TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik Institut für Theoretische Informatik, Lehrstuhl für Automatentheorie

Theoretische Informatik und Logik

Musterklausur

Sommersemester 2017

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sei $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ mit $f(x, y) = (x \bmod y)$. Geben Sie ein LOOP-Programm an, welches f berechnet. Dabei dürfen Sie die Abkürzungen aus der Vorlesung benutzen. Erläutern Sie Ihr Programm.

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Zeigen Sie, dass weder das Äquivalenzproblem $\mathbf{P}_{\text{äquiv}}$ für Turing-Maschinen noch dessen Komplement $\overline{\mathbf{P}}_{\text{äquiv}}$ semi-entscheidbar ist, wobei

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{\text{äquiv}} &:= \{ \operatorname{enc}(\mathcal{M}_1)\#\#\operatorname{enc}(\mathcal{M}_2) \mid L(\mathcal{M}_1) = L(\mathcal{M}_2) \}, \\
\overline{\mathbf{P}}_{\text{äquiv}} &:= \{ \operatorname{enc}(\mathcal{M}_1)\#\#\operatorname{enc}(\mathcal{M}_2) \mid L(\mathcal{M}_1) \neq L(\mathcal{M}_2) \}.
\end{aligned}$$

Zeigen Sie dazu, dass $\mathbf{P}_{\text{halt}} \leq_m \mathbf{P}_{\text{äquiv}}$ und $\mathbf{P}_{\text{halt}} \leq_m \overline{\mathbf{P}}_{\text{äquiv}}$ gilt. Weshalb zeigt dies die Aussage?

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Welche der folgenden Probleme sind unentscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Gegeben eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$ über dem Eingabealphabet $\{0, 1, \dots, 9\}$ und eine Zahl n, hält $\mathcal{M}$ nach höchstens n Schritten bei Eingabe 42?

b) Gegeben eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$, ist $L(\mathcal{M})$ unendlich?

c) Gegeben eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$ über einem einelementigen Eingabealphabet, erkennt $\mathcal{M}$ nur Palindrome?

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Zeigen Sie: ist $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, dann gibt es einen Algorithmus, der in polynomieller Zeit für jede erfüllbare aussagenlogische Formel eine erfüllende Belegung findet.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Wir betrachten folgendes Entscheidungsproblem: gegeben eine aussagenlogische Formel F, gibt es eine erfüllende Belegung von F, die nicht alle Variablen wahr macht? Formalisieren Sie dieses Problem als eine Sprache NAT-SAT (*not-all-true satisfiability*) und zeigen Sie, dass NAT-SAT NP-vollständig ist.

Aufgabe 6 (9 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Skolemform für folgende Formeln F und G.

(a) $F = \exists x.\, p(x, y) \rightarrow \exists x.\, q(x, x)$

(b) $G = \forall x.(\forall y.\exists z.\, p(x, y, z) \wedge \exists z.\forall y.\neg p(x, y, z))$

Geben Sie als Zwischenschritte die bereinigte Form, die Negationsnormalform und die Pränexform an.

b) Welche der Umformungen sind nicht semantisch äquivalent? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Gegeben sind die prädikatenlogischen Klauseln K_1 und K_2 mit

$$K_1 = \{p(x, f(y)), \neg q(f(x)), \neg q(y)\},$$
$$K_2 = \{\neg p(f(u), f(u)), q(f(v))\}.$$

a) Berechnen Sie *alle* prädikatenlogischen Resolventen von K_1 und K_2. Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.

b) Ist $\{K_1, K_2\}$ erfüllbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 8 (16 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind jeweils wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten.

a) Ist $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, dann ist auch $\mathrm{NP} = \mathrm{coNP}$.

b) Sind A und B Sprachen mit $A \leq_m B$ und A semi-entscheidbar, dann ist auch B semi-entscheidbar.

c) Die Menge der Instanzen des Postschen Korrespondenzproblems, welche keine Lösung haben, ist semi-entscheidbar.

d) Jede kontextfreie Sprache ist auch co-semi-entscheidbar.

e) Es gibt QBF-Formeln, die erfüllbar, aber nicht allgemeingültig sind.

f) Ist F eine prädikatenlogische Formel mit freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$, dann ist F genau dann erfüllbar, wenn $\forall x_1, \ldots, x_n.\, F$ erfüllbar ist.

g) Ist das Rucksackproblem, bei dem alle Zahlen unär kodiert werden, NP-vollständig, dann ist $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$.

h) Ist F eine prädikatenlogische Formel ohne Variablen, dann ist F erfüllbar.