TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik Institut für Theoretische Informatik, Lehrstuhl für Automatentheorie

Theoretische Informatik und Logik

Repetitorium III

Sommersemester 2017

Aufgabe I

Geben Sie für die Formel

$$F = \forall x.\exists y.(p(c_1, z) \wedge (q(x, c_2, z) \vee p(c_2, y))),$$

wobei c_1, c_2 Konstanten sind, folgendes an:

a) die Menge aller Teilformeln;

b) die Menge aller Terme;

c) die Menge aller Variablen, mit Unterscheidung freier und gebundener Variablen;

d) ein Interpretation $\mathcal{I}$ und eine Zuweisung $\mathcal{Z}$ für $\mathcal{I}$, so dass $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models F$.

Aufgabe II

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Es gilt $\{F\} \models G$ genau dann, wenn $F \to G$ allgemeingültig ist.

b) Es gilt $\{F_1, \dots, F_k\} \models G$ genau dann, wenn $\bigwedge_{i=1}^{k} F_i \to G$ allgemeingültig ist.

Aufgabe III

Seien F, G Formeln und x eine Variable. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\exists x.(F \to G) \equiv \forall x.F \to \exists x.G.$$

Aufgabe IV

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Jede Formel in Pränexform ist in Skolemform.

b) Jede Formel in Skolemform ist in Pränexform.

c) Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel.

d) Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Pränexform.

e) Jede Formel ist äquivalent zu einer bereinigten Formel in Skolemform.

Aufgabe V

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

a) Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Drachen-Kinder fliegen können.

b) Grüne Drachen können fliegen.

c) Ein Drache ist grün, wenn er Kind mindestens eines grünen Drachens ist.

d) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Zeigen Sie, dass die letzte Aussage aus den ersten drei folgt.

Aufgabe VI

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Zwei prädikatenlogische Formeln F und G sind äquivalent, wenn die Formel $F \leftrightarrow G$ allgemeingültig ist.

b) Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe hat ein endliches Modell.

c) Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe hat ein abzählbares Modell.

d) Jede Skolemformel hat höchstens eine Herbrand-Interpretation.

e) Jede Skolemformel hat mindestens ein Herbrand-Modell.

Aufgabe VII

Zeigen Sie, dass man das Resolutionsverfahren der Prädikatenlogik erster Stufe auch zum Nachweis von semantischen Konsequenzen nutzen kann, indem Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen nachweisen:

a) $\Gamma \models F$.

b) $\Gamma \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.

c) $\bigwedge \Gamma \rightarrow F$ ist allgemeingültig.

d) $\bigwedge \Gamma \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Hierbei sei $\bigwedge \Gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$ für $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.