Theoretische Informatik und Logik

9. Übungsblatt

Sommersemester 2017

Die folgenden Aufgaben werden nicht in den Übungen besprochen und dienen der Selbstkontrolle.

Aufgabe I

Geben Sie für die Formel

$$F = \forall x.\exists y.(p(c_1, z) \wedge (q(x, c_2, z) \vee p(c_2, y))),$$

wobei c_1, c_2 Konstanten sind, folgendes an:

a) die Menge aller Teilformeln;

b) die Menge aller Terme;

c) die Menge aller Variablen, mit Unterscheidung freier und gebundener Variablen;

d) ein Interpretation $\mathcal{I}$ und eine Zuweisung $\mathcal{Z}$ für $\mathcal{I}$, so dass $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models F$.

Aufgabe II

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Es gilt $\{F\} \models G$ genau dann, wenn $F \to G$ allgemeingültig ist.

b) Es gilt $\{F_1, \dots, F_k\} \models G$ genau dann, wenn $\bigwedge_{i=1}^{k} F_i \to G$ allgemeingültig ist.

Aufgabe III

Seien F, G Formeln und x eine Variable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\exists x.(F \to G) \equiv \forall x.F \to \exists x.G.$$

Aufgabe 1

Welche der angegebenen Strukturen sind Modelle der folgenden Formel?

$$\forall x.\, p(x, x) \wedge \forall x, y.\, ((p(x, y) \wedge p(y, x)) \to x \approx y) \wedge \forall x, y, z.\, ((p(x, y) \wedge p(y, z)) \to p(x, z))$$

a) $\mathcal{I}_1$ mit Grundmenge $\mathbb{N}$ und $p^{\mathcal{I}_1} = \{ (m, n) \mid m < n \}$;

b) $\mathcal{I}_2$ mit Grundmenge $\mathbb{N}$ und $p^{\mathcal{I}_2} = \{ (n, n+1) \mid n \in \mathbb{N} \}$;

c) $\mathcal{I}_3$ mit Grundmenge $\mathbb{N}$ und $p^{\mathcal{I}_3} = \{ (m, n) \mid m \text{ teilt } n \}$;

d) $\mathcal{I}_4$ mit Grundmenge Σ^* für ein Alphabet Σ und $p^{\mathcal{I}_4} = \{ (x, y) \mid x \text{ ist Präfix von } y \}$;

e) $\mathcal{I}_5$ mit Grundmenge $\mathfrak{P}(M)$ für eine Menge M und $p^{\mathcal{I}_5} = \{ (X, Y) \mid X \subseteq Y \}$.

Aufgabe 2

a) Geben Sie je eine erfüllbare Formel in Prädikatenlogik mit Gleichheit an, so dass alle Modelle

   (a) höchstens drei,

   (b) mindestens drei,

   (c) genau drei

   Elemente in der Grundmenge besitzen.

b) Geben Sie je eine erfüllbare Formel in Prädikatenlogik mit Gleichheit an, so dass das zweistellige Relationensymbol p in jedem Modell als der Graph einer

   (a) injektiven Funktion,

   (b) surjektiven Funktion,

   (c) bijektiven Funktion

   interpretiert wird.

   (Der Graph einer Funktion $f \colon A \to B$ ist die Relation $\{ (x, y) \in A \times B \mid f(x) = y \}$.)

Aufgabe 3

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Sind Γ und Γ' Mengen von prädikatenlogischen Formeln, dann folgt aus $\Gamma \subseteq \Gamma'$ und $\Gamma \models F$ auch $\Gamma' \models F$.

b) Jede aussagenlogische Formel ist eine prädikatenlogische Formel.

c) Eine prädikatenlogische Formel F ist genau dann allgemeingültig, wenn $\neg F$ unerfüllbar ist.

d) Es gilt

$$\{ \forall x, y.\, (p(x, y) \to p(y, x)), \forall x, y, z.\, ((p(x, y) \land p(y, z)) \to p(x, z)) \} \models \forall x.\, p(x, x).$$

Aufgabe 4

Formalisieren Sie Bertrand Russells Barbier-Paradoxon

Der Barbier rasiert genau diejenigen Personen, die sich nicht selbst rasieren.

als eine prädikatenlogische Formel und zeigen Sie, dass diese unerfüllbar ist.