TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik Institut für Theoretische Informatik, Lehrstuhl für Automatentheorie

Theoretische Informatik und Logik

7. Übungsblatt

Sommersemester 2017

Die folgenden Aufgaben werden nicht in den Übungen besprochen und dienen der Selbstkontrolle.

Aufgabe δ

Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Ist $\mathbf{L}_2 \in \mathrm{PSpace}$ und gilt $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$, so ist auch $\mathbf{L}_1 \in \mathrm{PSpace}$.

b) Ist $\mathbf{L}_1$ ein PSpace-hartes Problem, und gilt $\mathbf{L}_1 \leq_p \mathbf{L}_2$, dann ist auch $\mathbf{L}_2$ ein PSpace-hartes Problem.

Aufgabe ε

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Jedes PSpace-harte Problem ist NP-hart.

b) Es gibt kein NP-hartes Problem, welches in PSpace liegt.

c) Jedes NP-vollständige Problem liegt in PSpace.

d) Es gilt $\mathrm{NP} = \mathrm{PSpace}$, wenn es ein PSpace-hartes Problem in NP gibt.

e) Wenn $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ gilt, dann gibt es kein NP-hartes Problem in P.

f) Sei $\mathbf{L}$ ein PSpace-vollständiges Problem. Dann gilt $\mathbf{L} \in \mathrm{P} \iff \mathrm{P} = \mathrm{PSpace}$.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass PSpace unter Komplement, Durchschnitt, Vereinigung, Konkatenation und Kleene-Stern abgeschlossen ist.

Aufgabe 2

Wir betrachten das japanische Spiel *Gomoku*, welches von zwei Spielern X und O auf einem 19×19-Brett gespielt wird. Die Spieler setzen abwechselnd ihre Steine auf das Brett, und derjenige Spieler, der zuerst fünf Steine in einer Reihe (horizontal, vertikal, oder diagonal) gelegt hat, gewinnt. Spieler X beginnt.

Verallgemeinertes Gomoku wird statt auf einem Brett fester Größe auf einem beliebigen $n \times n$-Brett gespielt. Eine *Position* in diesem Spiel ist eine Belegung der Felder des Spielbretts mit Steinen der Spieler X und O, wie sie in einem wirklichen Spiel auftreten könnte. Sei

$$\mathbf{GM} \coloneqq \{\, \mathsf{enc}(B) \mid B \text{ ist eine Position im verallgemeinerten Gomoku, in der X eine Gewinnstrategie hat} \,\},$$

wobei $\mathsf{enc}(B)$ die zeilenweise Kodierung der Position B über einem festen Alphabet ist.

Zeigen Sie $\mathbf{GM} \in \mathrm{PS{\small PACE}}$.

Aufgabe 3

Welche der folgenden QBF-Formeln sind erfüllbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $\exists p_1 . p_1$

b) $\forall p_1 . p_1$

c) $\exists p_1 . \bot$

d) $\forall p_1 . \exists p_2 . p_2 \to p_1$

e) $\forall p_1 . \exists p_2 . \forall p_3 . (p_1 \lor p_2) \land p_3$

f) $\forall p_1 . \forall p_2 . \exists p_3 . \forall p_4 . (p_1 \land p_2 \to p_4) \lor \neg p_3$

Aufgabe 4

Ein *linear bounded automaton* (LBA) ist eine deterministische Turing Maschine $\mathcal{M}$, die bei jeder Berechnung niemals mehr Platz benutzt als bereits durch die Eingabe belegt ist. Dies erreicht $\mathcal{M}$ dadurch, dass sie niemals ein ␣ überschreibt und den Lesekopf nach links bewegt, sobald sie ein ␣ liest.

Zeigen Sie, dass das Wortproblem für LBA

$$\mathbf{P}_{\mathsf{LBA}} \coloneqq \{\, \mathsf{enc}(\mathcal{M})\#\#\,\mathsf{enc}(w) \mid \mathcal{M} \text{ ein LBA, der } w \text{ akzeptiert} \,\}.$$

ein $\mathrm{PS{\small PACE}}$-vollständiges Problem ist.