему на границу множества достижимости, является локальным решением некоторой задачи оптимального управления.

В настоящей статье результаты из [5] обобщаются на следующий случай:

1) рассматриваются совместные интегральные ограничения на управление и траекторию;

2) изучаются граничные точки проекции множества достижимости на заданное линейное подпространство.

Доказано, что управление, удовлетворяющее ограничениям и переводящее систему на границу проекции множества достижимости на заданное линейное подпространство, является локальным решением задачи оптимального управления с терминальным ограничением. Этот факт позволяет для отыскания точек множеств достижимости применять соотношения принципа максимума Понтрягина.

Далее будем использовать следующие обозначения. Для вещественной матрицы A через $A^\top$ мы обозначаем транспонированную матрицу, 0 обозначает нулевой вектор подходящей размерности, O — нулевую матрицу. Символом I будем обозначать единичную матрицу. Для $x, y \in \mathbb{R}^k$ $(x, y) = x^\top y$ — скалярное произведение векторов, $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$ — евклидова норма в конечномерном пространстве, $B(\bar{x}, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\| \leqslant r\}$ — шар радиуса $r > 0$ с центром в точке $\bar{x}$. Для вещественной прямоугольной $k \times m$ матрицы A через $\| A \|_{k\times m}$ обозначаем норму матрицы, подчиненную евклидовым нормам векторов. Для $S \subset \mathbb{R}^n$ символом ∂S обозначается граница S, $\frac{\partial g}{\partial x}(x)$ — матрица Якоби отображения $g(x)$, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ — оператор Гамильтона. Через $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2$ и C будем обозначать, соответственно,

In: A.A. Makhnev, S.F. Pravdin (eds.): Proceedings of the International Youth School-conference «SoProMat-2017», Yekaterinburg, Russia, 06-Feb-2017, published at http://ceur-ws.org

пространства суммируемых, суммируемых с квадратом и непрерывных вектор-функций на $[t_0, t_1]$. Нормы в этих пространствах будем обозначать символами $\| \cdot \|_{\mathbb{L}_1}$, $\| \cdot \|_{\mathbb{L}_2}$, $\| \cdot \|_C$.

Мы будем рассматривать управляемые системы с ограничениями вида

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))u(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad x(t_0) = x^0, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^r$ — управляющий параметр, $f_1 : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, $f_2 : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n \times r}$ — непрерывные отображения; управление $u(t)$ — вектор-функция из $\mathbb{L}_2[t_0, t_1]$; t_0, t_1 и начальное состояние x^0 фиксированы.

Отображения $f_1 : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_2 : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times r}$ непрерывны, непрерывно дифференцируемы по x и удовлетворяют условиям:

$$\| f_1(t, x) \| \leqslant l_1(t)(1 + \| x \|), \tag{2}$$

$$\| f_2(t, x) \|_{n \times r} \leqslant l_2(t), \tag{3}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $l_1(\cdot) \in \mathbb{L}_1$, $l_2(\cdot) \in \mathbb{L}_2$, $t \in [t_0, t_1]$.

Решением (траекторией) системы (1), отвечающим управлению $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$, будем называть абсолютно непрерывную функцию $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$, для которой равенство (1) выполняется для почти всех $t \in [t_0, t_1]$. При условиях (2), (3), для любых $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$ существует единственное решение $x(t)$.

Определим интегральный функционал $J(u(\cdot))$ равенством

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} \big(Q(t, x(t)) + u^\top(t) R(t) u(t) \big)\, dt, \tag{4}$$

где $Q(t, x)$ — неотрицательная непрерывная функция, а $R(t)$ — положительно определенная матрица, непрерывно зависящая от t. Через U обозначим непустое множество тех $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$, для которых $J(u(\cdot)) \leqslant \mu^2$, где $\mu > 0$ — заданное число.

Определение 1 *Множеством достижимости $G(t_1)$ системы* (1) *в момент времени t_1 будем называть совокупность всех концов траекторий $x(t_1)$ в $\mathbb{R}^n$, отвечающих управлениям из U.*

Определим линейное отображение $P_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ $(k < n)$ следующим образом:

$$y = P_k x,$$

где матрица $P_k = \begin{bmatrix} I_{k \times k} & O_{k \times (n-k)} \end{bmatrix}$. Таким образом, y состоит из первых k координат вектора x.

Матрицу P_k, которая осуществляет переход от $x \in \mathbb{R}^n$ к $y \in \mathbb{R}^k$, назовем *матрицей проектирования* на подпространство первых k координат.

Определение 2 *Проекцией множества достижимости $G_{1k}(t_1)$ системы* (1) *на подпространство первых k координат в момент времени t_1 будем называть совокупность векторов y^1 в $\mathbb{R}^k$ вида $y^1 = P_k x(t_1)$, где $x(t)$ — траектории системы 1, отвечающие управлениям из U. Если $G(t_1)$ — множество достижимости, то $G_{1k}(t_1) = P_k G(t_1)$.*

Рассмотрим задачу оптимального управления для системы (1).

Задача 1

$$J(u) \to \min, \quad u(\cdot) \in \mathbb{L}_2, \quad x(t_0) = x^0, \quad P_k x(t_1) = y^1, \tag{5}$$

где y^1 – заданный вектор из $\mathbb{R}^k$. Управление $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$, удовлетворяющее ограничению задачи 1, назовем допустимым управлением.

Подчеркнем, что единственным ограничением в задаче 1 выступает терминальное ограничение на траекторию $P_k x(t_1) = y^1$.

Определение 3 *Управление $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$, удовлетворяющее ограничению задачи 1, доставляет локальный минимум функционалу $J(u)$, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого другого $v(\cdot) \in \mathbb{L}_2$, удовлетворяющего ограничению задачи 1, такого, что $\| u(\cdot) - v(\cdot) \|_{\mathbb{L}_2} < \varepsilon$, имеет место неравенство $J(u) \leqslant J(v)$.*

Определение 4 *Пусть $u(t)$ — управление из U, $x(t)$ — отвечающая этому управлению траектория. Систему*

$$\dot{\delta x} = A(t)\delta x + B(t)\delta v,$$

где $A(t) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(t, x(t)) + \frac{\partial}{\partial x}[f_2(t, x(t))u(t)]$, $B(t) = f_2(t, x(t))$, назовем линеаризацией системы (1) *вдоль пары* $(x(t), u(t))$.

Схема доказательства приводимых далее результатов во многом повторяет схему из работы [5]. При необходимости мы будем делать соответствующие ссылки.

2 Вспомогательные результаты

Рассмотрим линейную нестационарную систему

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad x(t_0) = x^0, \tag{6}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^r$, $A(t)$, $B(t)$ – непрерывные на $[t_0, t_1]$ матричные функции.

Определим симметричную матрицу $V(t_0, t)$ равенствами

$$V(t_0, t) = P_k W(t_0, t) P_k^\top, \quad W(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} X(t, \tau) B(\tau) B^\top(\tau) X^\top(t, \tau) d\tau,$$

здесь $W(t_0, t)$ — грамиан управляемости, $X(t, \tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)$ — матрица Коши однородной системы, где $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица, удовлетворяющая уравнению $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$.

Условие $P_k x(t_1) = y^1 \in \mathbb{R}^k$ означает, что траектория $x(t)$ должна быть приведена в момент времени $t = t_1$ на k-мерную плоскость n-мерного пространства. Если для любой точки $y^1 \in \mathbb{R}^k$ существует управление $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$ такое, что $y^1 = P_k x(t_1)$, то система (6) называется *управляемой по выходу* y на отрезке $[t_0, t_1]$.

Система (6) вполне управляема по выходу $y = P_k x$ на $[t_0, t_1]$ в том и только том случае, когда $V(t_0, t_1)$ положительно определена (см., например, [6, с. 204]).

Очевидно, что если $u(\cdot) \in U$, то

$$\int_{t_0}^{t_1} u^\top(t) R(t) u(t) dt \leqslant \mu^2.$$

Так как $R(t)$ положительно определена и непрерывна, то существует $\delta > 0$ такое, что $(R(t) - \delta I) \geqslant 0$ и, следовательно,

$$\int_{t_0}^{t_1} u^\top(t) u(t) dt \leqslant \frac{\mu^2}{\delta}.$$

Таким образом, все управления из U принадлежат гильбертову шару

$$D = \left\{ u(\cdot) \in \mathbb{L}_2 : \int_{t_0}^{t_1} \| u(t) \|^2 \, dt \leqslant \frac{\mu^2}{\delta} \right\}.$$

Отсюда и из [5, утв. 2], следует компактность множества траекторий системы (1), удовлетворяющих ограничению U.

Зададим последовательность управлений $v^m(\cdot)$, которая отображается в последовательность траекторий $x^m(\cdot)$. Линеаризованная вдоль $(x^m(\cdot), v^m(\cdot))$ система (1) задается парой матриц $(A_m(t), B_m(t))$, где

$$A_m(t) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(t, x^m(t)) + \frac{\partial}{\partial x}[f_2(t, x^m(t)) \cdot v^m(t)], \quad B_m(t) = f_2(t, x^m(t)).$$

Справедлива

Лемма 1 *Если $u^m(\cdot) \to u(\cdot)$ в $\mathbb{L}_2$ и пара $(A(t), B(t))$, отвечающая управлению $u(\cdot)$, управляема по выходу y, то, начиная с некоторого m, пара $(A_m(t), B_m(t))$ будет управляемой на подпространстве $\mathbb{R}^k$ (по выходу y).*

Доказательство. Запишем соответствующие матрицы управляемости

$$V(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}P_kM(t)B(t)B(t)^\top M(t)^\top P_k^\top dt,$$

$$V^m(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}P_kM_m(t)B_m(t)B_m(t)^\top M_m(t)^\top P_k^\top dt,$$

где

$$\begin{gathered}\dot M(t)=-A^\top(t)M(t),\\ \dot M_m(t)=-A_m^\top(t)M_m(t),\\ M(t_1)=M_m(t_1)=I.\end{gathered}\tag{7}$$

Так как $A_m(\cdot)\to A(\cdot)$ в $\mathbb{L}_1$ [5, док-во леммы 1], то существует суммируемая функция $\gamma(t)$ такая, что $\parallel A_m(t)\parallel_{n\times n}\leqslant\gamma(t),\ \forall m,\ \forall t\ \in\ [t_0,t_1]$. Покажем ограниченность матрицы $M_m(t)$, повторяя схему доказательства теоремы 3 [7, с. 9]. Существует $K>0$ такое, что $\parallel M_m(t)\parallel_{n\times n}\leqslant K\ \forall m,\ \forall t\in[t_0,t_1]$. Перейдем от (7) к интегральному уравнению и построим последовательные приближения: $M_{m_0}(t)\equiv I$,

$$M_{m_{p+1}}(t)=I-\int_{t_1}^{t}A_m^\top(s)M_{m_p}(s)ds,\ p=0,1,2,...$$

Из условия $\parallel A_m(t)\parallel_{n\times n}\leqslant\gamma(t)$ и того факта, что

$$\parallel A_m(t)Z\parallel_{n\times n}\leqslant\parallel A_m(t)\parallel_{n\times n}\parallel Z\parallel_{n\times n}\leqslant\gamma(t)\parallel Z\parallel_{n\times n}$$

для любой матрицы Z, получаем существование и непрерывность всех приближений, где

$$\parallel M_{m_{p+1}}(t)-M_{m_p}(t)\parallel_{n\times n}\leqslant\int_{t_1}^{t}\gamma(s)\parallel M_{m_p}(s)-M_{m_{p-1}}(s)\parallel_{n\times n}ds,\ p=1,2,...$$

Положим $\xi=\max\limits_{m,t}\parallel M_{m_1}(t)-M_{m_0}(t)\parallel_{n\times n}$ на отрезке $[t_0,t_1]$, $\psi(t)=\int_{t_1}^{t}\gamma(s)ds$. По индукции доказывается, что на этом отрезке

$$\parallel M_{m_{p+1}}(t)-M_{m_p}(t)\parallel_{n\times n}\leqslant\xi\frac{(\psi(t))^p}{p!},\ p=0,1,2,...$$

Тогда

$$\parallel M_{m_{p+1}}(t)-M_{m_0}(t)\parallel_{n\times n}\leqslant\xi\sum_{i=0}^{p}\frac{(\psi(t))^i}{i!},$$

где правая часть есть равномерно сходящийся ряд на отрезке $[t_0,t_1]$. Следовательно, существует $\lim_{p\to\infty}M_{m_p}(t)=M_m(t)$ и возможен предельный переход в интегральном уравнении. Поэтому $M_m(t)$ является решением интегрального уравнения, а значит и уравнения (7), на отрезке $[t_0,t_1]$. Из этого, единственности решения (следует из липшицевости правой части (7)) и неравенств

$$\parallel M_{m_0}(t)\parallel_{n\times n}-\xi\cdot C\leqslant\parallel M_{m_{p+1}}(t)\parallel_{n\times n}\leqslant\parallel M_{m_0}(t)\parallel_{n\times n}+\xi\cdot C$$

для некоторого $C>0$, получаем ограниченность $M_m(t)$ по норме.

Поскольку

$$\frac{d}{dt}(M(t)-M_m(t))=-A^\top(t)(M(t)-M_m(t))+(A_m(t)-A(t))^\top M_m(t),$$

то получаем следующую формулу

$$M(t)-M_m(t)=\int_{t_1}^{t}Y(t,\tau)(A_m(\tau)-A(\tau))^\top M_m(\tau)d\tau.$$

Здесь $Y(t,\tau)$ есть фундаментальная матрица системы $\dot x=-A^\top(t)x$, непрерывная по t,τ. Следовательно, последнее равенство означает, что $M_m(t)\rightrightarrows M(t)$. Матрица $B_m(\cdot)$ равномерно сходится к $B(\cdot)$ [5, док-во леммы 1]. Отсюда $V^m(t_0,t_1)\to V(t_0,t_1),\ m\to\infty$. Если $V(t_0,t_1)$ положительно определена, то для достаточно больших m матрица $V^m(t_0,t_1)$ будет также положительно-определенной, следовательно, пара $(A_m(t),B_m(t))$ управляема на подпространстве $\mathbb{R}^k$.

□

3 Экстремальные свойства граничных точек множества достижимости

Определим отображения $F : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{R}^n$ и $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ следующим образом: $F(u(\cdot)) = x(t_1)$, $Sx(t_1) = P_k x(t_1)$, где $x(t)$ — траектория системы (1), отвечающая $u(\cdot)$. Тогда их композиция $H : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{R}^k$ есть не что иное, как $H(u(\cdot)) = P_k F(u(\cdot)) = P_k x(t_1)$.

Справедлива

Лемма 2 *Пусть функции $f_1(t,x)$, $f_2(t,x)$ непрерывны, непрерывно дифференцируемы по x и удовлетворяют условиям (2) и (3). Тогда функция H непрерывно дифференцируема по Фреше для $\forall u(\cdot) \in \mathbb{L}_2[t_0,t_1]$, ее производная Фреше $H' : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{R}^k$ определена равенством*

$$H'(u(\cdot))\delta u(\cdot) = P_k \delta x(t_1). \tag{8}$$

Здесь $\delta x(t)$ — решение линеаризованной вдоль $(u(t), x(t))$ системы (1), отвечающее управлению $\delta u(t)$ и нулевому начальному условию. Если линеаризованная система вполне управляема по первым k координатам, то $\operatorname{Im} H'(u(\cdot)) = \mathbb{R}^k$.

Доказательство. В [5, л. 2] показана дифференцируемость отображения F по Фреше, производная которого $F'(u(\cdot))\delta u(\cdot) = \delta x(t_1)$. Линейное отображение S также дифференцируемо и $S'(x(t_1))\delta x(t_1) = P_k$. Таким образом, отображение H дифференцируемо по Фреше как композиция дифференцируемых отображений и имеет место равенство

$$H'(u(\cdot))\delta u(\cdot) = S'(x(t_1)) \circ F'(u(\cdot)) = P_k \delta x(t_1).$$

□

Лемма 3 *Функционал $J(u(\cdot))$ непрерывен в любой точке $u^0(\cdot) \in \mathbb{L}_2$.*

Доказательство. Как уже говорилось, под решением (траекторией) системы (1), отвечающим управлению $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$, понимаем абсолютно непрерывную функцию $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$, для которой равенство (1) выполняется для почти всех $t \in [t_0, t_1]$. Зададим управление $u^0(\cdot)$ из $\mathbb{L}_2$, которому соответствует траектория $x^0(\cdot)$. Тогда справедлива оценка для любых $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$:

$$\left| J(u(\cdot)) - J(u^0(\cdot)) \right| =$$

$$= \left| \int_{t_0}^{t_1} \Big([Q(t,x(t)) - Q(t,x^0(t))] + (u^\top(t) - {u^0}^\top(t)) R(t) u(t) + {u^0}^\top(t) R(t)(u(t) - u^0(t)) \Big)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_t \| Q(t,x(t)) - Q(t,x^0(t)) \| \cdot |t_1 - t_0| + \| u(\cdot) - u^0(\cdot) \|_{\mathbb{L}_2} \| R(\cdot) \|_C \left(\| u(\cdot) \|_{\mathbb{L}_2} + \| u^0(\cdot) \|_{\mathbb{L}_2} \right)$$

$$\leqslant \max_t \| Q(t,x(t)) - Q(t,x^0(t)) \| \cdot |t_1 - t_0| + C \cdot \| u(\cdot) - u^0(\cdot) \|_{\mathbb{L}_2}, \quad C > 0. \tag{9}$$

Функция $Q(t,x(t))$ непрерывна на компактном множестве траекторий системы (1), поэтому равномерно непрерывна на нём. Пусть $\Delta u(t) = u(t) - u^0(t)$, $\Delta x(t) = x(t) - x^0(t)$, а $\Delta J(u(\cdot)) = J(u(\cdot)) - J(u^0(\cdot))$. Из оценки $\| \Delta x(\cdot) \|_C = O\left(\| \Delta u(\cdot) \|_{\mathbb{L}_2}\right)$, которая была получена в доказательстве леммы 2 из [5], вытекает: для любого $\delta > 0$ из $\| \Delta u(\cdot) \|_{\mathbb{L}_2} < \delta$ следует $\| \Delta x(t) \| < k\delta,\ k > 0$. Тогда, учитывая равномерную непрерывность $Q(t,x(t))$, всегда найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого $\varepsilon > 0$ из $\| \Delta u(\cdot) \|_{\mathbb{L}_2} < \delta$ будет следовать $|\Delta J(u(\cdot))| < \varepsilon$. Таким образом, выполнено условие непрерывности исходного функционала. □

Теорема 1 *Пусть:*

1) $y^1 \in \partial G_{1k}(t_1)$;

2) $u(\cdot) \in U$ — управление, переводящее систему (1) из $x(t_0) = x^0$ в точку $x(t_1)$ такую, что $P_k x(t_1) = y^1$, $x(t)$ — соответствующая траектория;

3) Линеаризованная вдоль $(x(t), u(t))$ система (1) управляема по $y = P_k x$ на $[t_0, t_1]$.

Тогда управление $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$ доставляет локальный минимум функционалу $J(u(\cdot))$ при ограничениях $x(t_0) = x^0$, $P_k x(t_1) = y^1$ и величина $J(u(\cdot)) = \mu^2$.

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Пусть найдется $u(\cdot)$, переводящее систему из $x(t_0) = x^0$ в $P_k x(t_1) = y(t_1) \in \partial G_{1k}(t_1)$, которое не является локально оптимальным в задаче 1, иначе говоря, для любого p существует допустимое управление $u^p(\cdot)$ такое, что

$$\| u(\cdot) - u^p(\cdot) \|_{\mathbb{L}_2} < \frac{1}{p}, \quad J(u^p(\cdot)) < J(u(\cdot)),$$

либо $J(u(\cdot)) < \mu^2$. Тогда существует последовательность $u^p(\cdot) \to u(\cdot)$, $p \to \infty$ в $\mathbb{L}_2$ такая, что $P_k x^p(t_1, u^p(\cdot)) = y(t_1)$, а $J(u^p(\cdot)) < \mu^2$. Далее, выберем p настолько большим, чтобы пара $(A_p(t), B_p(t))$ была управляемой по y (см. лемму 1) и зафиксируем это p. Обозначим

$$\delta = \mu^2 - J(u^p(\cdot)) > 0.$$

Тогда

$$J(u^p(\cdot)) < \mu^2 - \delta/2.$$

Из леммы 2 получаем, что линеаризованная вдоль $(u^p(\cdot), x^p(\cdot))$ система управляема по y, это эквивалентно условию $\operatorname{Im} H'(u^p(\cdot)) = \mathbb{R}^k$. Тогда по теореме Грейвса [8, с. 105] для некоторого $m > 0$ и всех достаточно малых r выполняется включение $B(y^1, mr) \subset F(B(u^p(\cdot), r))$.

Таким образом,

$$B(u^p(\cdot), r) \subset U \Rightarrow F(B(u^p(\cdot), r)) \subset F(U) \subset G_{1k}(t_1),$$

отсюда следует $B(y^1, mr) \subset G_{1k}(t_1)$, что противоречит условию $y^1 \in \partial G_{1k}(t_1)$. □

Выпишем необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума для задачи 1, предполагая, что $Q(t,x)$ непрерывно дифференцируема.

Функция Понтрягина здесь имеет вид

$$H(p,t,x,u) = -p_0 \left(Q(t,x) + u^\top R(t) u\right) + p^\top (f_1(t,x) + f_2(t,x)u), \quad p_0 \geqslant 0.$$

Локально оптимальное управление удовлетворяет принципу максимума (см., например, [9, §5, т. 2]): существуют $(p_0, p(\cdot)) \neq 0$ такие, что

$$H(p(t), t, x(t), u(t)) = \max_{v \in \mathbb{R}^r} H(p(t), t, x(t), v).$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial}{\partial x} H(p(t), t, x(t), u(t)) = -A^\top(t) p(t) + p_0 \nabla^\top Q(t, x(t)),$$

$$p_j(t_1) = 0, \quad j = k+1, ..., n. \tag{10}$$

Равенства (10), в силу частичного закрепления концов траекторий, есть *условия трансверсальности* на правом конце. Через $(A(t), B(t))$, как и ранее, обозначаем матрицы линеаризованной вдоль $(x(t), u(t))$ системы. Если эта линеаризованная на $(x(t), u(t))$ система вполне управляема по выходу y, то $p_0 \neq 0$.

Предположим, что $p_0 = 0$. Тогда $p(\cdot) \neq 0$. Максимум по v линейной по управлению функции

$$H(t, x(t), p(t), v) = p^\top(t) f_1(t, x(t)) + p^\top(t) f_2(t, x(t)) v = p^\top(t) f_1(t, x(t)) + p^\top(t) B(t) v$$

существует, если $p^\top(t) B(t) \equiv 0$, где $p(t)$ удовлетворяет системе $\dot{p}(t) = -A^\top(t) p(t)$. С учетом (10) $p(t_1)$ имеет вид $p(t_1) = \begin{pmatrix} l_k \\ 0 \end{pmatrix}$, где $l_k \in \mathbb{R}^k$, $l_k \neq 0$. Представим $p(t)$ в виде $p(t) = \left(l_k^\top, 0^\top\right) X(t_1, t)$, где $X(\tau, t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$. Тогда

$$\left(l_k^\top, 0^\top\right) X(t_1, t) B(t) \equiv 0,$$

или

$$l_k^\top P_k X(t_1, t) B(t) \equiv 0.$$

Поэтому

$$l_k^\top P_k x(t_1) = l_k^\top P_k \int_{t_0}^{t_1} X(t_1, t) B(t) u(t) dt = 0 \quad \forall u(\cdot) \in \mathbb{L}_2.$$

Иначе говоря $l_k \perp P_k x(t_1)$. Из последнего и $P_k x(t_1) = \mathbb{R}^k$ (следует из управляемости на $\mathbb{R}^k$) получаем $l_k = 0$, что противоречит начальному предположению $p(t_1) = \begin{pmatrix} l_k \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$. Справедливо принять $p_0 = \frac{1}{2}$. Тогда из принципа максимума получим $u(t) = R^{-1}(t) f_2^\top(t, x(t)) p(t)$.

Замыкая исходную систему данным управлением, имеем

$$
\begin{gathered}
\dot{x}(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t)) R^{-1}(t) f_2^\top(t, x(t)) p(t),\ x(t_0) = x^0, \\
\dot{p}(t) = -\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}^\top(t, x(t)) + D^\top(t, x(t), v)\right) p(t) + \frac{1}{2}\nabla^\top Q(t, x(t)), \\
p_j(t_1) = 0, \quad j = k+1, ..., n.
\end{gathered}
\tag{11}
$$

где обозначено $D(t, x, v) = \frac{\partial}{\partial x}(f_2(t, x)v),\ v = R^{-1}(t) f_2^\top(t, x(t)) p(t)$.

4 Численное моделирование

4.1 Описание алгоритма

Соотношение (11) можно положить в основу следующего алгоритма построения границы множества достижимости.

Выбирая $p(t_0) \neq 0$ и интегрируя систему (11) (учитывая условия трансверсальности), мы получим управление и траекторию, удовлетворяющие принципу максимума. Перебирая $p(t_0)$ из регулярной сетки, аппроксимирующей область $\{p(t_0) \in \mathbb{R}^n :\ |p_i(t_0)| \leqslant c_i,\ i = 1, 2, ..., n\}$, интегрируя систему (11) и отбирая те траектории, для которых $|J(u(\cdot)) - \mu^2|$ не превосходит малого $\varepsilon_1 > 0$, мы получим аппроксимацию части границы множества достижимости, образованную точками $y^1 = P_k x(t_1)$. Плюс ко всему, при отсеивании траекторий, нужно проверять выполнение условий трансверсальности на правом конце: $|p_j(t_1)| < \varepsilon_2,\ j = k+1, ..., n$, для малого $\varepsilon_2 > 0$. Для достаточно больших c_i и малых ε_1 и ε_2 аппроксимироваться будет вся граница, если на каждой из возможных траекторий выполняется условие полной управляемости линеаризованной системы. Данный алгоритм, использованный в [5] при построении множеств достижимости, требует достаточно больших вычислительных затрат и априорной оценки области начальных данных для $p(t_0)$.

Здесь мы используем другой алгоритм, обеспечивающий более экономную схему вычислений. Приведем его описание для двумерного случая и $P_k = I$. Будем выбирать направления на единичной сфере: $\{p^* \in \mathbb{R}^2 :\ p^* = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\end{pmatrix}^\top, \alpha \in [0; 2\pi]\}$. На каждом луче $\{p \in \mathbb{R}^2 :\ p = kp^*,\ k > 0\}$ мы ищем значение k, для которого достигается минимум $\left(J(u(\cdot)) - \mu^2\right)^2$, на полуинтервале $[0; +\infty)$. Для этой цели можно использовать стандартную процедуру одномерной оптимизации. Найденное значение $\bar{k}$ определяет наш вектор $p = \bar{k}\bar{p^*}$, выбирая который в качестве начального условия для системы принципа максимума, мы получим точку $x(t_1)$, лежащую на границе множества достижимости. В трехмерном случае рассуждения похожи, если использовать, например, сферические координаты.

4.2 Пример 1

Напомним, что математическая модель “хищник-жертва” представляет собой систему двух нелинейных дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= ax_1 - cx_1x_2, \quad a > 0,\ c > 0, \\
\dot{x}_2 &= -bx_1 + dx_1x_2,\ b > 0,\ d > 0,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

причем x_1 – число жертв, x_2 – число хищников.

Эта математическая модель успешно применяется в биологии, демографии, физике и экономике. В частности, она может быть применена в экономике для анализа изменения объемов закупок в зависимости от цены (модель не содержит объемов предложения электроэнергии, так как для рынка электроэнергии они примерно постоянны). В этом случае цена выступает в роли хищника, а объемы закупок – в роли жертвы (“цена съедает спрос”). Объясним это подробнее.

Обозначим объемы закупок электроэнергии в секторе свободной торговли через x_1, цену электроэнергии через x_2. Спрос тем быстрее уменьшается, чем больше проданной электроэнергии и чем больше ее цена. Иными словами, цена тем быстрее снижает закупки, чем более насыщен рынок электроэнергии по этой цене (x_1x_2). Поэтому, если объемы закупок электроэнергии ненулевые, то объемы закупок электроэнергии меняются по закону $\dot{x}_1 = ax_1 - cx_1x_2$ ($a > 0,\ c > 0$). С другой стороны, прибыль, получаемая поставщиками от продажи электроэнергии, стимулирует увеличение цены. Прибыль пропорциональна количеству проданного товара по его цене (x_1x_2). Поэтому имеем $\dot{x}_2 = -bx_2 + dx_1x_2$ ($b > 0,\ d > 0$). Модель "цена-объемы покупок" построена.

Полученная модель достаточно точно описывает динамику цен и объемов закупок электроэнергии, которая позволяет предсказывать изменение конъюнктуры на рынке электроэнергии.

Обозначим за управление u неопределенные факторы, влияющие на объем покупок и наложим на x_1 (объем закупок) и u квадратичные интегральные ограничения:

$$\begin{array}{ll} \dot{x}_1 = ax_1 - cx_1x_2 + u, & a > 0,\ c > 0, \\ \dot{x}_2 = -bx_1 + dx_1x_2, & b > 0,\ d > 0, \end{array} \quad \int_{t_0}^{t_1} \left(x_1^2(s) + u^2(s)\right) ds \leqslant 2. \tag{13}$$

Примем $a = 4,\ b = 2.5,\ c = 2,\ d = 1$. Считаем, что в нулевой момент времени объем закупок равен 1, а цена 3.

Тогда получаем следующее условие:

$$\begin{array}{l} \dot{x}_1 = 4x_1 - 2x_1x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = -2.5x_1 + x_1x_2, \end{array} \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}^\top, \quad \int_0^{t_1} \left(x_1^2(s) + u^2(s)\right) ds \leqslant 2. \tag{14}$$

Результаты численного моделирования представлены на рис. 1 и 2.

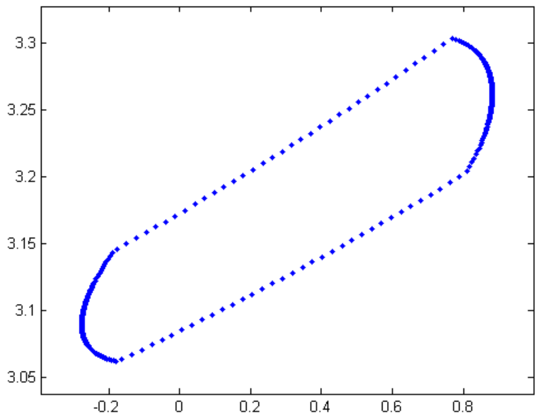

Рис. 1: Множество достижимости при $t_1 = 0.5$

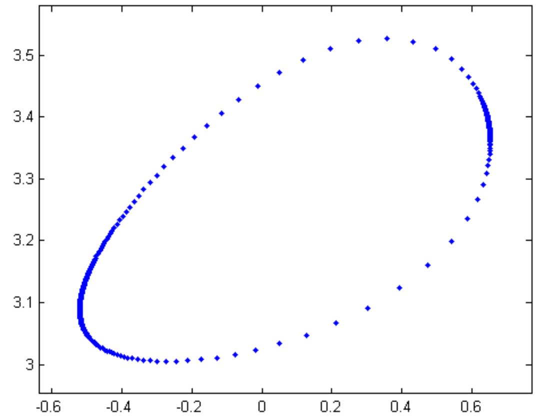

Рис. 2: Множество достижимости при $t_1 = 1$

4.3 Пример 2

Рассмотрим математический маятник с ограничением на энергию управления [1]:

$$\begin{array}{ll} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{2}\sin x_1 + u, & x_2(0) = 0 \end{array} \tag{15}$$

$$\int_0^{t_1} u^2(s) ds \leqslant 2.$$

Результаты численного моделирования представлены на рис. 3 и 4.

Благодарности

Выражаю благодарность своему научному руководителю Михаилу Ивановичу Гусеву за ценные советы при планировании исследования и рекомендации по оформлению статьи.

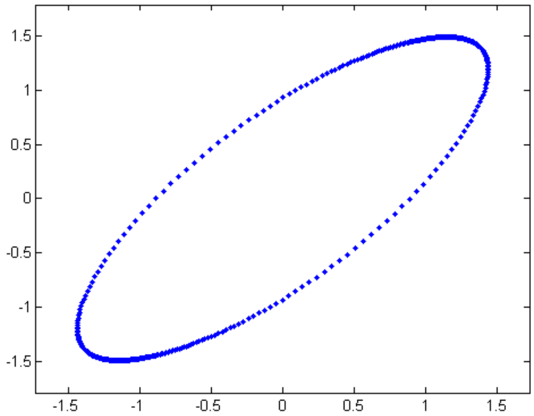

Рис. 3: Множество достижимости при $t_1 = \pi/2$

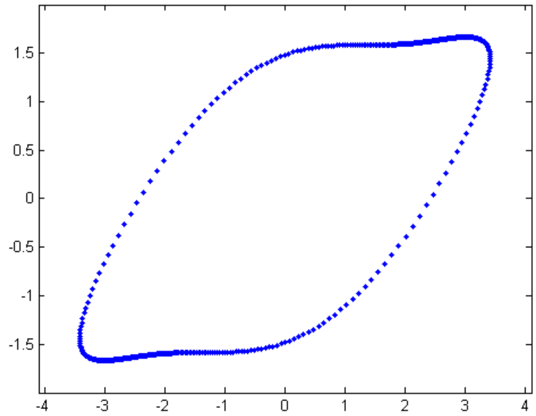

Рис. 4: Множество достижимости при $t_1 = \pi$

Список литературы

[1] B. T. Polyak. Convexity of the reachable set of nonlinear systems under $\mathbb{L}_2$ bounded controls. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A: Mathematical Analysis*, 11:255–267, 2004.

[2] N. Huseyin, A. Huseyin. Compactness of the set of trajectories of the controllable system described by an affineintegral equation. *Applied Mathematics and Computation*, 219:8416–8424, 2013.

[3] Kh. G. Guseinov, A. S. Nazlipinar. Attainable sets of the control system with limited resources. *Tr. In-ta matematiki i mekhaniki UrO RAN*, 16(5):261–268, 2010.

[4] K. G. Guseinov, O. Ozer, E. Akyar, V. N. Ushakov. The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls. *Nonlinear Differential Equations and Applications*, 14(1-2):57–73, 2007.

[5] M. I. Gusev, I. V. Zykov. On extremal properties of boundary points of attainability sets of controllable systems under integral constraints. *Tr. In-ta matematiki i mekhaniki UrO RAN*, 23(1):103-115, 2017 (in Russian). = М. И. Гусев, И. В. Зыков. Об экстремальных свойствах граничных точек множеств достижимости управляемых систем при интегральных ограничениях. *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, 23(1):103–115, 2017.

[6] Ya. N. Roytenberg. *Automatic control.* Nauka, Moscow, 1971 (in Russian). = Я. Н. Ройтенберг. *Автоматическое управление.* Наука, Москва, 1971.

[7] A. F. Filippov. *Differential equations with discontinuous right-hand side.* Nauka, Moscow, 1985 (in Russian). = А. Ф. Филиппов. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.* Наука, Москва, 1985.

[8] A. D. Ioffe. Metric regularity and subdifferential calculus. *UMN*, 55(3):103–162, 2000 (in Russian). = А. Д. Иоффе. Метрическая регулярность и субдифференциальное исчисление. *УМН*, 55(3):103–162, 2000.

[9] A. V. Arutyunov, G. G. Magaril-Il'yaev, V. M. Tikhomirov. *The Pontryagin maximum principle. Proof and applications.* M.: Faktorial press, Moscow, 2006 (in Russian). = А. В. Арутюнов, Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров. *Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения.* Факториал пресс, Москва, 2006.

On the reachability problem for a nonlinear control system with integral constraints

Igor V. Zykov
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics (Yekaterinburg, Russia)

Keywords: controlled system, integral constraints, projection of the reachability set, maximum principle.

In this paper we consider linear control systems with integral constraints on a control and a trajectory. It is shown that the control that takes the system to the boundary of the projection of the reachability set on a given linear subspace is a solution of some optimal control problem with an integral functional and, consequently, satisfies the maximum principle.