TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

THEORETISCHE INFORMATIK UND LOGIK

9. Vorlesung: NP und NP-Vollständigkeit

Markus Krötzsch
Lehrstuhl Wissensbasierte Systeme

TU Dresden, 10. Mai 2017

Rückblick

PTime und LogSpace als mathematische Modelle für Effizienz:

- PTime als robuste Verallgemeinerung der in linearer Zeit lösbaren Probleme
- LogSpace als typische (vermutlich) subpolynomielle Klasse

Wichtige Anwendung: Reduktionen, die ein Problem mit wenig Aufwand auf ein anderes zurückführen

- Polynomielle (Many-One-)Reduktionen: verbreitetste Form von effizienter Reduktion; Notation: $\leq_p$
- LogSpace-Reduktionen: häufig anzutreffen, aber selten im Detail definiert

Warum sollten Reduktionen effizient sein?

Intuition: Eine aufwändige Reduktion kann jedes Problem indirekt lösen, aber dadurch lernt man nichts interessantes über dessen Komplexität.

Satz: Sei $\mathbf{L} = \{\mathtt{a}\}$ eine Sprache über dem Alphabet $\{\mathtt{a}\}$. Falls **P** entscheidbar ist, dann gibt es eine Many-One-Reduktion $\mathbf{P} \leq_m \mathbf{L}$.

Beweis: Die Reduktion f funktioniert wie folgt:

- Wenn $w \in \mathbf{P}$, dann sei $f(w) = \mathtt{a}$.
- Andernfalls, wenn $w \notin \mathbf{P}$, dann sei $f(w) = \mathtt{aa}$. □

Effizient und doch nicht praktikabel

Es gibt Situationen, in denen ein Problem in PTime liegt und dennoch nicht praktisch algorithmisierbar ist.

Satz: Jede endliche Sprache kann in DTIME(1) erkannt werden und liegt daher insbesondere in PTime und LogSpace.

Beispiel: Sei **L** die Sprache, die alle wahren Aussagen aus der folgenden Menge enthält: {„P = NP“, „P ≠ NP“}. Dann ist $\mathbf{L} \in$ PTime und damit effizient berechenbar.

Erkenntnis: Man kann manchmal die Existenz eines effizienten Algorithmus beweisen, ohne zu wissen, wie er aussehen müsste.
$\rightsquigarrow$ nichtkonstruktiver Beweis

NP

Der Vortrag ohne Worte

Frank Nelson Cole

Rückblick: Polynomielle Verifikatoren

In der Vorlesung Formale Systeme haben wir die folgende Definition kennengelernt:

Ein polynomieller Verifikator für eine Sprache $\mathbf{L} \subseteq \Sigma^*$ ist eine polynomiell-zeitbeschränkte, deterministische TM $\mathcal{M}$, für die gilt:

- $\mathcal{M}$ akzeptiert nur Wörter der Form $w\#z$ mit:
  - $w \in \mathbf{L}$
  - $z \in \Sigma^*$ ist ein Zertifikat polynomieller Länge (d.h. für $\mathcal{M}$ gibt es ein Polynom p mit $|z| \leq p(|w|)$)
- Für jedes Wort $w \in \mathbf{L}$ gibt es ein solches Wort $w\#z \in \mathbf{L}(\mathcal{M})$.

Intuition:

- Das Zertifikat z kodiert die Lösung des Problems w, die der Verifikator lediglich nachprüft.
- Zertifikate sollten kurz sein, damit die Prüfung selbst nicht länger dauert als die Lösung des Problems.

Zertifikate werden auch Nachweis, Beweis oder Zeuge genannt

Rückblick: Nachweis-polynomielle Sprachen

Daraus ergibt sich die Definition einer Sprachklasse:

Eine Sprache $\mathbf{L}$ ist nachweis-polynomiell wenn es für sie einen polynomiellen Verifikator gibt.

Beispiel: Die Entscheidung, ob ein gegebener Graph einen Hamilton-Pfad zulässt, ist nachweis-polynomiell. Als Zertifikat dient der entsprechende Pfad.

NP bedeutet „nachweis-polynomiell“

Wir hatten sodann gezeigt:

Satz: Eine Sprache **L** ist genau dann nachweis-polynomiell wenn $\mathbf{L} \in$ NP.

Beweisidee:

„⇒“ Gibt es einen polynomiellen Verifikator, dann gibt es auch eine polynomiell zeitbeschränkte NTM, die das Zertifikat rät und anschließend verifiziert

„⇐“ Gibt es eine polynomiell zeitbeschränkte NTM, so gibt es einen polynomiellen Verifikator, der diese NTM simuliert: das Zertifikat ist ein akzeptierender Lauf □

Weitere Beispiele für Probleme in NP

SAT (aussagenlogische Erfüllbarkeit)

Gegeben: Eine aussagenlogische Formel F

Frage: Gibt es für F eine erfüllende Belegung?

Teilmengen-Summe (subset sum)

Gegeben: Eine Menge von Gegenständen $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$, wobei jedem Gegenstand a_i ein Wert $v(a_i)$ zugeordnet ist; eine gewünschte Zahl z

Frage: Gibt es eine Teilmenge $T \subseteq S$ mit $\sum_{a \in T} v(a) = z$?

Zusammengesetzte Zahl (Nicht-Primzahl)

Gegeben: Eine natürliche Zahl $z > 1$

Frage: Gibt es eine natürliche Zahlen $p, q > 1$ mit $p \cdot q = z$?

NP ist nicht symmetrisch

Es ist leicht zu sehen:

Satz: Die Klasse P ist unter Komplement abgeschlossen.

Beweis: Wenn es für **L** eine polynomiell-zeitbeschränkte TM $\mathcal{M}$ gibt, dann erhält man eine TM für $\overline{\mathbf{L}}$ indem man akzeptierende und nicht-akzeptierende Zustände von $\mathcal{M}$ vertauscht. □

Allgemein gilt: Jede deterministische Komplexitätsklasse ist unter Komplement abgeschlossen.

Für nichtdeterministische Klassen wie NP ist das nicht so einfach:

Beispiel: Es scheint kein einfaches Zertifikat dafür zu geben, dass ein Graph keinen Hamiltonpfad hat.

Die Klasse aller Sprachen **L**, für die $\overline{\mathbf{L}} \in$ NP gilt, heißt coNP.

Jede NTM-Klasse kann komplementiert werden: coNL, coNExp, ...

In NP oder nicht?

Vermutung: coNP ≠ NP, d.h. Komplemente von „typischen“ Problemen in NP sind nicht in NP.

Aber: Es gibt viele Probleme in coNP ∩ NP. Zum Beispiel ist P ⊆ coNP ∩ NP.

Primzahl (= $\overline{\textbf{Zusammengesetzte Zahl}}$)

Gegeben: Eine natürliche Zahl $z > 1$

Frage: Gibt es eine keine natürliche Zahlen $p, q > 1$ mit $p \cdot q = z$?

Seit 1975 ist bekannt: **Primzahl** ∈ NP, also **Primzahl** ∈ NP ∩ coNP (Zertifikat: „Primality certificate“)

Seit 2002 ist bekannt: **Primzahl** ∈ P (Primzahlentest nach Agrawal, Kayal und Saxena)

Randbemerkung: Ist Kryptografie sicher?

Das Wirkprinzip asymmetrischer Verschlüsselungsverfahren:

- Es ist leicht, zwei Zahlen zu multiplizieren
- Es ist schwer, eine Zahl in ihre Faktoren zu zerlegen

Aber seit 2002 wissen wir: Man kann in polynomieller Zeit entscheiden, ob es Faktoren mit $p \cdot q = z$ gibt.

Haben Agrawal, Kayal und Saxena die Kryptografie geknackt?

Nein:

- Es ist leicht zu entscheiden, ob eine Zahl echte Faktoren hat
- Aber es ist dennoch schwer die Faktoren zu bestimmen (glauben wir zumindest . . .)

Faktorisierung

(Nicht)Existenz von Faktoren (**Primzahl**) erfasst nicht wirklich, wie schwer Faktorisierung ist

$\rightsquigarrow$ Wie kann man das komplexitätstheoretisch ausdrücken?

Faktor-7

Gegeben: Eine natürliche Zahl $z > 1$

Frage: Hat z einen Primfaktor, der mit der Ziffer 7 endet?

Ein interessantes Entscheidungsproblem:

- **Faktor-7** erfordert (vermutlich) die Kenntnis der Primfaktoren, nicht nur die Bestimmung deren Existenz
- **Faktor-7** $\in$ NP: Zertifikat ist die Liste aller Primfaktoren*
- **Faktor-7** $\in$ coNP: Zertifikat ist die Liste aller Primfaktoren*
- Aber niemand konnte bisher zeigen, dass **Faktor-7** $\in$ P vermutlich gilt **Faktor-7** $\notin$ P

* Kontrollfrage: Wieso kann man polynomiell verifizieren, dass dies wirklich Primfaktoren sind?

NP-Vollständigkeit

Probleme vergleichen mit Reduktionen

Intuition:

$$\mathbf{P} \leq_p \mathbf{Q}$$

bedeutet

„**Q** ist mindestens genauso schwer wie **P**“

- Einordnung in Komplexitätsklassen: obere Schranke („**Q** ist mit höchstens polynomiellen Aufwand lösbar“)
- Reduktion auf andere Probleme: untere Schranke („**Q** benötigt mindestens so viel Aufwand wie **P**“)

NP-Härte und NP-Vollständigkeit

Eine Sprache ist

- NP-hart, wenn jede Sprache in NP polynomiell darauf reduzierbar ist
- NP-vollständig, wenn sie NP-hart ist und in NP liegt

Beispiel: **SAT** ist NP-vollständig (Cook & Levin).

Beispiel: **Primzahl** ist in NP, aber vermutlich nicht NP-hart. Gleiches gilt für viele Probleme in P (bei einigen ist dagegen sicher, dass sie nicht NP-hart sind).

Beispiel: Das Halteproblem ist NP-hart aber sicher nicht in NP. Gleiches gilt für jedes unentscheidbare Problem.

Das erste NP-vollständige Problem

Der Beweis der NP-Vollständigkeit von **SAT** war ein wichtiger Durchbruch (siehe auch Vorlesung Formale Systeme)

Beweisidee:

- Durch direkte Reduktion auf das Wortproblem von polynomiell zeitbeschränkten NTMs (dies ist eigentlich „das erste“ NP-vollständige Problem!)
- Wir verwenden so viele aussagenlogische Variablen, dass sie jeden polynomiellen Lauf kodieren könnten (d.h. alle Speicherstellen, Zustände und Positionen in jedem Schritt!)
- Wir verwenden Formeln, so dass jede erfüllende Belegung einen korrekten, akzeptierenden Lauf kodiert

„a whole buttload of variables [and] a shitload of logical relations between them“
– Scott Aaronson, Quantum Computing since Democritus

Weitere NP-vollständige Probleme

Um zu zeigen, dass ein Problem **P** NP-vollständig ist, genügen die folgenden beiden Schritte:

(1) Zeige, dass **P** $\in$ NP
(2) Finde ein bereits bekanntes NP-vollständiges Problem **Q** und zeige **Q** $\leq_p$ **P**

Seit Cook und Levin (frühe 1970-er) wurden tausende von NP-vollständigen Problemen gefunden

Wir werden jetzt einige Beispiele sehen

Clique

Eine Clique ist ein Graph, bei dem jeder Knoten mit jedem anderen direkt durch eine Kante verbunden ist

Clique

Gegeben: Ein Graph G und eine Zahl k

Frage: Enthält G eine Clique mit k Knoten?

Satz: **Clique** ist NP-vollständig.

Beweis:
(1) **Clique** $\in$ NP: Die Clique selbst ist ein geeignetes Zertifikat.

(Kontrollfrage: ist dieses Zertifikat wirklich polynomiell? Ist k in Binärkodierung gegeben, dann ist diese Eingabe schließlich nur $\log(k)$ Zeichen lang ...)

(2) Clique ist NP-hart. Dazu konstruieren wir eine Reduktion von **SAT**.

Clique: Härte (1)

Beweis Teil (2): Clique ist NP-hart.

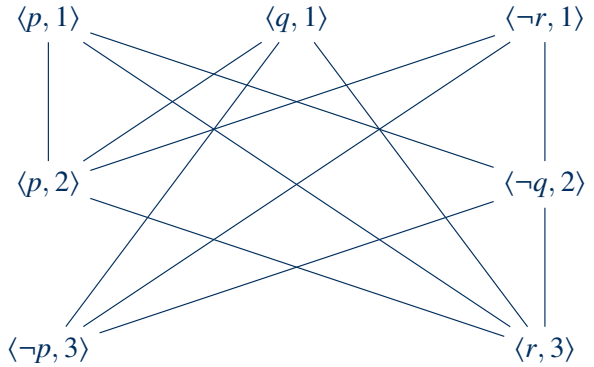
- Sei F eine aussagenlogische Formel in CNF:
  $F = \big((L_1^1 \vee \ldots \vee L_{n_1}^1) \wedge \ldots \wedge (L_1^\ell \vee \ldots \vee L_{n_\ell}^\ell)\big)$
- Wir definieren einen Graphen G_F, so dass gilt:

  G_F hat eine Clique der Größe ℓ gdw. F ist erfüllbar
- Knoten von G_F: die Paare $\langle L_j^i, i\rangle$, für alle $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ und $j \in \{1, \ldots, n_i\}$
- Kanten von G_F: alle Paare $\langle L, i\rangle - \langle L', j\rangle$, für die gilt:
  (1) $i \neq j$ und
  (2) $L \wedge L'$ ist erfüllbar, d.h. $L \neq \neg L'$ und $L' \neq \neg L$

Offensichtlich kann man G_F in polynomieller Zeit berechnen

Clique: Härte (2)

Beispiel: $F = ((p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r))$



Erfüllende Belegung: $p \mapsto 1, q \mapsto 0, r \mapsto 1$

Man sieht leicht, dass unsere Reduktion korrekt ist. □

Unabhängige Mengen

Eine unabhängige Menge ist eine Teilmenge von Knoten in einem Graph, bei der kein Knoten mit einem anderen direkt verbunden ist

Unabhängige Menge

Gegeben: Ein Graph G und eine Zahl k

Frage: Enthält G eine unabhängige Menge mit k Knoten?

Satz: **Unabhängige Menge** ist NP-vollständig.

Beweis: Die Reduktion auf **Clique** ist sehr einfach:

- Ein Graph hat eine unabhängige Menge der Größe k genau dann wenn
- sein Komplementgraph eine Clique der Größe k hat

$\rightsquigarrow$ Komplementierung ist polynomiell □

Zusammenfassung und Ausblick

NP entspricht der Klasse der nachweis-polynomiellen Probleme

Die Klasse der Komplemente von NP-Problemen ist coNP

Polynomielle Reduktionen erlauben uns, die Schwere von Problemen zu vergleichen

Es gibt sehr viele bekannte NP-vollständige Probleme

Was erwartet uns als nächstes?

- Mehr NP
- Pseudopolynomielle Probleme
- Komplexität jenseits von NP