TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik Institut für Theoretische Informatik, Lehrstuhl für Automatentheorie

Theoretische Informatik und Logik

Repetitorium II

Sommersemester 2017

Aufgabe α

a) Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Probleme, die in P liegen.

b) Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Probleme, die in NP liegen.

c) Beschreiben Sie mit eigenen Worten die Probleme, die in PSPACE liegen.

d) Erläutern Sie, warum $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE}$ gilt.

e) Beschreiben Sie für $\mathcal{C} = \mathrm{NP}$ und $\mathcal{C} = \mathrm{PSPACE}$, wann ein Problem „$\mathcal{C}$-hart" bzw. „$\mathcal{C}$-vollständig" ist.

Aufgabe β

Zeigen Sie, dass NP unter Kleene-Stern abgeschlossen ist.

Aufgabe γ

Wir betrachten das folgende Problem K: Gegeben sind zwei gerichtete Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ sowie eine Zahl $k \in \mathbb{N}$. Gefragt ist, ob es Teilmengen $V_1' \subseteq V_1$ und $V_2' \subseteq V_2$ gibt, so dass $|V_1'| = |V_2'| = k$ ist und es eine Bijektion $f\colon V_1' \to V_2'$ gibt, so dass gilt

$$(u, v) \in E_1 \iff (f(u), f(v)) \in E_2.$$

a) Zeigen Sie $K \in \mathrm{NP}$.

b) Zeigen Sie, dass K ein NP-hartes Problem ist. Zeigen Sie dafür, dass das Problem CLIQUE auf K in polynomieller Zeit reduzierbar ist.

Aufgabe δ

Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Ist $\mathbf{L}_2 \in \mathrm{PSPACE}$ und gilt $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$, so ist auch $\mathbf{L}_1 \in \mathrm{PSPACE}$.

b) Ist $\mathbf{L}_1$ ein PSPACE-hartes Problem, und gilt $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$, dann ist auch $\mathbf{L}_2$ ein PSPACE-hartes Problem.

Aufgabe ε

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Jedes $\mathrm{PS\small{PACE}}$-harte Problem ist NP-hart.

b) Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in $\mathrm{PS\small{PACE}}$ liegt.

c) Jedes NP-vollständige Problem liegt in $\mathrm{PS\small{PACE}}$.

d) Es gilt $\mathrm{NP} = \mathrm{PS\small{PACE}}$, wenn es ein $\mathrm{PS\small{PACE}}$-hartes Problem in NP gibt.

e) Wenn $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.

f) Sei **L** ein $\mathrm{PS\small{PACE}}$-vollständiges Problem. Dann gilt $\mathbf{L} \in \mathrm{P} \iff \mathrm{P} = \mathrm{PS\small{PACE}}$.

Aufgabe ζ

Wir betrachten folgende Position im Tic-Tac-Toe:

X		
	O	
O		X

Angenommen, Spieler X ist am Zug. Beschreiben Sie eine Gewinnstrategie für X.

Aufgabe η

Zeigen Sie, dass für jedes $\mathrm{PS\small{PACE}}$-vollständige Problem **L** auch das Komplement $\overline{\mathbf{L}}$ ein $\mathrm{PS\small{PACE}}$-vollständiges Problem ist.

Aufgabe θ

Zeigen Sie: ist $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, dann sind alle Sprachen $\mathbf{L} \in \mathrm{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\}$ NP-vollständig.