Наиболее скрытая траектория в $\mathbb{R}^3$

В.И. Бердышев
bvi@imm.uran.ru

ИММ УрО РАН (Екатеринбург)

Аннотация

Пусть объект t движется внутри заданного коридора Y при наличии группы $\mathbb{S}$ враждебных наблюдателей $S \notin Y$, каждый из которых имеет фиксированный конус обзора $K(S)$. Решается задача поиска наиболее удаленной от $\mathbb{S}$ траектории объекта при условии, что кратность покрытия Y конусами $K(S)$ не превосходит двух.

1 Введение

Пусть $Y \subset \mathbb{R}^3$ — “коридор”, являющийся замкнутой окрестностью гладкой траектории, соединяющей фиксированные точки $t_* \neq t^*$:

$$\mathcal{T}_0 = \{t(\tau) : \ 0 \leqslant \tau \leqslant 1, \ t(0) = t_*, \ t(1) = t^*\}, \tag{1}$$

при этом граница ∂Y гомеоморфна сфере. В коридоре Y движется объект t. Совокупность траекторий вида (1), содержащихся в Y, обозначим через $\mathbb{T}$. Множество будем называть *секущим*, если с ним пересекается каждая траектория из $\mathbb{T}$. Имеется набор $\mathbb{S} = \{S\}$ неподвижных недружественных наблюдателей $S \notin Y$. Каждый из них снабжен фиксированным выпуклым открытым конусом наблюдения $K(S)$ с вершиной S, который является *секущим* множеством. *Секущую* связную компоненту пересечения $K(S) \cap Y$, ближайшую к S, обозначим через $K_Y(S)$. Определим расстояние от S до точки $t \in Y$ следующим образом:

$$\rho(S,t) = \begin{cases} d\|S-t\| & \text{при} \ \ t \in K(S), \\ +\infty & \text{при} \ \ t \notin K(S), \end{cases}$$

и введем уклонение траектории $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ от $\mathbb{S}$

$$\mathbb{M}(\mathbb{S}, \mathcal{T}) = \min\{\rho(S,t) : \ t \in \mathcal{T}, \ S \in \mathbb{S}\}. \tag{2}$$

Весовой коэффициент $d = d(S)$ зависит от возможностей наблюдателя и далее полагается равным единице. Задача объекта – поиск траектории $\mathcal{T}^* \in \mathbb{T}$, доставляющей максимум

$$\mathbb{M} = \mathbb{M}(\mathbb{S}) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\mathbb{M}(\mathbb{S}, \mathcal{T}) : \ \mathcal{T} \in \mathbb{T}\}. \tag{3}$$

Множество таких траекторий обозначим через $\mathbb{T}^*$. Сторона, обеспечивающая наблюдение, размещает наблюдателей так, чтобы величина (3) оказалась по возможности малой. Задача (3) для пространства $\mathbb{R}^2$ рассматривалась в [1] (см. также [2]).

В данной работе предполагается, что кратность покрытия области Y совокупностью множеств $K_Y(S)$ не более двух.

In: A.A. Makhnev, S.F. Pravdin (eds.): Proceedings of the International Youth School-conference «SoProMat-2017», Yekaterinburg, Russia, 06-Feb-2017, published at http://ceur-ws.org

2 Случай одиночного наблюдателя

Пусть в $\mathbb{S}$ единственный наблюдатель S, тогда

$$\mathbb{M} = \max_{\mathcal{T}\in\mathbb{T}} \min\{\rho(S,t):\ t\in\mathcal{T}\}. \tag{4}$$

Поведение траектории $\mathcal{T}\in\mathbb{T}$ в зоне обзора наблюдателя S удобно отслеживать по точкам пересечения $\mathcal{T}$ с плоскостями H некоторого семейства $\mathcal{H}=\mathcal{H}(S)=\{H\}$ *секущих* плоскостей. В качестве $\mathcal{H}$ в данном случае можно взять, например, семейство плоскостей H, содержащих S, точку $t=t(\tau)\in\mathcal{T}_0$ и нормаль в точке $t=t(\tau)$ к поверхности, образованной лучами $\{S+\lambda(t(\tau\pm 0)-S):\ \lambda>0\}$, для точек на траектории $\mathcal{T}_0$ из окрестности точки t. Обозначим

$$M(S) = \min_{H\in\mathcal{H}} \max\{\rho(S,y):\ y\in H\cap K_Y(S)\}, \tag{5}$$

$\mathcal{H}^*=\mathcal{H}^*(S)$ — множество плоскостей, реализующих минимум в (5), $\mathcal{P}_{S,H}$ — множество точек из $H\cap K_Y(S)$, доставляющих максимум в (5), и $\mathcal{P}_S=\{\mathcal{P}_{S,H}:\ H\in\mathcal{H}^*\}$. Пусть отображение $H\to\mathcal{P}_{S,H}$ непрерывно по Хаусдорфу. Имеет место

Теорема 1. *Имеем* $\mathbb{M}=M(S)$. *Траектория* $\mathcal{T}=\mathcal{T}(S)\in\mathbb{T}$, *удовлетворяющая условиям*

$$\mathcal{T}\subset\partial Y, \quad (\mathcal{T}\cap H)\subset\mathcal{P}_{S,H} \quad \forall\ H\in\mathcal{H}^*,$$

$$\rho(t,S)\geqslant M(S) \quad \forall\ t\in\mathcal{T}\cap K_Y(S),$$

является оптимальной.

3 Поиск оптимальной траектории при наличии двух наблюдателей

Пусть $\mathbb{S}$ — пара наблюдателей. Для заданного S определим “левую” $\mathcal{L}(S)$ и “правую” $\mathcal{R}(S)$ части границы $\partial K_Y(S)$: движущаяся от t_* к t^* точка $t\in Y$ сперва встречается с $\mathcal{L}(S)$ и затем с $\mathcal{R}(S)$ при выходе из $K_Y(S)$. Границы $\mathcal{L}(S)$, $\mathcal{R}(S)$ являются *секущими.* Для пары $\mathbb{S}=\{S_1,S_2\}$ обозначим

$$\mathcal{K}=K_Y(S_1)\cap K_Y(S_2), \quad \widehat{K}(S)=Y\cap\operatorname{conv}(S\cup\mathcal{K}),$$

где conv — выпуклая оболочка множества, и определим “углы”:

$\angle\mathcal{L}=\angle\mathcal{L}(S_1,S_2)$ — множество точек из Y, лежащих слева от $\mathcal{R}(S_i)$ $(i=1,2)$;

$\angle\mathcal{R}=\angle\mathcal{R}(S_1,S_2)$ — множество точек из Y, лежащих справа от $\mathcal{L}(S_i)$ $(i=1,2)$.

Пусть $\mathcal{K}\neq\varnothing$. Пару $\mathbb{S}=\{S_1,S_2\}$ назовем четной, если оба множества $\widehat{K}_i=\widehat{K}(S_i)$ $(i=1,2)$ лежат в одном из углов $\angle\mathcal{L}$ или $\angle\mathcal{R}$, и нечетной, если эти множества лежат в разных углах.

3.1. Рассмотрим случай четной пары $\mathbb{S}=\{S_1,S_2\}$. Пусть $\widehat{K}_i\subset\angle\mathcal{L}(\mathbb{S})$ $(i=1,2)$, $\mathcal{L}(S_1)\cap\mathcal{L}(S_2)\neq\varnothing$. Конические поверхности $Q_1=\mathcal{L}(S_2)\cap K_Y(S_1)$, $Q_2=\mathcal{L}(S_1)\cap K_Y(S_2)$ являются выпуклыми. Из точки S_1 видна Q_1, но не видна Q_2. Из точки S_2 видна Q_2, но не видна Q_1. Дуга $\gamma=\gamma(S_1,S_2)=Q_1\cap Q_2$ не видна из точек S_1 и S_2. Пересечение $\Delta_1=Q_1\cap\partial Y$ состоит из соединенных посредством γ двух дуг Δ_1', Δ_1'', которые видны из S_1, но не видны из S_2. Аналогично определим пару дуг $\Delta_2=\Delta_2'\cup\Delta_2''$.

Предполагая, что (рис. 1)

$$\rho(S_1,\Delta_1)\geqslant\rho(S_2,\Delta_2), \tag{6}$$

построим оптимальную траекторию $\mathcal{T}$. Легко убедиться, что среди траекторий из $\mathbb{T}^*$ есть траектория, первый участок которой начинается в t_* и заканчивается в одной из точек $\gamma\cap\Delta_1'$, $\gamma\cap\Delta_1''$, которую обозначим через t_{**}. Ввиду неравенства (6) эта траектория в окрестности дуги γ не пересекается с внутренностью конуса $K(S_2)$. Для поиска следующего участка построим пучок $\mathcal{H}$ плоскостей H, содержащих S_1 и пересекающих лучи конуса $\mathcal{L}(S_2)$. Поскольку поверхность $\mathcal{L}(S_2)$ выпукла, то $\max\{\rho(S_1,t):\ t\in H\cap Q_1\}$ достигается на дугах Δ_1', Δ_1''. Выберем ту из них, на которой реализуется $\max\{\rho(S_1,\Delta_1'),\rho(S_1,\Delta_1'')\}$, и обозначим ее через $\Delta(S_1,S_2)$. Пусть $\mathcal{T}(S_2)\in\mathbb{T}$ — траектория, реализующая $\max\rho(S_2,\mathcal{T})$ (4). Включим в состав траектории $\mathcal{T}$ дугу $\Delta(S_1,S_2)$, участок дуги $\mathcal{L}(S_2)\cap\partial Y$ от $\Delta(S_1,S_2)$ до пересечения с ней траектории $\mathcal{T}(S_2)$ и далее участок траектории $\mathcal{T}(S_2)$ от этого пересечения до точки t^*. Начальный участок

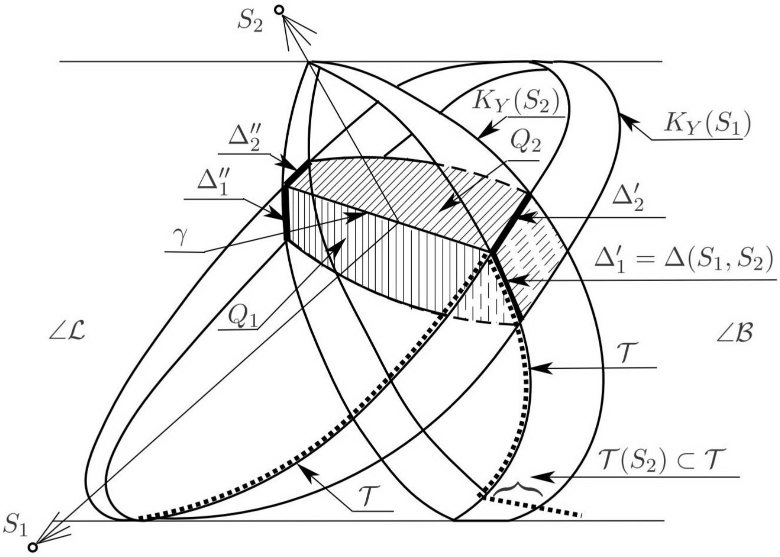

Рис. 1: Четная пара

траектории $\mathcal{T}$ от точки t_* до t_{**} и конечный участок от $K_Y(S_2)$ до t^* траектории принадлежат дополнению $Y \backslash (K(S_1) \cup K(S_2))$ и поэтому не видны из $S_1,\ S_2$. Для построенной траектории $\mathcal{T}$ имеем

$$\mathbb{M}(\mathbb{S}, \mathcal{T}) = \min\{\rho(S_1, \Delta(S_1, S_2)), M(S_2)\}.$$

Существует $\gamma > 0$ такое, что при условии $\rho(S_i, K(S_j)) > \gamma,\ (i, j \in \{1, 2\},\ i \neq j)$ траектория $\mathcal{T}$ является оптимальной. В случае равенства в соотношении (6) оптимальной, в зависимости от величины $M(S_1)$, может оказаться траектория, построенная с использованием дуг $\Delta_2',\ \Delta_2''$. Справедлива

Теорема 2. *Если* $\mathbb{S}$ *— четная пара, то*

$$\mathbb{M}(\mathbb{S}) = \max\big\{\min\{\rho(S_1, \Delta(S_1, S_2)), M(S_2)\}, \min\{p(S_2, \Delta(S_2, S_1)), M(S_1)\}\big\}. \tag{7}$$

Для численного решения задачи важно отметить, что представленная здесь траектория $\mathcal{T}$ строится из фрагментов дуг $\mathcal{L}(S) \cap \partial Y,\ \mathcal{R}(S) \cap \partial Y$ и траектории $\mathcal{T}(S)$ (см. теорему 1).

3.2. Пусть пара нечетная, $\widehat{K}_1(S_1) \subset \angle\mathcal{L},\ \widehat{K}_2(S_2) \subset \angle\mathcal{R}$. Тогда $\mathcal{P}_{S_1} \subset \angle\mathcal{R},\ \mathcal{P}_{S_2} \subset \angle\mathcal{L}$, и если, в простейшем случае, траектории $\mathcal{T}(S_i)$ $(i = 1, 2)$, реализующие максимум в (4), удовлетворяют условию $\mathcal{T}(S_i) \cap K(S_i) \cap \mathcal{K} = \varnothing$, то

$$\mathbb{M}(S) = \min\{M(S_i):\ i = 1, 2\}. \tag{8}$$

4 О расположении наблюдателей

В случае нечетной пары объект имеет возможность удаляться от наблюдателей к противоположной стенке коридора Y. Особенно просто в этом убедиться, сравнивая соотношения (7) и (8). Поэтому сторона, обеспечивающая наблюдение, предпочитает использовать четные пары наблюдателей. При наличии большого числа наблюдателей целесообразно располагать их вокруг коридора Y, формируя четные пары. Пары, для которых $([S_1, S_2] \cap Y) \subset \mathcal{K}$, не рассматриваются.

Набор $\mathbb{S}$ наблюдателей группируют в два блока S^i $(i = 1, \ldots, n)$, S_j $(j = 1, \ldots, m)$ таких, что $K^i =$

$K_Y(S^i),\ K_j = K_Y(S_j)$ удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{array}{l} K^i \cap K^{i'} = \varnothing\ (i \neq i'),\ K_j \cap K_{j'} = \varnothing\ (j \neq j');\\ K^i\ \text{ упорядочены (слева направо) по }\ i,\ K_j\ \text{ упорядочены по }\ j;\\ \forall\ i\ \exists\ j:\ K^i \cap K_j \neq \varnothing;\ \forall\ j\ \exists\ i\ \exists\ j:\ K^i \cap K_j \neq \varnothing;\\ \text{множество }\ \cup_{i,j}(K^i \cup K_j)\ \text{ связно;}\\ \text{если }\ K^i \cap K_j \neq \varnothing,\ i \neq j,\ \text{то } \{S^i, S_j\}\ \text{ — четная пара со свойством } (6),\ i,j \in \{1,2\}. \end{array}\right\} \qquad (9)$$

4.1 Жадный алгоритм построения траектории

Рассмотрим произвольную пару S^i, S_j, для которой $K^i \cap K_j \neq \varnothing$. Для нее в соответствии с п. 3.1 (переобозначим в нем S_1 на S_j, S_2 на S^i) определены поверхности $Q^i = \mathcal{L}(S_j) \cap K^i$, $Q_j = \mathcal{L}(S^i) \cap K_j$, дуга $\gamma_j^i = Q^i \cap Q_j$, невидимая из точек S^i, S_j, и две пары дуг

$$(\Delta^i)' \cup (\Delta^i)'' = Q \cap \partial Y, \quad \Delta_j' \cup \Delta_j'' = Q_j \cap \partial Y.$$

Дуги каждой пары соединены дугой γ_j^i. Из первой пары выделим дугу $\Delta(S^i, S_j)$, на которой реализуется максимум

$$m(S^i, S_j) \overset{\text{def}}{=} \max\{\rho(S^i, (\Delta^i)'), \rho(S^i, (\Delta^i)'')\} = \rho(S^i, \Delta(S^i, S_j)).$$

Из второй пары выделим дугу $\Delta(S_j, S^i)$, доставляющую максимум

$$m(S_j, S^i) \overset{\text{def}}{=} \max\{\rho(S_j, \Delta_j'), \rho(S_j, \Delta_j'')\} = \rho(S_j, \Delta(S_j, S^i)).$$

Пусть множества $\widehat{K}(S^1)$, $\widehat{K}(S_1)$ принадлежат углу $\angle\mathcal{L}(S^1, S_1)$. Набор $\mathbb{S}$ построен так, что если для пары S^i, S_j выполнено условие $K_Y(S^i) \cap K_Y(S_j) \neq \varnothing$, то оба множества $\widehat{K}(S^i)$, $\widehat{K}(S_j)$ принадлежат углу $\angle\mathcal{L}(S^i, S_j)$. Построим участок траектории $\mathcal{T}$, соединяющий первую пару $K(S^1)$, $K(S_1)$ с последней парой. Допустим, $m(S^1, S_1) > m(S_1, S^1)$. Включим в $\mathcal{T}$ дугу $\Delta(S^1, S_1)$ и ее продолжение в сторону от S_1 по дуге $\mathcal{L}(S_1) \cap \partial Y$ до первой встречи с конусом $K(S^{i_1})$, для которого выполняется неравенство $m(S^{i_1}, S_1) < m(S_1, S^{i_1})$. Пусть t_1 — начальная точка построенного участка траектории, t_2' — конечная точка этого участка, $t_1 \in \mathcal{L}(S^1) \cap \mathcal{L}(S_1)$, $t_2' \in \mathcal{L}(S^{i_1}) \cap \mathcal{L}(S_1)$. Пересечение $\mathcal{L}(S^{i_1}) \cap K_Y(S_1)$ состоит из двух дуг, и одна из них $\Delta(S_1, S^{i_1})$. Если $t_2' \in \Delta(S_1, S^{i_1})$, то положим $t_2 = t_2'$. Если дуга $\Delta(S_1, S^{i_1})$ лежит на противоположной от t_2' стороне коридора, то удлиним построенный участок траектории, присоединив к нему дугу $\gamma(S_1, S^{i_1})$ (см. п. 3.1). Один конец дуги γ — точка t_2'. Другой ее конец обозначим через t_2. На этом завершается построение участка $\mathcal{T}(t_1, t_2)$ траектории $\mathcal{T}$ от t_1 до t_2. Далее, рассуждая аналогично, присоединим к $\mathcal{T}(t_1, t_2)$ дугу $\Delta(S_1, S^{i_1})$ и ее продолжение по $\mathcal{L}(S^{l_1}) \cap \partial Y$ в сторону от S^{i_1} до первой встречи с конусом $K(S_{j_1})$, для которого выполняется неравенство $m(S_{j_1}, S^{i_1}) < m(S^{i_1}, S_{j_1})$, и т. д. Если на некотором шаге возникнет равенство $m(S_j, S^i) = m(S^i, S_j)$, то продолжение траектории можно осуществить двумя способами: присоединением любой из дуг $\Delta(S^i, S_j)$, $\Delta(S_j, S^i)$. Пусть построен участок $\mathcal{T}(t_{q-1}, t_q)$ траектории и точка t_q принадлежит последней паре $\{S^i, S_j\}$. Включим в $\mathcal{T}$ один из отрезков $\Delta(S^i, S_j)$, $\Delta(S_j, S^i)$ и завершим построение $\mathcal{T}$ на участке от t_q до t^* в соответствии с п. 3.1.

В процессе построения $\mathcal{T}$, при предположении $m(S^1, S_1) > m(S_1, S^1)$, последовательно задействованы дуги

$$\Delta(S^1, S_1),\ \Delta(S_1, S^{i_1}),\ \Delta(S^{i_1}, S_{j_1}),\ \Delta(S_{j_1}, S^{i_2}),\ \Delta(S^{i_2}, S_{j_2}), \ldots, \qquad (10)$$

правила выбора которых указаны выше. Имеет место

Теорема 3. *Пусть набор* $\mathbb{S}$ *удовлетворяет условиям* (9). *Для построенной в п.* 4.1 *траектории* $\mathcal{T}$ *выполняется соотношение:*

$$\mathbb{M} \geqslant \mathbb{M}(\mathbb{S}, \mathcal{T}) = \min\{m(S^i, S_j), m(S_j, S^i)\}, \qquad (11)$$

где минимум берется по всем парам наблюдателей, перечисленным в (10). *Неравенство* (11) *является точным на классе наборов* $\mathbb{S}$, *удовлетворяющих условиям* (9).

На рис. 2 приведен упрощенный вариант траектории $\mathcal{T}$ (изображена жирными дугами и точками). На ней не отражен случай, когда объект "перескакивает" по дуге γ на противоположную сторону коридора Y, а также случай неоднозначного продолжения траектории по одной из дуг $\Delta(S^i, S_j)$, $\Delta(S_j, S^i)$.

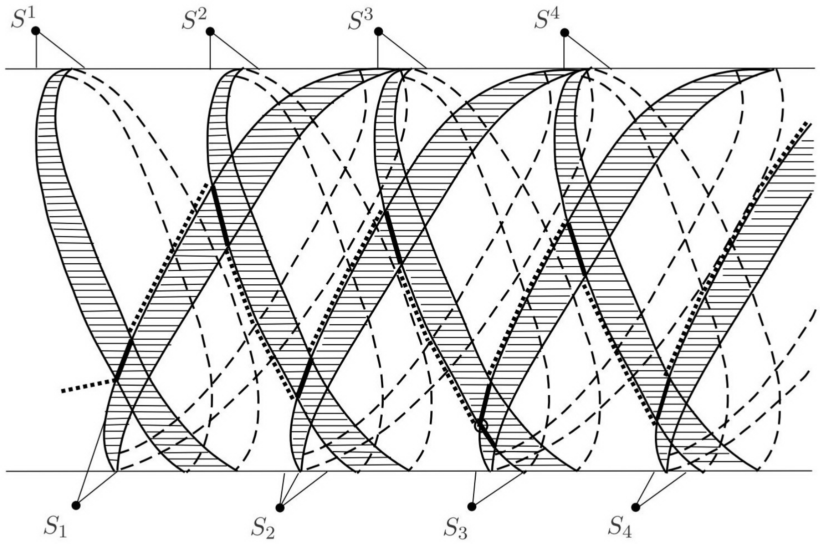

Рис. 2: Пример траектории

Благодарности

Работа выполнена при частичной поддержке Программы Президиума РАН “Математические задачи современной теории управления”.

Список литературы

[1] V. I. Berdyshev. Moving object in $\mathbb{R}^2$ and a group of observers. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 22(4):87–93, 2016. (in Russian). = В.И. Бердышев. Движущийся в $\mathbb{R}^2$ объект и группа наблюдателей. *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, 22(4):87–93, 2016.

[2] V. I. Berdyshev. A trajectory in $\mathbb{R}^3$ concealed from observers. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 22(2):45-52, 2016 (in Russian). = В.И. Бердышев. Траектория в $\mathbb{R}^3$, скрытая от наблюдателей. *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, 22(2):45-52, 2016.

The most concealed $\mathbb{R}^3$-trajectory

Vitalii I. Berdyshev
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics (Yekaterinburg, Russia)

Keywords: trajectory, observer, moving object.

Let an object move inside of a corridor $Y \subset \mathbb{R}^3$. There is a set $\mathbb{S}$ of rival observers $S \notin Y$; each of them has a fixed view cone $K(S)$. We assume that multiplicity of covering of corridor Y by the $K(S)$ does not exceed two. The problem of finding the most remote from $\mathbb{S}$ trajectory $\mathcal{T} \subset Y$ is solved.