Класс t-дольных неравенств для многогранника расписаний обслуживания требований параллельными приборами

Р.Ю. Симанчев
osiman@rambler.ru

И.В. Уразова
urazovainn@mail.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация

В работе описывается новый класс неравенств, правильных относительно многогранника расписаний обслуживания единичных требований параллельными приборами без прерываний. Показано, что полученные неравенства могут служить отсекающими плоскостями в алгоритмах поиска оптимального расписания с различными критериями оптимальности. Проведено сравнение неравенств.

Введение

В настоящей работе рассматриваются расписания обслуживания идентичных требований параллельными приборами, которые описываются следующими условиями. Требования множества V, $|V| = n$, обслуживаются m параллельными идентичными приборами. Все требования поступают в очередь на обслуживание одновременно (в момент времени $k = 0$) и имеют одинаковые (равные 1) длительности обслуживания. Запрещены прерывания в обслуживании требований. Время дискретно. На множестве V задано отношение частичного порядка $\lhd$, определяющее условия предшествования в обслуживании требований. Всякий порядок обслуживания требований на множестве V, допустимый относительно частичного порядка $\lhd$, называется допустимым расписанием или просто расписанием (см., например, [1, 2]). Требуется построить такое удовлетворяющее частичному порядку расписание обслуживания требований, при котором общее время обслуживания будет минимальным. Отметим, что в [2] приведены полиномиальные алгоритмы решения этой задачи для случаев, когда $m = 2$ и когда G является корневым деревом. Для иных случаев в [1, 3] эта задача упомянута как открытая в смысле NP-трудности.

Мы рассматриваем расписания, в которых все работы завершаются к моменту времени d. При этом очевидно, что если d будет слишком мало, то множество определенных выше расписаний может оказаться пустым. Это множество расписаний допускает следующую формализацию [1]. Расписанием называется функция $\sigma : V \to D = \{1, 2, \dots d\}$ такая, что

(i) соотношение $i \lhd j$ влечет неравенство $\sigma(i) < \sigma(j)$;

(ii) для любого $k \in D$ имеется не более m требований $i \in V$ таких, что $\sigma(i) = k$.

Множество расписаний, определенных условиями (i) и (ii), обозначим через S_d. Таким образом, рассматриваемая нами задача может быть записана как

$$\max_{i \in V} \sigma(i) \to \min_{\sigma \in S_d}.$$

In: Sergey V. Belim, Nadezda F. Bogachenko (eds.): Proceedings of the Workshop on Data, Modeling and Security 2017 (DMS-2017), Omsk, Russia, October 2017, published at http://ceur-ws.org

Заметим, что если $d < d'$, то $S_d \subset S_{d'}$ (при этом полагаем, что пустое множество является подмножеством любого множества). Целесообразно значение d брать не превосходящим n, так как при $d \geq n$ всегда $S_d \neq \emptyset$.

Мы рассматриваем полиэдральную структуру множества S_d безотносительно к целевой функции. Множеству S_d сопоставляется полиэдр, целочисленные вершины которого взаимно-однзначно соответствуют расписаниям. В работе [4] описаны два класса неравенств, правильных относительно выпуклой оболочки расписаний, получены условия их опорности. В настоящей работе представлен новый класс правильных неравенств, предложена эвристическая процедура идентификции неравенств этого класса.

Пусть $\sigma \in S_d$ – расписание. Сопоставим ему $(0,1)$-вектор $x^\sigma = (x^\sigma_{ik}, i \in V, k \in D) \in R^{nd}$ по правилу: $x^\sigma_{ik} = 1$, если $\sigma(i) = k$, $x^\sigma_{ik} = 0$ – в противном случае.

Вектор x^σ будем также называть расписанием. Под многогранником расписаний будем понимать множество

$$P_{d,Z} = conv\{x^\sigma \in R^{nd} \mid \sigma \in S_d\}.$$

Условия предшествования в обслуживании требований зададим в виде ациклического орграфа G с множеством вершин V и множеством дуг A. При этом будем полагать, что G не содержит транзитивных дуг, то есть таких дуг (i,j), что в G существует путь из i в j, отличный от дуги (i,j). Ясно, что в силу условий (i) и (ii) для каждой вершины $i \in V$ имеются такие $k \in D$, что для любого $\sigma \in S_d$ компоненты x^σ_{ik} будут заведомо равны нулю. Формализуем это соображение следующим образом.

Дополним орграф G до орграфа G' фиктивным источником u и фиктивным стоком v, то есть $VG' = V \cup \{u,v\}$ и $EG' = E \cup \{(u,i), i \in B\} \cup \{(j,v), j \in \bar{B}\}$, где B и $\bar{B}$ – вершинные база и антибаза орграфа G соответственно. Для каждой $i \in V$ обозначим через P_i самый длинный путь из u в i, а через Q_i – самый длинный путь из i в v. Если σ – расписание, то в силу условия (i) имеем

$$x^\sigma_{ik} = 0 \tag{1}$$

при $k = 1,2,\ldots,|P_i| - 1$ и $k = d - |Q_i| + 2, d - |Q_i| + 3, \ldots, d$.

Обозначим множество всех предков вершины $i \in V$ в орграфе G через $U_i = \{j \in V \mid j \lhd i\}$, а множество всех потомков – через $W_i = \{j \in V \mid i \lhd j\}$. Для любого $\sigma \in S_d$ в силу условия (ii) можем написать, что

$$x^\sigma_{ik} = 0 \tag{2}$$

при $k = 1,2,\ldots,\lceil\frac{|U_i|}{m}\rceil$ и $k = d - \lceil\frac{|W_i|}{m}\rceil + 1, d - \lceil\frac{|W_i|}{m}\rceil + 2, \ldots, d$.

Объединяя (1) и (2), положим $p_i = \max\{|P_i|, \lceil\frac{|U_i|}{m}\rceil + 1\}$ и $q_i = \max\{|Q_i| - 1, \lceil\frac{|W_i|}{m}\rceil\}$. Теперь для каждой вершины $i \in V$ и каждого расписания $\sigma \in S_d$ имеем

$$x^\sigma_{ik} = 0, k = 1,2,\ldots,p_i - 1, d - q_i + 1, d - q_i + 2, \ldots, d. \tag{3}$$

Для упрощения дальнейших обозначений определим для каждой вершины $i \in V$ множество $D_i = \{p_i, p_i + 1, p_i + 2, \ldots, d - q_i\}$, а для каждого $k \in D$ – множество $V_k = \{i \in V \mid k \in D_i\}$.

Определим в пространстве R^{nd} полиэдр M_d как множество решений системы линейных уравнений и неравенств:

$$\sum_{k \in D_i} x_{ik} = 1, \quad i \in V, \tag{4}$$

$$\sum_{i \in V_k} x_{ik} \leq m, \quad k \in D, \tag{5}$$

$$x_{ik} \leq \sum_{l \in D_j, l > k} x_{jl}, \quad (i,j) \in E, k \in D_i, \tag{6}$$

$$0 \leq x_{ik} \leq 1, \quad i \in V, k \in D_i, \tag{7}$$

$$x_{ik} = 0, \quad i \in V, k \in D \setminus D_i. \tag{8}$$

В [4] было показано что целочисленные точки полиэдра M_d и только они являются расписаниями, причем данное соответствие взаимно-однозначно. Кроме того, там же описаны два класса правильных относительно $P_{d,Z}$ неравенств. Неравенство $ax \leq a_0$ называется правильным относительно $P_{d,Z}$, если оно выполняется для всех $x \in P_{d,Z}$. Среди правильных неравенств важную роль играют такие неравенства, для которых множество $M_d \cap \{x \in R^{nd} \mid ax > a_0\}$ не пусто. На таких неравенствах основан широкий класс алгоритмов решения задач целочисленного программирования, называемых алгоритмами отсечения.

1 t-дольные неравенства

Назовем орграф F t-дольным, если его множество вершин W можно разбить на t непересекающихся подмножеств $W_1, W_2, \ldots, W_t$ так, что для всякой дуги (i,j) графа F найдется такой номер $s \in \{1, 2, \ldots, t-1\}$, что $i \in W_s$ и $j \in W_{s+1}$. Если при этом для всякого s множество $W_s \cup W_{s+1}$ индуцирует в F полный двудольный граф, то F назовем полным t-дольным. Полный t-дольный орграф будем обозначать через $F(W_1, W_2, \ldots, W_t)$. Шириной графа $F = F(W_1, W_2, \ldots, W_t)$ назовем величину $\alpha(F) = \max\{|W_s|, s = 1, 2, \ldots, t-1\}$. Выбрав произвольно $\in D$, свяжем с полным t-дольным орграфом $F(W_1, W_2, \ldots, W_t) \subseteq G$ линейное неравенство

$$\sum_{l=k}^{r_i} \sum_{i \in W_1} x_{il} + \sum_{j=2}^{t-1} \sum_{i \in W_j} x_{ik} + \sum_{l=s_i}^{k} \sum_{i \in W_t} x_{il} \le \alpha(F), \tag{9}$$

где $r_i \in \{k, k+1, \ldots, d\}$ и $s_i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Покажем, что неравенство (9) правильное относительно $P_{d,Z}$. Действительно, пусть $\sigma \in S_d$. Если $\sum\limits_{l=k}^{r_i} \sum\limits_{i \in W_1} x^{\sigma}_{il} = \sum\limits_{j=2}^{t-1} \sum_{i \in W_j} x^{\sigma}_{ik} = \sum\limits_{l=s_i}^{k} \sum\limits_{i \in W_t} x^{\sigma}_{il} = 0$, то неравенство (9) очевидно выполняется для точки x^{σ}. В силу ограничений (4) и (6) требования, принадлежащие разным долям $W_1, W_2, \ldots, W_t$, не могут обслуживаться одновременно. Следовательно, любые два или все три блока слагаемых в неравенстве (9) не могут быть одновременно не равными нулю. Таким образом, возникают три случая.

Случай а). $\sum\limits_{l=k}^{r_i} \sum\limits_{i \in W_1} x^{\sigma}_{il} \ne 0$. Тогда $\sum\limits_{j=2}^{t-1} \sum\limits_{i \in W_j} x^{\sigma}_{ik} = 0$ и $\sum\limits_{l=s_i}^{k} \sum\limits_{i \in W_t} x^{\sigma}_{il} = 0$. В силу неотрицательности компонент вектора x^{σ} и ограничений (4) имеем $\sum\limits_{l=k}^{r_i} \sum\limits_{i \in W_1} x^{\sigma}_{il} \le |W_1| \le \alpha(F)$.

Случай б). $\sum\limits_{l=s_i}^{k} \sum\limits_{i \in W_t} x^{\sigma}_{il} \ne 0$. Тогда $\sum\limits_{l=k}^{r_i} \sum\limits_{i \in W_1} x^{\sigma}_{il} = 0$ и $\sum\limits_{j=2}^{t-1} \sum\limits_{i \in W_j} x^{\sigma}_{ik} = 0$. Здесь рассуждения полностью аналогичны случаю а).

Случай в). $\sum\limits_{j=2}^{t-1} \sum\limits_{i \in W_j} x^{\sigma}_{ik} \ne 0$. Тогда $\sum\limits_{l=k}^{r_i} \sum\limits_{i \in W_1} x^{\sigma}_{il} = 0$ и $\sum\limits_{l=s_i}^{k} \sum\limits_{i \in W_t} x^{\sigma}_{il} = 0$. Следовательно, в силу неотрицательности компонент вектора x^{σ} и ограничений (4), в левой части неравенства (9) имеем $\sum\limits_{j=2}^{t-1} \sum\limits_{i \in W_j} x^{\sigma}_{ik} \le \max\{|W_s|, s = 1, 2, \ldots, t-1\} = \alpha(F)$.

2 Свойство быть отсечением и сравнение t-дольных неравенств

Будем говорить, что правильное относительно $P_{d,Z}$ неравенство $ax \le a_0$ отсекает точку $\bar{x} \in M_d$, если $a\bar{x} > a_0$.

Приведем пример точки, отсекаемой неравенством класса вида (9).

Пример 1. Рассмотрим орграф предшествований G с множеством вершин $V = \{1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots,\ 10\}$ и множеством дуг $A = \{\ 12, 17, 23, 34, 45, 47, 56, 69, 79, 89, 910\}$ (см. рис.1). Пусть $d = 10$, $m = 3$.

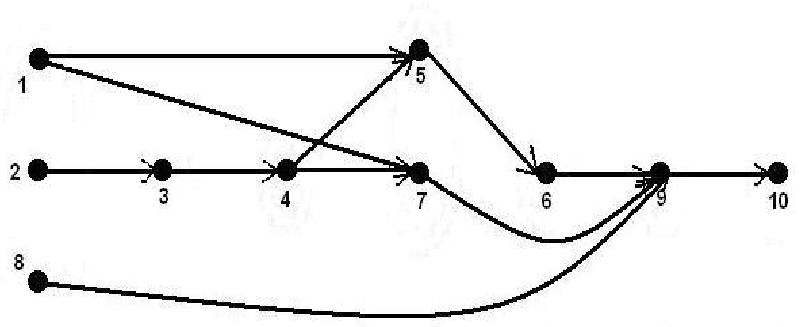

Рис. 1: Орграф G

Таблица 1: Задание точки $\bar{x}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0.8	0	0	0.2	0	0	0	0	0
2	0.4	0	0.6	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0.4	0	0.4	0.2	0	0	0	0	0
4	0	0	0.4	0.2	0.2	0.2	0	0	0	0
5	0	0	0	0.2	0.6	0	0.2	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0.8	0	0.2	0	0
7	0	0	0	0.2	0.6	0	0	0.2	0	0
8	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0.8	0	0.2	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0.8	0	0.2

Точку $\bar{x}$ удобно задавать с помощью таблицы 10×10, строки которой соответствуют множеству V, а столбцы – множеству D. Точка $\bar{x} \in M_d$ задана таблицей 1.

Выберем двудольный орграф $F(W_1, W_2) \subset G$ с $W_1 = \{1, 4\}$, $W_2 = \{5, 7\}$ и $k = 5$. Неравенство (9), отсекающее точку $\bar{x}$, будет иметь вид:

$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{54} + x_{71} + x_{72} + x_{73} + x_{74} + x_{75} + x_{15} + x_{16} + x_{17} +$
$+ x_{18} + x_{19} + x_{110} + x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{48} + x_{49} + x_{410} \leq 1.$

Для процедур отсечения важную роль играет «глубина» отсекающей плоскости. Формально это свойство можно описать так. Будем говорить, что неравенство $ax \leq a_0$ не сильнее неравенства $bx \leq b_0$ относительно M_d, если $\{x \in M_d \mid ax > a_0\} \subseteq \{x \in M_d \mid bx > b_0\}$ (см. рис. 2). Разумеется, могут быть и несравнимые неравенства в смысле этого определения.

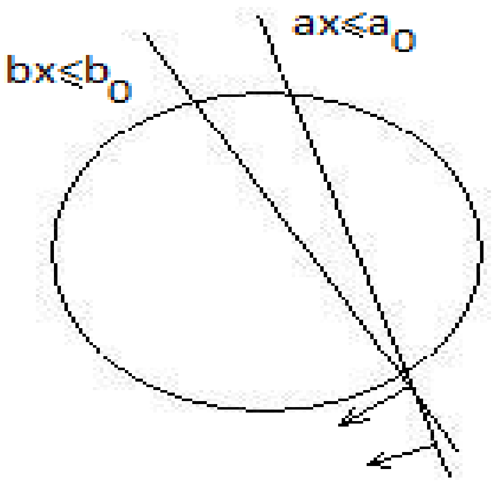

Рис. 2: Сравнение неравенств

Рассмотрим полный t-дольный орграф $F(W_1, W_2, \ldots, W_t)$. Дополним его до орграфа $\bar{F}$ следующим образом. К орграфу F добавим q долей так, чтобы 1) орграф $\bar{F}$ был полным $(t+q)$-дольным орграфом и 2) $\max\{|W_j|, j = 1, \ldots, t\} = \max\{|W_l|, l = 1, \ldots, t+q\}$. Покажем, что неравенство $\sum\limits_{j=1}^{t} \sum\limits_{i \in W_j} x_{ik} \leq \alpha(F)$, построенное на орграфе F не сильнее неравенства $\sum\limits_{l=1}^{t+q} \sum\limits_{i \in W_l} x_{ik} \leq \alpha(\bar{F})$, построенного на орграфе $\bar{F}$. Для этого рассмотрим точку $\bar{x} \in M_d$, такую что $\sum\limits_{l=1}^{t} \sum\limits_{i \in W_l} \bar{x}_{ik} > \max\{|W_l|, , l = 1, \ldots, t\}$. В силу неотрицательности компонент точки $\bar{x}$ будет верным неравенство $\sum\limits_{j=1}^{t} \sum\limits_{i \in W_j} \bar{x}_{ik} \leq \sum\limits_{l=1}^{t+q} \sum\limits_{i \in W_l} \bar{x}_{ik}$. Осталось заметить, что по построению

$\max\{|W_j|, j = 1, \ldots, t\} = \max\{|W_l|, l = 1, \ldots, t+q\}$. Таким образом, $\sum\limits_{j=1}^{t+q} \sum\limits_{i \in W_j} \bar{x}_{ik} > \max\{|W_l|, , l = 1, \ldots, t\}$. То есть, если точка $\bar{x} \in M_d$ отсекается неравенством, построенным на орграфе F, то она отсекается и неравенством, построенным на орграфе $\bar{F}$.

Список литературы

[1] M.R. Garey, D.S. Johnson. *Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness.* A Series of Books in the Mathematical Sciences. W.H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1979.

[2] V.S. Tanaev, V.S. Gordon, Ya.M. Shafranskiy. *Schedules Theory. One-stage systems.* M., Hauka, 1984, 381 p. (In Russian).

[3] URL: `http://www.mathematik.unisnabrueck.de/reseach/OR/class`.

[4] R.Yu. Simanchev, I.V. Urazova. The polytope of schedules of identical jobs on parallel processors. *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, 18(1):85–97, 2011 (In Russian).

The Class of T-Share Inequalities for the Service Schedules of Requirements by Parallel Devices Polytope

Ruslan Yu. Simanchev, Inna V. Urazova

A new class of inequalities that are valid with respect to the service schedules single requirements with parallel devices without interrupts polytope are described. It is shown that the obtained inequalities can serve as cutting planes in algorithms for finding the optimal schedule with different optimality criteria. The comparison of this inequalities are conducted.