Траектория объекта, наиболее удаленная от наблюдателей

А.А. Попов
aap@imm.uran.ru

В.Б. Костоусов
vkost@imm.uran.ru

В.И. Бердышев
bvi@imm.uran.ru

ИММ УрО РАН (Екатеринбург)

Аннотация

В статье рассматривается задача построения траектории движущегося объекта, которая наиболее удалена от группы наблюдателей. Задача рассматривается на плоскости. Особенность постановки заключается в предположении о том, что объект имеет ненулевую площадь и при движении должен соблюдать геометрические ограничения. Подробно описывается алгоритм построения оптимальной траектории.

1 Введение

При планировании маршрута движения объекта в условиях наблюдения за ним со стороны других объектов-наблюдателей возникают экстремальные задачи построения маршрута с различными критериями. Работа продолжает исследование задачи построения траектории движущегося объекта, которая наиболее удалена от группы наблюдателей. Начало исследования этой задачи положено в [1], где задача рассматривалась для точечного объекта. В данной работе объект является «телесным». Приведена характеризация оптимальной траектории, минимизирующей максимум видимости объекта при движении по траектории. Для задачи оптимизации интегрального критерия рассмотрен эффективный численный метод построения оптимального маршрута, основанный на алгоритме Дейкстры [2].

2 Постановка задачи

Пусть $\mathcal{B}$ – замкнутое фиксированное множество в $\mathbb{R}^2$, являющееся замыканием открытого множества, t_h – движущийся объект, представляющий собой замкнутый шар фиксированного радиуса $h \geqslant 0$ с центром в точке t. Множество $\mathcal{B}$ препятствует движению объекта и его видимости со стороны наблюдателей. В $\mathbb{R}^2$ задана непрерывная траектория $\mathcal{T}_0$ без самопересечений, соединяющая точки $t_* \neq t^*$ из $\mathbb{R}^2$. Замкнутая окрестность радиуса h этой траектории не пересекается с множеством $\mathcal{B}$:

$$\left(\overline{\bigcup_{t\in\mathcal{T}_0} V_h(t)}\right) \bigcap \mathcal{B} = \varnothing,$$

где $V_h(t)$ – замкнутый шар радиуса h с центром t, $\overline{A}$ — замыкание множества A.

Пусть объект t_h движется внутри коридора

$$Y = \overline{\bigcup_{t\in\mathcal{T}_0} V_r(t)},$$

In: A.A. Makhnev, S.F. Pravdin (eds.): Proceedings of the International Youth School-conference «SoProMat-2017», Yekaterinburg, Russia, 06-Feb-2017, published at http://ceur-ws.org

где $r = r(t) = \inf\limits_{b\in\mathcal{B}} \|t - b\|$. Из условий построения траектории $\mathcal{T}_0$ следует, что $r(t) \geqslant h\ \forall t \in \mathcal{T}_0$. Центральная точка t объекта движется внутри коридора

$$Y_h = \overline{\bigcup_{t\in\mathcal{T}_0} V_{r-h}(t)}.$$

Предполагается, что $V_r(t_*) \bigcap V_r(t^*) = \varnothing$.

Множество непрерывных траекторий

$$\mathcal{T} = \{t(\tau) : 0 \leqslant \tau \leqslant 1, t(0) = t_*, t(1) = t^*\} \subset Y_h$$

обозначим через $\mathbb{T}$.

Пусть ∂Y — граница коридора Y и $\Gamma = (\partial Y)\backslash(V_r(t_*) \bigcup V_r(t^*))$. В силу условий задачи множество Γ разбивается на две непересекающиеся части: левую Γ^l и правую Γ_r по отношению к направлению движения по траектории $\mathcal{T}_0$ от точки t_* к точке t^*.

Аналогично, пусть ∂Y_h – граница коридора Y_h и $E = (\partial Y_h)\backslash(V_{r-h}(t_*) \bigcup V_{r-h}(t^*))$. Множество E разбивается на две непересекающиеся части: левую часть E^l и правую E_r по отношению к объекту, движущемуся от t_* к t^* по $\mathcal{T}_0$.

Предполагается, что задан конечный набор наблюдателей $\mathbb{S} = \{S\}$, $S \notin \overset{\circ}{Y}$ ($\overset{\circ}{Y}$ обозначает внутренность множества Y). Ради простоты будем считать, что $\mathbb{S} \subset \Gamma$. Каждый наблюдатель S имеет фиксированный конус обзора $K(S)$ — объединение с S выпуклого открытого конуса при вершине S. Пересечение $K(S)$ с Y может состоять из нескольких связных компонент. В дальнейшем через $K_Y(S)$ обозначается компонента, содержащая S. Для любого S конус $K(S)$ таков, что каждая траектория $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ пересекается с $K_Y(S)$. Ради простоты будем считать, что $V_h(t_*) \bigcap K_Y(S) = \varnothing$, $V_h(t^*) \bigcap K_Y(S) = \varnothing$ для любого S. Множество наблюдателей, принадлежащих Γ^l или Γ_r, будем обозначать через $\mathbb{S}^l$, $\mathbb{S}_r$, соответственно.

Определим «расстояние» $\rho_h(t, S)$ от точки $t \in Y_h$ до наблюдателя S (с учётом конуса наблюдения) следующим образом:

$$\rho_h(t, S) = \min\{\rho(x, S) : x \in V_h(t)\},$$

$$\text{где } \rho(x, S) = \begin{cases} \|x - S\| & \text{при } x \in K_Y(S), \\ +\infty & \text{при } x \notin K_Y(S). \end{cases}$$

Определим «расстояние» $\rho_h(S, \mathcal{T})$ от траектории $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ до наблюдателя S:

$$\rho_h(S, \mathcal{T}) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\rho_h(t, S) : t \in \mathcal{T}\}.$$

Задача объекта t_h состоит в выборе траектории $\widehat{\mathcal{T}}$ из класса $\mathbb{T}$ непрерывных траекторий

$$\mathcal{T} = \{t(\tau) : 0 \leqslant \tau \leqslant 1, t(0) = t_*, t(1) = t^*\} \subset Y_h,$$

для которой

$$\mathbb{M} = \mathbb{M}(\mathbb{S}) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\mathcal{T}\in\mathbb{T}} \min\{\rho_h(S, \mathcal{T}) : S \in \mathbb{S}\} = \min\{\rho_h(S, \widehat{\mathcal{T}}) : S \in \mathbb{S}\}. \tag{1}$$

Рисунок 1 иллюстрирует описываемую постановку задачи.

Как правило, задача (1) имеет неединственное решение. В этом случае представляет интерес задача поиска среди гладких траекторий $\mathbb{T}^*$ решений задачи (1) траектории с минимальной длиной:

$$\min_{\mathcal{T}\in\mathbb{T}^*} \int\limits_0^1 \|t'(\tau)\|\, d\tau, \tag{2}$$

где $t'(\tau)$ – производная функции $t(\tau)$.

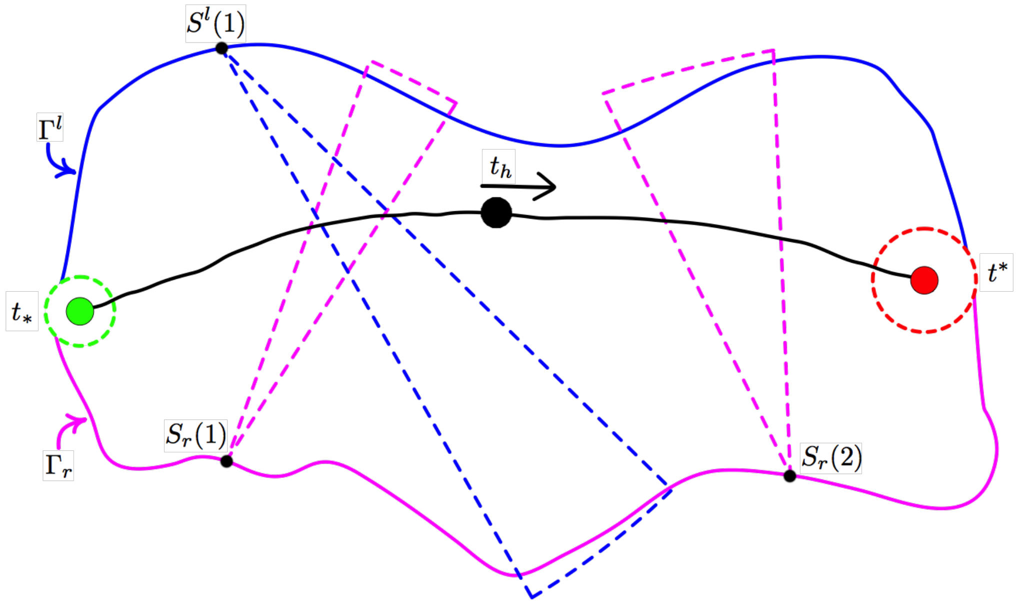

Рис. 1: Задача о наиболее удаленном от наблюдателей траектории объекта t_h. Наблюдатели S (показаны черными точками)

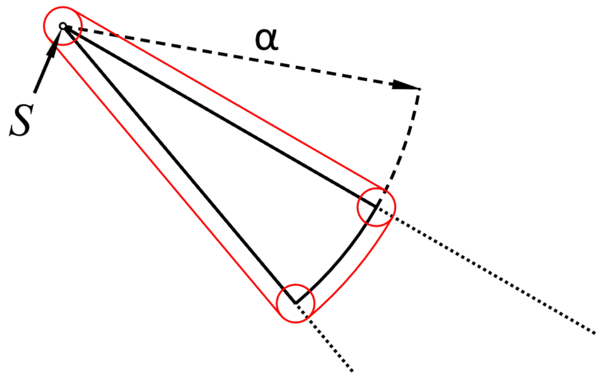

Рис. 2: К определению множества G_α

3 Характеризация наилучшей траектории

Введём следующие обозначения для множеств (рис. 2):

$$G_\alpha(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{t : \rho_h(t, S) < \alpha\}, \text{ где } \alpha > 0.$$

Рассмотрим частные случаи задачи (1).

I. Введём величины

$$A(S) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \min\{\alpha : \overline{G_\alpha(S)} \bigcap E^l \neq \varnothing\}, & \text{если } S \in \mathbb{S}_r, \\ \min\{\alpha : \overline{G_\alpha(S)} \bigcap E_r \neq \varnothing\}, & \text{если } S \in \mathbb{S}^l, \end{cases}$$

$$M = \min_{S \in \mathbb{S}} A(S).$$

Определим множества:

$$Q_\alpha(S) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \overline{G_\alpha(S)} \bigcap E^l, & \text{если } S \in \mathbb{S}_r, \\ \overline{G_\alpha(S)} \bigcap E_r, & \text{если } S \in \mathbb{S}^l, \end{cases}$$

$$Q(\mathbb{S}) = \bigcup_{S \in \mathbb{S}} Q_M(S).$$

Так же как для случая точечного объекта, рассмотренного в [1], для случая объекта t_h справедливо следующее утверждение (рис. 3).

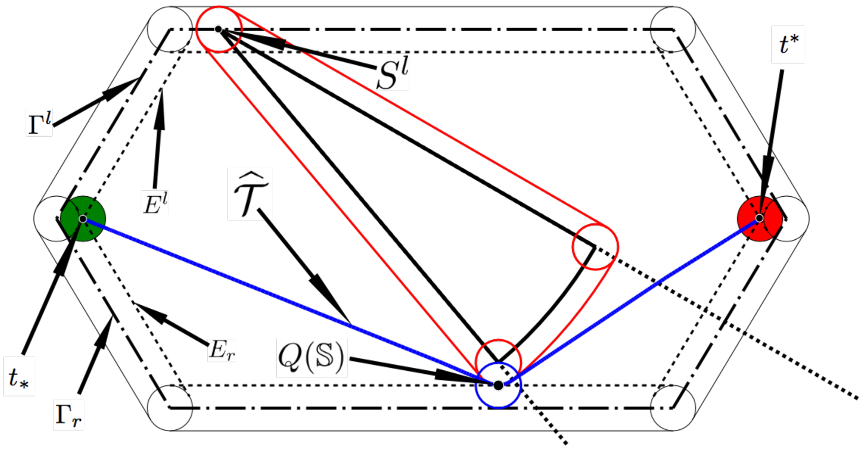

Рис. 3: Пример задачи о наиболее удалённой от наблюдателей траектории в условиях предложения 1

Предложение 1 *Пусть набор наблюдателей* $\mathbb{S}$ *таков, что* $K_Y(S^l) \bigcap K_Y(S_r) \bigcap Y_h = \varnothing$ *для любых* $S^l \in \mathbb{S}^l$ *и* $S_r \in \mathbb{S}_r$.

Оптимальная траектория $\widehat{\mathcal{T}} \in \mathbb{T}$ *характеризуется свойствами:*
$Q(\mathbb{S}) \subset \widehat{\mathcal{T}}$,
$\rho_h(S, \widehat{\mathcal{T}}) \geqslant M$ *для всех* $S \in \mathbb{S}$.

Любая траектория $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$, *удовлетворяющая условию* $\forall S\ \rho_h(S, \mathcal{T}) \geqslant M$, *является оптимальной.*

II. Пусть $\mathbb{S} = \{S^l, S_r\}$ – пара наблюдателей такая, что $K_Y(S^l) \bigcap K_Y(S_r) \bigcap Y_h \neq \varnothing$ (рис. 4).

Рассмотрим множество точек, удалённых от двух наблюдателей не более, чем на величину α:

$$Q_\alpha(S^l, S_r) = \overline{G_\alpha(S^l)} \bigcap \overline{G_\alpha(S_r)} \bigcap Y_h.$$

Введём величину:

$$A(S^l, S_r) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} +\infty, & \text{если } \forall \alpha : Q_\alpha(S^l, S_r) = \varnothing, \\ \min\{\alpha : Q_\alpha(S^l, S_r) \neq \varnothing\}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Можно показать, что в этом случае справедливо следующее утверждение, характеризующее оптимальную траекторию.

Предложение 2 *В случае II имеет место равенство*

$$\mathbb{M}(\mathbb{S}) = \min\{A(S^l, S_r), A(S^l), A(S_r)\}.$$

Искомая оптимальная траектория в задаче (1) составлена из части границы множества $G_{\alpha^*}(S)$: $\partial G_{\alpha^*}(S^l) \bigcap \mathring{Y}_h$ *или* $\partial G_{\alpha^*}(S_r) \bigcap \mathring{Y}_h$, *где* $\alpha^* = \mathbb{M}(\mathbb{S})$, *и дополнена частью границ* E^l *или* E_r *соответственно.*

Строгая характеризация оптимальной траектории задачи (1) в случае произвольного расположения наблюдателей будет рассмотрена в дальнейших исследованиях. Однако, в следующем разделе представлен численный алгоритм, приближенно решающий задачи (1), (2), когда граница Γ задана в виде простой ломаной линии без самопересечений.

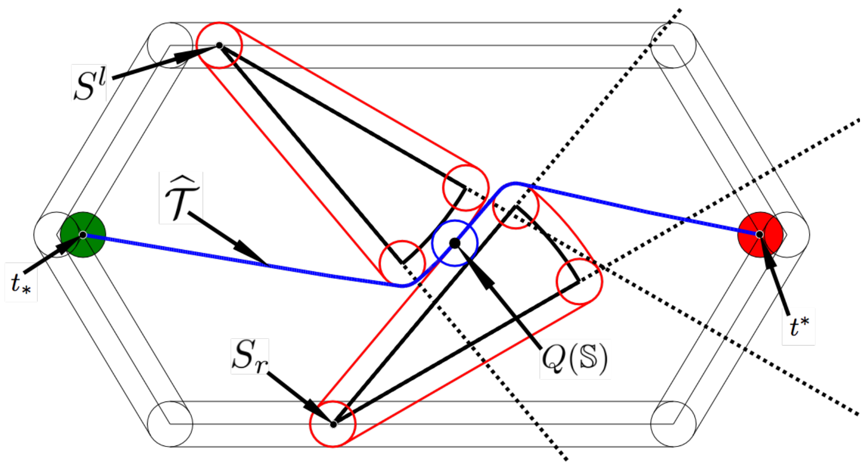

Рис. 4: Пример задачи о наиболее удалённой от наблюдателей траектории в условиях предложения 2

4 Алгоритм построения наилучшей траектории

Для решения задачи (2) воспользуемся алгоритмом Дейкстры [2] построения кратчайшего пути в графе. Для этого следует определить неориентированный граф (т.е. множества вершин и рёбер), в котором данный алгоритм будет искать кратчайший путь.

В качестве множества вершин примем объединение множества вершин описываемой ниже двумерной прямоугольной сетки с постоянным шагом и пары точек начального и конечного положения объекта.

Пусть задан шаг сетки $\delta > 0$, $\delta \ll h$.

Пусть граница Γ задана в виде простой ломаной линии без самопересечений, $\{p_i(\Gamma) = (x_i(\Gamma), y_i(\Gamma)) : i = 0, ..., N_\Gamma - 1\}$ — последовательность концевых точек отрезков этой линии.

Тогда размеры сетки вычисляются следующим образом:

$$N_x = 1 + \left\lceil \frac{\max\{x_i(\Gamma)\} - \min\{x_i(\Gamma)\}}{\delta} \right\rceil,$$

$$N_y = 1 + \left\lceil \frac{\max\{y_i(\Gamma)\} - \min\{y_i(\Gamma)\}}{\delta} \right\rceil.$$

Множество вершин графа определим так:

$$C = (C_x \times C_y) \bigcup \{t_*, t^*\},$$

$$C_x = \{x_k : x_k = k \cdot \delta + \min\{x_i(\Gamma)\}, \quad k = 0, ..., N_x - 1\},$$
$$C_y = \{y_k : y_k = k \cdot \delta + \min\{y_i(\Gamma)\}, \quad k = 0, ..., N_y - 1\}.$$

В качестве множества рёбер U возьмём все пары вершин $\{c_i, c_j\}$ из множества C, удовлетворяющие условию — отрезок $\{c_i, c_j\}$ не должен пересекать «запретную» область, которую образуют h-окрестность границы Γ и множества $\overset{\circ}{G}_M(S), S \in \mathbb{S}$. В качестве веса ребра возьмём его длину: $w = ||c_i - c_j||$.

Величина M вычисляется так:

$$M = \min\{A(S^l, S_r), A(S^l), A(S_r) : S^l, S_r \in \mathbb{S}\}.$$

Для определения того факта, что отрезок ребра не пересекает «запретную» область, строится множество «запретных» вершин $\widehat{C} \subset C_x \times C_y$ и применяется алгоритм Брезенхэма для растеризации отрезка [3].

Пусть $Bresenham(\{c_i, c_j\})$ — подмножество вершин на сетке $C_x \times C_y$, отмечаемых при растеризации отрезка $\{c_i, c_j\}$ алгоритмом Брезенхэма (рис. 5).

Тогда множество рёбер графа определим так:

$$U = \{\{c_i, c_j, w\} : c_i, c_j \in C, \quad c_i \neq c_j, \quad Bresenham(\{c_i, c_j\}) \bigcap \widehat{C} = \varnothing, \quad w = ||c_i - c_j||\}.$$

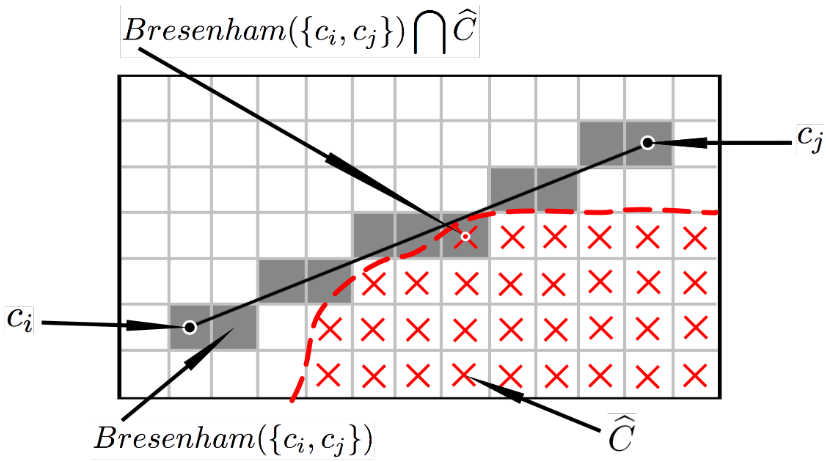

Рис. 5: Пример того, как с помощью алгоритма Брезенхэма определяется факт пересечения ребра $\{c_i, c_j\}$ с множеством «запретных» вершин $\widehat{C}$

Далее построим множество «запретных» вершин $\widehat{C}$.

Обозначим $L_i(\Gamma)$ множество точек, принадлежащих отрезку ломаной линии Γ:

$$L_i(\Gamma) = \begin{cases} \{t : t = p_{N_\Gamma - 1}(\Gamma) \cdot k + p_0(\Gamma) \cdot (1-k), k \in [0;1]\}, & \text{если } i = 0, \\ \{t : t = p_{i-1}(\Gamma) \cdot k + p_i(\Gamma) \cdot (1-k), k \in [0;1]\}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть $r(t, X)$ — минимальное евклидово расстояние от точки $t \in \mathbb{R}^2$ до точек множества $X \subset \mathbb{R}^2$:

$$r(t, X) = \inf_{x \in X} ||t - x||.$$

Обозначим $\widehat{C}(L_i(\Gamma))$ множество точек сетки, лежащих в окрестности радиуса $h - \varepsilon$ отрезка ломаной $L_i(\Gamma)$:

$$\widehat{C}(L_i(\Gamma)) = \{t : t \in C_x \times C_y, r(t, L_i(\Gamma)) < h - \varepsilon\}, \tag{3}$$

где величина $\varepsilon \in (\delta; 2\delta)$ должна обеспечить прохождение траектории между «запретными» областями (рис. 6).

Обозначим $H_\alpha(S)$ множество точек, принадлежащих конусу наблюдения $K(S)$ наблюдателя S и лежащих на расстоянии меньше α от вершины конуса:

$$H_\alpha(S) = \{t : t \in K(S), r(t, S) < \alpha\}.$$

Обозначим через $\widehat{C}(S)$ множество точек сетки, лежащих в окрестности радиуса $h - \varepsilon$ границы множества $H_M(S)$:

$$\widehat{C}(S) = \{t : t \in C_x \times C_y, r(t, \partial H_M(S)) < h - \varepsilon\}. \tag{4}$$

Множество «запретных» вершин определим как объединение введёных выше множеств (см. рис. 6):

$$\widehat{C} = \bigcup_i \widehat{C}(L_i(\Gamma)) \bigcup_{S \in \mathbb{S}} \widehat{C}(S).$$

Предложенный алгоритм решает задачу об оптимальном пути, и его асимптотическая сложность есть $O(|C|^2)$ [2]. На рис. 7 представлен пример построения предложенным алгоритмом оптимальной траектории в задаче (2) для случая большого количества наблюдателей.

Благодарности

Работа выполнена при частичной поддержке комплексной программы ФНИ УрО РАН (проект 15-16-1-14).

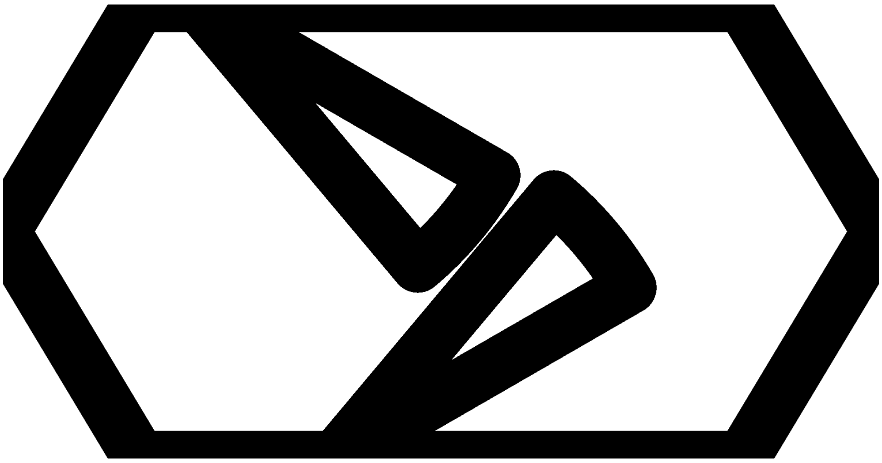

Рис. 6: Пример множества «запретных» вершин $\widehat{C}$, показанных чёрным цветом. Можно видеть полученный в результате выбора ε (см. (3), (4)) зазор между множествами $\widehat{C}(S)$, который обеспечивает возможность решения задачи

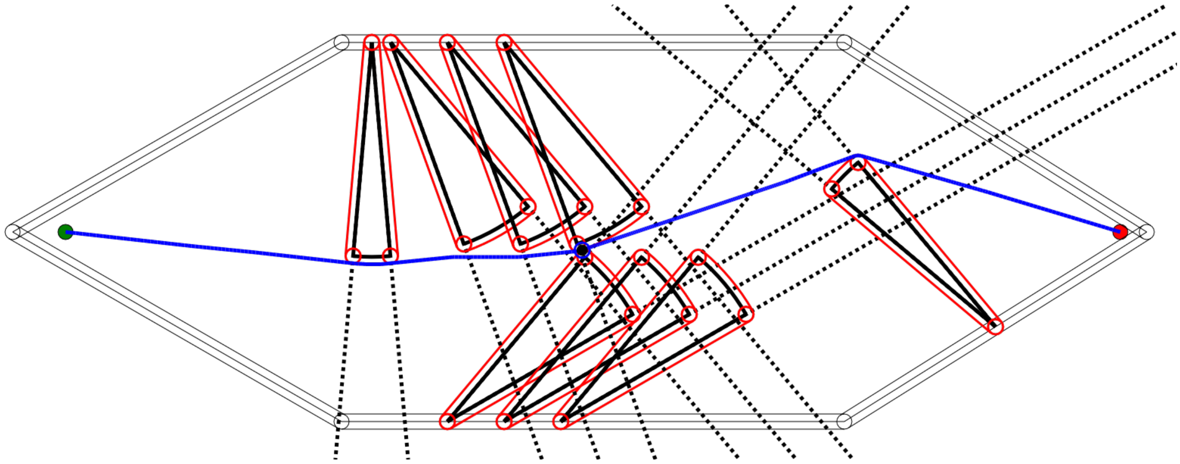

Рис. 7: Пример построения маршрута предложенным алгоритмом

Список литературы

[1] V.I. Berdyshev. A moving object in $\mathbb{R}^2$ and a group of observers. *Tr. Inst. Mat. Mekh. (Ekaterinburg)*, 22(4):87–93, 2016 (in Russian). = В.И. Бердышев. Движущийся в $\mathbb{R}^2$ объект и группа наблюдателей. *Труды Института математики и механики УрО РАН*, 22(4):87–93, 2016.

[2] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein. *Introduction to Algorithms. 3rd ed.* MIT Press and McGraw-Hill, 2009.

[3] D.F. Rogers. *Procedural Elements for Computer Graphics.* McGraw-Hill, 1985.

The farthest from observers trajectory

Alexander A. Popov, Victor B. Kostousov, Vitalii I. Berdyshev
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics (Yekaterinburg, Russia)

Keywords: planning the route, optimal route, geometrical observability, Dijkstra's algorithm.

The article considers the problem of constructing a moving object trajectory which is the farthest from the group of observers. The problem is considered on the plane. The peculiarity of the problem statement lies in the assumption that the area of object not equal to zero and, when moving, it must comply with geometric constraints. The algorithm for optimal trajectory constructing is described.