TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

THEORETISCHE INFORMATIK UND LOGIK

17. Vorlesung: Funktionen und Normalformen

Markus Krötzsch

Lehrstuhl Wissensbasierte Systeme

TU Dresden, 21. Juni 2017

Resolution für Prädikatenlogik

Ein konkreter Algorithmus zum logischen Schließen:

(1) Logische Konsequenz auf Unerfüllbarkeit reduzieren

(2) Formeln in Klauselform umwandeln

- Formel bereinigen
- Negationsnormalform bilden
- Pränexform bilden
- Skolemform bilden
- Konjunktive Normalform bilden

(3) Resolutionsverfahren anwenden

- Unifikation zum Finden passender Klauseln
- Bilden von Resolventen bis zur Terminierung

Bereinigte Formeln

Eine Formel F ist bereinigt wenn sie die folgenden beiden Eigenschaften hat:

(1) Keine Variable in F kommt sowohl frei als auch gebunden vor

(2) Keine Variable in F wird in mehr als einem Quantor gebunden

Man kann jede Formel leicht durch Umbenennung gebundener Variablen bereinigen.

Beispiel: Die Formel

$$\forall y.p(x, y) \to \exists x.(r(y, x) \land \forall y.q(x, y))$$

kann wie folgt bereinigt werden:

$$\forall y.p(x, y) \to \exists z.(r(y, z) \land \forall v.q(z, v))$$

Beispiel: Logelei

In Vorlesung 14 betrachteten wir den Fall, dass alle Einwohner einer Insel sagen, „Auf dieser Insel haben alle den gleichen Typ."

Dies entspricht der Theorie aus folgenden Sätzen:

- „Jeder Einwohner ist entweder Wahrheitssager oder Lügner."
  $\forall x.((W(x) \wedge \neg L(x)) \vee (L(x) \wedge \neg W(x)))$
- Lebt auf der Insel ein Wahrheitssager, dann stimmt die Behauptung:
  $\exists x.W(x) \to (\forall x.W(x) \vee \forall x.L(x))$
- Lebt auf der Insel ein Lügner, dann ist die Behauptung falsch:
  $\exists x.L(x) \to \neg(\forall x.W(x) \vee \forall x.L(x))$

Beispiel: Logelei

In Vorlesung 14 betrachteten wir den Fall, dass alle Einwohner einer Insel sagen, „Auf dieser Insel haben alle den gleichen Typ.“

Dies entspricht der Theorie aus folgenden Sätzen:

- „Jeder Einwohner ist entweder Wahrheitssager oder Lügner.“
  $\forall x.((W(x) \wedge \neg L(x)) \vee (L(x) \wedge \neg W(x)))$
- Lebt auf der Insel ein Wahrheitssager, dann stimmt die Behauptung:
  $\exists x.W(x) \to (\forall x.W(x) \vee \forall x.L(x))$
- Lebt auf der Insel ein Lügner, dann ist die Behauptung falsch:
  $\exists x.L(x) \to \neg(\forall x.W(x) \vee \forall x.L(x))$

Diese Theorie ist darstellbar als Konjunktion:

$$\begin{aligned}
&\forall x.((W(x) \wedge \neg L(x)) \vee (L(x) \wedge \neg W(x)))\\
\wedge\ &(\exists x.W(x) \to (\forall x.W(x) \vee \forall x.L(x)))\\
\wedge\ &(\exists x.L(x) \to \neg(\forall x.W(x) \vee \forall x.L(x)))
\end{aligned}$$

Beispiel: Bereinigung

$$\begin{aligned}
&\forall x.\big((W(x) \wedge \neg L(x)) \vee (L(x) \wedge \neg W(x))\big)\\
\wedge\ &\big(\exists x.W(x) \to (\forall x.W(x) \vee \forall x.L(x))\big)\\
\wedge\ &\big(\exists x.L(x) \to \neg(\forall x.W(x) \vee \forall x.L(x))\big)
\end{aligned}$$

Beispiel: Bereinigung

$$
\begin{aligned}
&\forall x.((W(x) \wedge \neg L(x)) \vee (L(x) \wedge \neg W(x))) \\
\wedge\ &(\exists x.W(x) \to (\forall x.W(x) \vee \forall x.L(x))) \\
\wedge\ &(\exists x.L(x) \to \neg(\forall x.W(x) \vee \forall x.L(x)))
\end{aligned}
$$

Wir bereinigen die Formel, indem wir alle gebundenen Variablen umbenennen:

$$
\begin{aligned}
&\forall x_1.((W(x_1) \wedge \neg L(x_1)) \vee (L(x_1) \wedge \neg W(x_1))) \\
\wedge\ &(\exists x_2.W(x_2) \to (\forall x_3.W(x_3) \vee \forall x_4.L(x_4))) \\
\wedge\ &(\exists x_5.L(x_5) \to \neg(\forall x_6.W(x_6) \vee \forall x_7.L(x_7)))
\end{aligned}
$$

Beispiel: Negationsnormalform

Jetzt bilden wir die NNF:

$$\begin{aligned}
&\forall x_1.((W(x_1) \land \neg L(x_1)) \lor (L(x_1) \land \neg W(x_1))) \\
&\land (\exists x_2.W(x_2) \to (\forall x_3.W(x_3) \lor \forall x_4.L(x_4))) \\
&\land (\exists x_5.L(x_5) \to \neg(\forall x_6.W(x_6) \lor \forall x_7.L(x_7)))
\end{aligned}$$

Beispiel: Negationsnormalform

Jetzt bilden wir die NNF:

$$\begin{aligned}
&\forall x_1.((W(x_1) \wedge \neg L(x_1)) \vee (L(x_1) \wedge \neg W(x_1)))\\
&\wedge \underline{(\exists x_2.W(x_2) \to (\forall x_3.W(x_3) \vee \forall x_4.L(x_4)))}\\
&\wedge \underline{(\exists x_5.L(x_5) \to \neg(\forall x_6.W(x_6) \vee \forall x_7.L(x_7)))}
\end{aligned}$$

Beispiel: Negationsnormalform

Jetzt bilden wir die NNF:

$$
\begin{aligned}
& \forall x_1.((W(x_1) \land \neg L(x_1)) \lor (L(x_1) \land \neg W(x_1))) \\
& \land \underline{(\exists x_2.W(x_2) \rightarrow (\forall x_3.W(x_3) \lor \forall x_4.L(x_4)))} \\
& \land \underline{(\exists x_5.L(x_5) \rightarrow \neg(\forall x_6.W(x_6) \lor \forall x_7.L(x_7)))} \\
\equiv \quad & \forall x_1.((W(x_1) \land \neg L(x_1)) \lor (L(x_1) \land \neg W(x_1))) \\
& \land (\neg\exists x_2.W(x_2) \lor (\forall x_3.W(x_3) \lor \forall x_4.L(x_4))) \\
& \land (\neg\exists x_5.L(x_5) \lor \neg(\forall x_6.W(x_6) \lor \forall x_7.L(x_7)))
\end{aligned}
$$

Beispiel: Negationsnormalform

Jetzt bilden wir die NNF:

$$
\begin{aligned}
& \forall x_1.((W(x_1) \wedge \neg L(x_1)) \vee (L(x_1) \wedge \neg W(x_1))) \\
& \wedge \underline{(\exists x_2.W(x_2) \rightarrow (\forall x_3.W(x_3) \vee \forall x_4.L(x_4)))} \\
& \wedge \underline{(\exists x_5.L(x_5) \rightarrow \neg(\forall x_6.W(x_6) \vee \forall x_7.L(x_7)))} \\
\equiv\quad & \forall x_1.((W(x_1) \wedge \neg L(x_1)) \vee (L(x_1) \wedge \neg W(x_1))) \\
& \wedge (\underline{\neg\exists x_2.W(x_2)} \vee (\forall x_3.W(x_3) \vee \forall x_4.L(x_4))) \\
& \wedge (\underline{\neg\exists x_5.L(x_5)} \vee \underline{\neg(\forall x_6.W(x_6) \vee \forall x_7.L(x_7))})
\end{aligned}
$$

Beispiel: Negationsnormalform

Jetzt bilden wir die NNF:

$$
\begin{aligned}
& \forall x_1.((W(x_1) \wedge \neg L(x_1)) \vee (L(x_1) \wedge \neg W(x_1))) \\
& \wedge \underline{(\exists x_2.W(x_2) \to (\forall x_3.W(x_3) \vee \forall x_4.L(x_4)))} \\
& \wedge \underline{(\exists x_5.L(x_5) \to \neg(\forall x_6.W(x_6) \vee \forall x_7.L(x_7)))} \\
\equiv \quad & \forall x_1.((W(x_1) \wedge \neg L(x_1)) \vee (L(x_1) \wedge \neg W(x_1))) \\
& \wedge (\underline{\neg\exists x_2.W(x_2)} \vee (\forall x_3.W(x_3) \vee \forall x_4.L(x_4))) \\
& \wedge (\underline{\neg\exists x_5.L(x_5)} \vee \underline{\neg(\forall x_6.W(x_6) \vee \forall x_7.L(x_7))}) \\
\equiv \quad & \forall x_1.((W(x_1) \wedge \neg L(x_1)) \vee (L(x_1) \wedge \neg W(x_1))) \\
& \wedge (\forall x_2.\neg W(x_2) \vee (\forall x_3.W(x_3) \vee \forall x_4.L(x_4))) \\
& \wedge (\forall x_5.\neg L(x_5) \vee (\neg\forall x_6.W(x_6) \wedge \neg\forall x_7.L(x_7)))
\end{aligned}
$$

Beispiel: Negationsnormalform

Jetzt bilden wir die NNF:

$$
\begin{aligned}
& \forall x_1.((W(x_1) \wedge \neg L(x_1)) \vee (L(x_1) \wedge \neg W(x_1))) \\
& \wedge \underline{(\exists x_2.W(x_2) \rightarrow (\forall x_3.W(x_3) \vee \forall x_4.L(x_4)))} \\
& \wedge \underline{(\exists x_5.L(x_5) \rightarrow \neg(\forall x_6.W(x_6) \vee \forall x_7.L(x_7)))} \\
\equiv\quad & \forall x_1.((W(x_1) \wedge \neg L(x_1)) \vee (L(x_1) \wedge \neg W(x_1))) \\
& \wedge (\underline{\neg\exists x_2.W(x_2)} \vee (\forall x_3.W(x_3) \vee \forall x_4.L(x_4))) \\
& \wedge (\underline{\neg\exists x_5.L(x_5)} \vee \underline{\neg(\forall x_6.W(x_6) \vee \forall x_7.L(x_7))}) \\
\equiv\quad & \forall x_1.((W(x_1) \wedge \neg L(x_1)) \vee (L(x_1) \wedge \neg W(x_1))) \\
& \wedge (\forall x_2.\neg W(x_2) \vee (\forall x_3.W(x_3) \vee \forall x_4.L(x_4))) \\
& \wedge (\forall x_5.\neg L(x_5) \vee (\underline{\neg\forall x_6.W(x_6)} \wedge \underline{\neg\forall x_7.L(x_7)}))
\end{aligned}
$$

Beispiel: Negationsnormalform

Jetzt bilden wir die NNF:

$$
\begin{aligned}
& \forall x_1.((W(x_1) \land \neg L(x_1)) \lor (L(x_1) \land \neg W(x_1))) \\
& \quad \land \underline{(\exists x_2.W(x_2) \to (\forall x_3.W(x_3) \lor \forall x_4.L(x_4)))} \\
& \quad \land \underline{(\exists x_5.L(x_5) \to \neg(\forall x_6.W(x_6) \lor \forall x_7.L(x_7)))} \\
\equiv \quad & \forall x_1.((W(x_1) \land \neg L(x_1)) \lor (L(x_1) \land \neg W(x_1))) \\
& \quad \land (\underline{\neg\exists x_2.W(x_2)} \lor (\forall x_3.W(x_3) \lor \forall x_4.L(x_4))) \\
& \quad \land (\underline{\neg\exists x_5.L(x_5)} \lor \underline{\neg(\forall x_6.W(x_6) \lor \forall x_7.L(x_7))}) \\
\equiv \quad & \forall x_1.((W(x_1) \land \neg L(x_1)) \lor (L(x_1) \land \neg W(x_1))) \\
& \quad \land (\forall x_2.\neg W(x_2) \lor (\forall x_3.W(x_3) \lor \forall x_4.L(x_4))) \\
& \quad \land (\forall x_5.\neg L(x_5) \lor (\underline{\neg\forall x_6.W(x_6)} \land \underline{\neg\forall x_7.L(x_7)})) \\
\equiv \quad & \forall x_1.((W(x_1) \land \neg L(x_1)) \lor (L(x_1) \land \neg W(x_1))) \\
& \quad \land (\forall x_2.\neg W(x_2) \lor (\forall x_3.W(x_3) \lor \forall x_4.L(x_4))) \\
& \quad \land (\forall x_5.\neg L(x_5) \lor (\exists x_6.\neg W(x_6) \land \exists x_7.\neg L(x_7)))
\end{aligned}
$$

Pränexform

Eine Formel ist in Pränexform, wenn alle ihre Quantoren am Anfang stehen, d.h. wenn sie die folgende Form hat

$$Q_1 x_1. \cdots Q_n x_n.F$$

mit $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\exists, \forall\}$ und F eine Formel ohne Quantoren.

Man kann beliebige Formeln leicht in äquivalente Formeln in Pränexform umwandeln.

Umwandlung in Pränexform (1)

Satz: Sei F eine bereinigte Formel in NNF. Eine zu F semantische äquivalente Formel in Pränexform entsteht durch erschöpfende Ersetzung von Teilformeln nach folgendem Schema:

$$(\mathsf{Q}x.F \circ G) \mapsto \mathsf{Q}x.(F \circ G) \qquad\qquad (G \circ \mathsf{Q}x.F) \mapsto \mathsf{Q}x.(G \circ F)$$

für beliebige $\mathsf{Q} \in \{\exists, \forall\}$ und $\circ \in \{\vee, \wedge\}$.

Umwandlung in Pränexform (1)

Satz: Sei F eine bereinigte Formel in NNF. Eine zu F semantische äquivalente Formel in Pränexform entsteht durch erschöpfende Ersetzung von Teilformeln nach folgendem Schema:

$$(\mathsf{Q}x.F \circ G) \mapsto \mathsf{Q}x.(F \circ G) \qquad\qquad (G \circ \mathsf{Q}x.F) \mapsto \mathsf{Q}x.(G \circ F)$$

für beliebige $\mathsf{Q} \in \{\exists, \forall\}$ und $\circ \in \{\vee, \wedge\}$.

Beweis: (Korrektheit) Wenn der Algorithmus terminiert, dann ist die Formel in Pränexform. Denn eine Formel in NNF, die nicht in Pränexform ist, muss eine ersetzbare Teilformel enthalten.

Umwandlung in Pränexform (1)

Satz: Sei F eine bereinigte Formel in NNF. Eine zu F semantische äquivalente Formel in Pränexform entsteht durch erschöpfende Ersetzung von Teilformeln nach folgendem Schema:

$$(\mathcal{Q}x.F \circ G) \mapsto \mathcal{Q}x.(F \circ G) \qquad\qquad (G \circ \mathcal{Q}x.F) \mapsto \mathcal{Q}x.(G \circ F)$$

für beliebige $\mathcal{Q} \in \{\exists, \forall\}$ und $\circ \in \{\vee, \wedge\}$.

Beweis: (Korrektheit) Wenn der Algorithmus terminiert, dann ist die Formel in Pränexform. Denn eine Formel in NNF, die nicht in Pränexform ist, muss eine ersetzbare Teilformel enthalten.

Es entsteht in jedem Schritt eine semantisch äquivalente Formel, weil wir eine Formel durch eine Äquivalente ersetzen (Äquivalenz gilt, da x in G nicht vorkommt). Also ist die Formel auch nach beliebig vielen Schritten noch äquivalent (= Induktion über die Zahl der Schritte).

Umwandlung in Pränexform (2)

Satz: Sei F eine bereinigte Formel in NNF. Eine zu F semantische äquivalente Formel in Pränexform entsteht durch erschöpfende Ersetzung von Teilformeln nach folgendem Schema:

$$(\text{Ꝺ}x.F \circ G) \mapsto \text{Ꝺ}x.(F \circ G) \qquad (G \circ \text{Ꝺ}x.F) \mapsto \text{Ꝺ}x.(G \circ F)$$

für beliebige $\text{Ꝺ} \in \{\exists, \forall\}$ und $\circ \in \{\vee, \wedge\}$.

Beweis: (Terminierung) Man kann die Ersetzungen nicht unendlich oft anwenden:

Umwandlung in Pränexform (2)

Satz: Sei F eine bereinigte Formel in NNF. Eine zu F semantische äquivalente Formel in Pränexform entsteht durch erschöpfende Ersetzung von Teilformeln nach folgendem Schema:

$$(\mathsf{Q}x.F \circ G) \mapsto \mathsf{Q}x.(F \circ G) \qquad\qquad (G \circ \mathsf{Q}x.F) \mapsto \mathsf{Q}x.(G \circ F)$$

für beliebige $\mathsf{Q} \in \{\exists, \forall\}$ und $\circ \in \{\vee, \wedge\}$.

Beweis: (Terminierung) Man kann die Ersetzungen nicht unendlich oft anwenden:

- Für einer Formel F sei $J(F)$ die Zahl der Junktoren in F
- Sei $Q(F) := \sum\{J(\mathsf{Q}x.G) \mid \mathsf{Q}x.G$ Teilformel in $F\}$ die Summe der Zahl von Junktoren unterhalb jedes Quantors

Umwandlung in Pränexform (2)

Satz: Sei F eine bereinigte Formel in NNF. Eine zu F semantische äquivalente Formel in Pränexform entsteht durch erschöpfende Ersetzung von Teilformeln nach folgendem Schema:

$$(\mathsf{Q}x.F \circ G) \mapsto \mathsf{Q}x.(F \circ G) \qquad\qquad (G \circ \mathsf{Q}x.F) \mapsto \mathsf{Q}x.(G \circ F)$$

für beliebige $\mathsf{Q} \in \{\exists, \forall\}$ und $\circ \in \{\vee, \wedge\}$.

Beweis: (Terminierung) Man kann die Ersetzungen nicht unendlich oft anwenden:

- Für einer Formel F sei $J(F)$ die Zahl der Junktoren in F
- Sei $Q(F) := \sum\{J(\mathsf{Q}x.G) \mid \mathsf{Q}x.G$ Teilformel in $F\}$ die Summe der Zahl von Junktoren unterhalb jedes Quantors
- $Q(F)$ wird in jedem Ersetzungsschritt größer, aber die Gesamtzahl der Quantoren und Junktoren bleibt gleich, d.h. es gibt einen Maximalwert, den $Q(F)$ nicht übersteigen kann

$\rightsquigarrow$ Das Verfahren muss irgendwann anhalten $\square$

Beispiel: Pränexform

Zuletzt werden für die Pränexform alle Quantoren nach vorn gezogen:

$$
\begin{aligned}
&\forall x_1.((W(x_1) \wedge \neg L(x_1)) \vee (L(x_1) \wedge \neg W(x_1)))\\
&\wedge \big(\forall x_2.\neg W(x_2) \vee (\forall x_3.W(x_3) \vee \forall x_4.L(x_4))\big)\\
&\wedge \big(\forall x_5.\neg L(x_5) \vee (\exists x_6.\neg W(x_6) \wedge \exists x_7.\neg L(x_7))\big)
\end{aligned}
$$

Beispiel: Pränexform

Zuletzt werden für die Pränexform alle Quantoren nach vorn gezogen:

$$
\begin{aligned}
& \forall x_1.((W(x_1) \wedge \neg L(x_1)) \vee (L(x_1) \wedge \neg W(x_1))) \\
& \wedge (\forall x_2.\neg W(x_2) \vee (\forall x_3.W(x_3) \vee \forall x_4.L(x_4))) \\
& \wedge (\forall x_5.\neg L(x_5) \vee (\exists x_6.\neg W(x_6) \wedge \exists x_7.\neg L(x_7))) \\
\equiv \quad & \forall x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.\exists x_6, x_7. \\
& \Big(((W(x_1) \wedge \neg L(x_1)) \vee (L(x_1) \wedge \neg W(x_1))) \\
& \wedge (\neg W(x_2) \vee (W(x_3) \vee L(x_4))) \\
& \wedge (\neg L(x_5) \vee (\neg W(x_6) \wedge \neg L(x_7)))\Big)
\end{aligned}
$$

Skolem

Thoralf Albert Skolem

(1887–1963)

- Norwegischer Mathematiker
- Pionier der mathematischen Logik
- Wesentliche Beiträge – zum Teil erst mit großer Verspätung von der Fachwelt wahrgenommen[1]
- Skeptisch gegenüber unendlichen Mengen[2]

(siehe auch Hao Wang, 1996)

---

[1] Zum Beispiel schlägt er Verbesserungen von Zermelos Mengenlehre vor, fast zeitgleich zu Fraenkel, der dafür berühmt wurde. Auch hätte er fast Gödels Vollständigkeitssatz vor Gödel bewiesen.

[2] Gödel glaubte, dass diese Abneigung der Grund war, dass Skolem den Vollständigkeitssatz nicht als erster gezeigt hat.

Skolems Funktionen

Eine für uns wesentliche Idee Skolems (1920) ist folgende:

Man kann sich existentielle Quantifikation auch als Auswertung einer Funktion vorstellen, deren Funktionswert das gesuchte Element ist.

Skolems Funktionen

Eine für uns wesentliche Idee Skolems (1920) ist folgende:

Man kann sich existentielle Quantifikation auch als Auswertung einer Funktion vorstellen, deren Funktionswert das gesuchte Element ist.

Beispiel: Den Satz $\forall x.\exists y.\text{hatVater}(x, y)$ („Jeder hat einen Vater“) könnte formuliert werden als $\forall x.\text{hatVater}(x, \text{vater}(x))$. Letzteres ist so zu verstehen:

- Es gibt eine einstellige Funktion vater,
- welche für jedes Domänenelement den Vater (genauer gesagt „einen Vater“) des Elements liefert.

Daraus folgt insbesondere auch, dass jeder einen Vater hat.

Um das zu formalisieren müssen wir zunächst Funktionssymbole in die Logik einführen.

Terme mit Funktionssymbolen

Prädikatenlogik mit Funktionen verwendet eine erweiterte Signatur:

- Eine Menge **V** von Variablen $x, y, z, \ldots$
- Eine Menge **C** von Konstanten $a, b, c, \ldots$
- Eine Menge **F** von Funktionssymbolen $f, g, h, \ldots$
- Eine Menge **P** von Prädikatensymbolen $p, q, r, \ldots$

Jedes Prädikat und jedes Funktionssymbol hat eine Stelligkeit ≥ 0 (auch Arität genannt). Die Mengen sind abzählbar und disjunkt.

Terme mit Funktionssymbolen

Prädikatenlogik mit Funktionen verwendet eine erweiterte Signatur:

- Eine Menge **V** von Variablen $x, y, z, \ldots$
- Eine Menge **C** von Konstanten $a, b, c, \ldots$
- Eine Menge **F** von Funktionssymbolen $f, g, h, \ldots$
- Eine Menge **P** von Prädikatensymbolen $p, q, r, \ldots$

Jedes Prädikat und jedes Funktionssymbol hat eine Stelligkeit ≥ 0 (auch Arität genannt). Die Mengen sind abzählbar und disjunkt.

Mit Funktionssymbolen lassen sich komplexere Terme konstruieren:

Ein Term der Prädikatenlogik mit Funktionen ist jeder Ausdruck t, der eine der folgenden rekursiven Bedinungen erfüllt:

- $t \in$ **V** $\cup$ **C**, d.h. t ist eine Variable oder eine Konstante
- $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, wobei $f \in$ **F** ein n-stelliges Funktionssymbol ist und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind.

Syntax der Prädikatenlogik mit Funktionen

Mit dieser Erweiterung können nun Formeln wie gewohnt konstruiert werden:

Ein Atom der Prädikatenlogik mit Funktionen ist ein Ausdruck $p(t_1, \ldots, t_n)$ für ein n-stelliges Prädikatensymbol $p \in \mathbf{P}$ und Terme $t_1, \ldots, t_n$, die Funktionssymbole verwenden dürfen.

Die Menge der prädikatenlogischen Formeln mit Funktionssymbolen ergibt sich wie bei Prädikatenlogik ohne Funktionen induktiv aus der Menge der Atome unter Verwendung der Operatoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\exists x.$ und $\forall x.$ ($x \in \mathbf{V}$).

Beispiele:

- $\forall x.(\mathsf{hatBruder}(\mathsf{mutter}(x)) \rightarrow \mathsf{hatOheim}(x, \mathsf{bruder}(\mathsf{mutter}(x))))$
- $\forall x, y.(\mathsf{mutter}(x) \approx \mathsf{mutter}(y) \rightarrow \mathsf{geschwister}(x, y))$

Semantik der Prädikatenlogik mit Funktionen

Wir müssen nun auf Funktionssymbole interpretieren:

Eine Interpretation $\mathcal{I}$ der Prädikatenlogik mit Funktionen ist ein Paar $\langle \Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ bestehend aus einer nichtleeren Grundmenge von Elemente $\Delta^{\mathcal{I}}$ (der Domäne) und einer Interpretationsfunktion $\cdot^{\mathcal{I}}$, welche:

- jede Konstante $a \in \mathbf{C}$ auf ein Element $a^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$,
- jedes n-stellige Funktionssymbol $f \in \mathbf{F}$ auf eine n-stellige Funktion $f^{\mathcal{I}} : (\Delta^{\mathcal{I}})^n \to \Delta^{\mathcal{I}}$ und
- jedes n-stellige Prädikatensymbol $p \in \mathbf{P}$ auf eine Relation $p^{\mathcal{I}} \in (\Delta^{\mathcal{I}})^n$

abbildet.

Zuweisungen werden wie zuvor definiert (Abbildungen von Variablen auf Domänenelemente)

Formeln mit Funktionssymbolen interpretieren

Zur Interpretation von Atomen werten wir Funktionsterme gesondert aus:

Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation und $\mathcal{Z}$ eine Zuweisung für $\mathcal{I}$.

- Für eine Konstante c definieren wir $c^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} = c^{\mathcal{I}}$
- Für eine Variable x definieren wir $x^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}(x)$
- Für einen Funktionsterm $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ definieren wir $t^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} = f^{\mathcal{I}}(t_1^{\mathcal{I},\mathcal{Z}}, \ldots, t_n^{\mathcal{I},\mathcal{Z}})$

Für ein Atom $p(t_1, \ldots, t_n)$ setzen wir wie gewohnt:

- $p(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} = 1$ wenn $\langle t_1^{\mathcal{I},\mathcal{Z}}, \ldots, t_n^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} \rangle \in p^{\mathcal{I}}$ und
- $p(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} = 0$ wenn $\langle t_1^{\mathcal{I},\mathcal{Z}}, \ldots, t_n^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} \rangle \notin p^{\mathcal{I}}$.

Wir definieren $\mathcal{I}, \mathcal{Z} \models F$ wie zuvor, rekursiv auf der Struktur der Formeln.

Beispiel

Gemeinsam mit Gleichheit eignen sich Funktionen gut, um mathematische Operationen auszudrücken.

Die Theorie der kommutativen Monoide ist in Prädikatenlogik mit einem Funktionssymbol $\oplus$ (infix geschrieben) und Gleichheit wie folgt darstellbar:

$$\begin{aligned} \forall x, y, z.&((x \oplus y) \oplus z) \approx (x \oplus (y \oplus z)) \\ \forall x, y.&\qquad (x \oplus y) \approx (y \oplus x) \\ \forall x.&\qquad (x \oplus \mathtt{0}) \approx \mathtt{0} \end{aligned}$$

Ein mögliches Modell $\mathcal{I}$:

- $\Delta^{\mathcal{I}} = \mathbb{N}$
- $\mathtt{0}^{\mathcal{I}} = 0$
- $\oplus^{\mathcal{I}} = +$ (Addition über natürlichen Zahlen)

Achtung: Es gibt oft mehr mögliche Modelle als man denkt. Prädikatenlogik eignet sich zur Beschreibung algebraischer Strukturen allgemein, aber nicht zur Beschreibung ganz spezieller Strukturen wie der natürlichen Zahlen.

Skolemisierung

Sei $\forall x_1 . \cdots \forall x_n . \exists y . F$ eine Formel in Pränexform, bei der $\exists y$ das erste Vorkommen eines Existenzquantors ist. Die Skolemisierung von y ist die Formel $\forall x_1 . \cdots \forall x_n . F'$, definiert wie folgt:

- $F' = F\{y \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)\}$ entsteht aus F, indem man jedes (freie) Vorkommen von y in F durch den Skolemterm $f(x_1, \ldots, x_n)$ ersetzt
- dabei ist f ein n-stelliges Funktionssymbol, das bisher nirgends verwendet wurde, genannt Skolemfunktion.

Die Skolemisierung einer Formel in Pränexform erhält man durch Skolemisieren jeder ihrer existentiell quantifizierten Variablen, von vorn nach hinten.

Skolemisierung

Sei $\forall x_1.\cdots\forall x_n.\exists y.F$ eine Formel in Pränexform, bei der $\exists y$ das erste Vorkommen eines Existenzquantors ist. Die Skolemisierung von y ist die Formel $\forall x_1.\cdots\forall x_n.F'$, definiert wie folgt:

- $F' = F\{y \mapsto f(x_1,\ldots,x_n)\}$ entsteht aus F, indem man jedes (freie) Vorkommen von y in F durch den Skolemterm $f(x_1,\ldots,x_n)$ ersetzt
- dabei ist f ein n-stelliges Funktionssymbol, das bisher nirgends verwendet wurde, genannt Skolemfunktion.

Die Skolemisierung einer Formel in Pränexform erhält man durch Skolemisieren jeder ihrer existentiell quantifizierten Variablen, von vorn nach hinten.

Beispiel: Für die Formel $\forall x.\exists y.\forall z.\exists v.p(x,y,z,v)$ ergibt sich:

Skolemisierung von y: $\forall x.\forall z.\exists v.p(x,f(x),z,v)$

Skolemisierung von v: $\forall x.\forall z.p(x,f(x),z,g(x,z))$

Korrektheit der Skolemisierung

Skolemisierung führt nicht zu semantisch äquivalenten Formeln:

Beispiel: Die Formel $\forall x.\exists y.(p(x) \to p(y))$ ist eine Tautologie, aber ihre Skolemisierung $\forall x.(p(x) \to p(f(y)))$ ist widerlegbar:
Sei $\Delta^{\mathcal{I}} := \{\alpha, \beta\}$, $p^{\mathcal{I}} := \{\alpha\}$ sowie $f^{\mathcal{I}}(\delta) := \beta$ für alle $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$.
Dann ist $\mathcal{I} \not\models \forall x.(p(x) \to p(f(y)))$, da $\mathcal{I}, \{x \mapsto \alpha\} \not\models p(x) \to p(f(y))$.

Korrektheit der Skolemisierung

Skolemisierung führt nicht zu semantisch äquivalenten Formeln:

Beispiel: Die Formel $\forall x.\exists y.(p(x) \to p(y))$ ist eine Tautologie, aber ihre Skolemisierung $\forall x.(p(x) \to p(f(y)))$ ist widerlegbar:
Sei $\Delta^{\mathcal{I}} := \{\alpha, \beta\}$, $p^{\mathcal{I}} := \{\alpha\}$ sowie $f^{\mathcal{I}}(\delta) := \beta$ für alle $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$.
Dann ist $\mathcal{I} \not\models \forall x.(p(x) \to p(f(y)))$, da $\mathcal{I}, \{x \mapsto \alpha\} \not\models p(x) \to p(f(y))$.

Skolemisierung erhält aber Erfüllbarkeit:

Satz: Eine Formel in Pränexform F ist genau dann erfüllbar, wenn auch die Skolemisierung von F erfüllbar ist.

Anmerkung: Man kann einen Erfüllbarkeitstest also auf der Skolemisierten Formel ausführen – das reicht, um logisches Schließen zu implementieren

Korrektheit der Skolemisierung: Beweis

Satz: Eine Formel in Pränexform F ist genau dann erfüllbar, wenn auch die Skolemisierung von F erfüllbar ist.

Beweis: Wir zeigen die Behauptung für die Skolemisierung einer einzelnen Variablen, d.h. die Erfüllbarkeitsäquivalenz von $\forall x_1.\cdots\forall x_n.\exists y.F$ und $\forall x_1.\cdots\forall x_n.F[y \mapsto f(x_1,\ldots,x_n)]$.

Korrektheit der Skolemisierung: Beweis

Satz: Eine Formel in Pränexform F ist genau dann erfüllbar, wenn auch die Skolemisierung von F erfüllbar ist.

Beweis: Wir zeigen die Behauptung für die Skolemisierung einer einzelnen Variablen, d.h. die Erfüllbarkeitsäquivalenz von $\forall x_1. \cdots \forall x_n. \exists y.F$ und $\forall x_1. \cdots \forall x_n.F[y \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)]$.
Dann folgt der Satz durch Induktion über die Zahl der $\exists$.

Korrektheit der Skolemisierung: Beweis

Satz: Eine Formel in Pränexform F ist genau dann erfüllbar, wenn auch die Skolemisierung von F erfüllbar ist.

Beweis: Wir zeigen die Behauptung für die Skolemisierung einer einzelnen Variablen, d.h. die Erfüllbarkeitsäquivalenz von $\forall x_1.\cdots\forall x_n.\exists y.F$ und $\forall x_1.\cdots\forall x_n.F[y\mapsto f(x_1,\ldots,x_n)]$.
Dann folgt der Satz durch Induktion über die Zahl der $\exists$.

$$\mathcal{I}\models\forall x_1.\cdots\forall x_n.\exists y.F$$

Korrektheit der Skolemisierung: Beweis

Satz: Eine Formel in Pränexform F ist genau dann erfüllbar, wenn auch die Skolemisierung von F erfüllbar ist.

Beweis: Wir zeigen die Behauptung für die Skolemisierung einer einzelnen Variablen, d.h. die Erfüllbarkeitsäquivalenz von $\forall x_1. \cdots \forall x_n.\exists y.F$ und $\forall x_1. \cdots \forall x_n.F[y \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)]$.
Dann folgt der Satz durch Induktion über die Zahl der $\exists$.

$\mathcal{I} \models \forall x_1. \cdots \forall x_n.\exists y.F$

gdw. für alle $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \Delta^{\mathcal{I}}$ existiert ein $\epsilon \in \Delta^{\mathcal{I}}$, so dass $\mathcal{I}, \{x_1 \mapsto \delta_1, \ldots, x_n \mapsto \delta_n, y \mapsto \epsilon\} \models F$

Korrektheit der Skolemisierung: Beweis

Satz: Eine Formel in Pränexform F ist genau dann erfüllbar, wenn auch die Skolemisierung von F erfüllbar ist.

Beweis: Wir zeigen die Behauptung für die Skolemisierung einer einzelnen Variablen, d.h. die Erfüllbarkeitsäquivalenz von $\forall x_1.\cdots\forall x_n.\exists y.F$ und $\forall x_1.\cdots\forall x_n.F[y \mapsto f(x_1,\ldots,x_n)]$.
Dann folgt der Satz durch Induktion über die Zahl der $\exists$.

$\mathcal{I} \models \forall x_1.\cdots\forall x_n.\exists y.F$

gdw. für alle $\delta_1,\ldots,\delta_n \in \Delta^{\mathcal{I}}$ existiert ein $\epsilon \in \Delta^{\mathcal{I}}$, so dass $\mathcal{I},\{x_1 \mapsto \delta_1,\ldots,x_n \mapsto \delta_n, y \mapsto \epsilon\} \models F$

Wir definieren: $f^{\mathcal{I}}(\delta_1,\ldots,\delta_n) := \epsilon$ für ein solches ϵ

Korrektheit der Skolemisierung: Beweis

Satz: Eine Formel in Pränexform F ist genau dann erfüllbar, wenn auch die Skolemisierung von F erfüllbar ist.

Beweis: Wir zeigen die Behauptung für die Skolemisierung einer einzelnen Variablen, d.h. die Erfüllbarkeitsäquivalenz von $\forall x_1.\cdots\forall x_n.\exists y.F$ und $\forall x_1.\cdots\forall x_n.F[y \mapsto f(x_1,\ldots,x_n)]$.
Dann folgt der Satz durch Induktion über die Zahl der $\exists$.

$\mathcal{I} \models \forall x_1.\cdots\forall x_n.\exists y.F$

gdw. für alle $\delta_1,\ldots,\delta_n \in \Delta^{\mathcal{I}}$ existiert ein $\epsilon \in \Delta^{\mathcal{I}}$, so dass $\mathcal{I},\{x_1 \mapsto \delta_1,\ldots,x_n \mapsto \delta_n, y \mapsto \epsilon\} \models F$

Wir definieren: $f^{\mathcal{I}}(\delta_1,\ldots,\delta_n) := \epsilon$ für ein solches ϵ

gdw. für alle $\delta_1,\ldots,\delta_n \in \Delta^{\mathcal{I}}$, so dass $\mathcal{I},\{x_1 \mapsto \delta_1,\ldots,x_n \mapsto \delta_n\} \models F\{y \mapsto f(x_1,\ldots,x_n)\}$

Korrektheit der Skolemisierung: Beweis

Satz: Eine Formel in Pränexform F ist genau dann erfüllbar, wenn auch die Skolemisierung von F erfüllbar ist.

Beweis: Wir zeigen die Behauptung für die Skolemisierung einer einzelnen Variablen, d.h. die Erfüllbarkeitsäquivalenz von $\forall x_1.\cdots\forall x_n.\exists y.F$ und $\forall x_1.\cdots\forall x_n.F[y\mapsto f(x_1,\ldots,x_n)]$.
Dann folgt der Satz durch Induktion über die Zahl der $\exists$.

$\mathcal{I}\models\forall x_1.\cdots\forall x_n.\exists y.F$

gdw. für alle $\delta_1,\ldots,\delta_n \in \Delta^{\mathcal{I}}$ existiert ein $\epsilon\in\Delta^{\mathcal{I}}$, so dass $\mathcal{I},\{x_1\mapsto\delta_1,\ldots,x_n\mapsto\delta_n,y\mapsto\epsilon\}\models F$

Wir definieren: $f^{\mathcal{I}}(\delta_1,\ldots,\delta_n) := \epsilon$ für ein solches ϵ

gdw. für alle $\delta_1,\ldots,\delta_n\in\Delta^{\mathcal{I}}$, so dass $\mathcal{I},\{x_1\mapsto\delta_1,\ldots,x_n\mapsto\delta_n\}\models F\{y\mapsto f(x_1,\ldots,x_n)\}$

gdw. $\mathcal{I}\models\forall x_1.\cdots\forall x_n.F\{y\mapsto f(x_1,\ldots,x_n)\}$ $\square$

Sind also Funktionen ausdrucksstärker als $\exists$?

Sind also Funktionen ausdrucksstärker als $\exists$?

Nein. Wir können eine n-stellige Funktion f durch ein $(n+1)$-stelliges Prädikat p_f darstellen, z.B. mit folgender Theorie:

$$\forall x_1, \ldots, x_n . \exists y . p_f(x_1, \ldots, x_n, y)$$

$$\forall x_1, \ldots, x_n, y, z . ((p_f(x_1, \ldots, x_n, y) \land p_f(x_1, \ldots, x_n, z)) \to y \approx z)$$

Sind also Funktionen ausdrucksstärker als $\exists$?

Nein. Wir können eine n-stellige Funktion f durch ein $(n+1)$-stelliges Prädikat p_f darstellen, z.B. mit folgender Theorie:

$$\forall x_1, \ldots, x_n. \exists y. p_f(x_1, \ldots, x_n, y)$$

$$\forall x_1, \ldots, x_n, y, z. ((p_f(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge p_f(x_1, \ldots, x_n, z)) \to y \approx z)$$

Damit können wir Funktionsterme durch existentiell quantifizierte Variablen mit entsprechenden Nebenbedingungen ersetzen, z.B.:

$$q(f(x), g(y, z)) \mapsto \exists v, w. (p_f(x, v) \wedge p_g(y, z, w) \wedge q(v, w))$$

$$r(g(f(x), y)) \mapsto \exists v, w. (p_f(x, v) \wedge p_g(v, y, w) \wedge r(w))$$

Sind also Funktionen ausdrucksstärker als $\exists$?

Nein. Wir können eine n-stellige Funktion f durch ein $(n+1)$-stelliges Prädikat p_f darstellen, z.B. mit folgender Theorie:

$$\forall x_1, \ldots, x_n . \exists y . p_f(x_1, \ldots, x_n, y)$$
$$\forall x_1, \ldots, x_n, y, z . ((p_f(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge p_f(x_1, \ldots, x_n, z)) \to y \approx z)$$

Damit können wir Funktionsterme durch existentiell quantifizierte Variablen mit entsprechenden Nebenbedingungen ersetzen, z.B.:

$$q(f(x), g(y, z)) \mapsto \exists v, w . (p_f(x, v) \wedge p_g(y, z, w) \wedge q(v, w))$$
$$r(g(f(x), y)) \mapsto \exists v, w . (p_f(x, v) \wedge p_g(v, y, w) \wedge r(w))$$

Eine entsprechende Ersetzung kann man bei jedem Atom in einer Formel durchführen. Wir erhalten (ohne Beweis):

Satz: Für jede Formel der Prädikatenlogik mit Funktionen gibt es eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel ohne Funktionssymbole, welche in linearer Zeit berechnet werden kann.

Zusammenfassung: Funktionen

Die folgenden Varianten von Prädikatenlogik haben also in gewissem Sinne die gleiche Ausdruckstärke:

- Prädikatenlogik (ohne Funktionssymbole)
- Prädikatenlogik mit Funktionssymbolen
- Prädikatenlogik mit Funktionssymbolen, in Pränexform ohne Existenzquantoren

In jeder dieser Logiken kann man zudem wahlweise ein Gleichheitsprädikat hinzufügen

Zusammenfassung: Funktionen

Die folgenden Varianten von Prädikatenlogik haben also in gewissem Sinne die gleiche Ausdruckstärke:

- Prädikatenlogik (ohne Funktionssymbole)
- Prädikatenlogik mit Funktionssymbolen
- Prädikatenlogik mit Funktionssymbolen, in Pränexform ohne Existenzquantoren

In jeder dieser Logiken kann man zudem wahlweise ein Gleichheitsprädikat hinzufügen

Vorteile von Skolemfunktionen gegenüber Existenzquantoren:

- Es gibt nur noch eine Art von Quantoren
- Die Abhängigkeiten der existentiell bestimmten Elemente von universell bestimmten Elementen wird explizit in der Syntax dargestellt

Beispiel: Skolemform

Wir Skolemisieren das vorige Beispiel:

$$\forall x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. \exists x_6, x_7.$$
$$\Big(((W(x_1) \land \neg L(x_1)) \lor (L(x_1) \land \neg W(x_1)))$$
$$\land \big(\neg W(x_2) \lor (W(x_3) \lor L(x_4))\big)$$
$$\land \big(\neg L(x_5) \lor (\neg W(x_6) \land \neg L(x_7))\big)\Big)$$

Beispiel: Skolemform

Wir Skolemisieren das vorige Beispiel:

$$
\begin{aligned}
& \forall x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . \exists x_6, x_7 . \\
& \Big(((W(x_1) \wedge \neg L(x_1)) \vee (L(x_1) \wedge \neg W(x_1))) \\
& \ \wedge (\neg W(x_2) \vee (W(x_3) \vee L(x_4))) \\
& \ \wedge (\neg L(x_5) \vee (\neg W(x_6) \wedge \neg L(x_7))) \Big) \\
\equiv \quad & \forall x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . \\
& \Big(((W(x_1) \wedge \neg L(x_1)) \vee (L(x_1) \wedge \neg W(x_1))) \\
& \ \wedge (\neg W(x_2) \vee (W(x_3) \vee L(x_4))) \\
& \ \wedge (\neg L(x_5) \vee (\neg W(f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)) \wedge \neg L(f_7(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)))) \Big)
\end{aligned}
$$

Konjunktive Normalform und Klauselform

Konjunktive Normalform

Aus der Aussagelogik kennen wir die folgende Definition:

Eine Formel F ist in konjunktiver Normalform (KNF) wenn sie eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist, d.h. wenn sie die Form hat:

$$(L_{1,1} \vee \ldots \vee L_{1,m_1}) \wedge (L_{2,1} \vee \ldots \vee L_{2,m_2}) \wedge \ldots \wedge (L_{n,1} \vee \ldots \vee L_{n,m_n})$$

wobei die Formeln $L_{i,j}$ Literale sind. Eine Disjunktion von Literalen heißt Klausel.

(Zur Erinnerung: Literale = negierte oder nicht-negierte Atome)

$\rightsquigarrow$ Die gleiche Form kann für den quantorenfreien inneren Teil jeder Formel in Pränexform hergestellt werden.

Bilden der KNF

Wir stellen die KNF in der Prädikatenlogik wie folgt her:

(1) Formel bereinigen

(2) Bilden der Negationsnormalform

(3) Bilden der Pränexform

(4) Skolemisieren

(5) Erschöpfende Anwendung der folgenden Ersetzung auf Teilformeln im quantorenfreien Teil der Formel:

$$F \vee (G \wedge H) \mapsto (F \vee G) \wedge (F \vee H)$$

Bilden der KNF

Wir stellen die KNF in der Prädikatenlogik wie folgt her:

(1) Formel bereinigen

(2) Bilden der Negationsnormalform

(3) Bilden der Pränexform

(4) Skolemisieren

(5) Erschöpfende Anwendung der folgenden Ersetzung auf Teilformeln im quantorenfreien Teil der Formel:

$$F \lor (G \land H) \mapsto (F \lor G) \land (F \lor H)$$

Satz: Die so aus einer Formel F gebildete KNF ist erfüllbar genau dann wenn F erfüllbar ist.

Beweis: Schritte (1)–(3) liefern sematisch äquivalente Formeln. Schritt (4) liefert eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel. Schritt (5) liefert eine zu dieser semantisch äquivalente Formel. □

Anmerkung: Man könnte manche der Schritte auch vertauschen.

Beispiel: Konjunktive Normalform

$$
\begin{aligned}
&\forall x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.\\
&\Big(((W(x_1) \wedge \neg L(x_1)) \vee (L(x_1) \wedge \neg W(x_1)))\\
&\ \wedge \big(\neg W(x_2) \vee (W(x_3) \vee L(x_4))\big)\\
&\ \wedge \big(\neg L(x_5) \vee (\neg W(f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)) \wedge \neg L(f_7(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)))\big)\Big)
\end{aligned}
$$

Beispiel: Konjunktive Normalform

$$\forall x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.$$
$$\Big(\underline{((W(x_1) \land \neg L(x_1)) \lor (L(x_1) \land \neg W(x_1)))}$$
$$\land \big(\neg W(x_2) \lor (W(x_3) \lor L(x_4))\big)$$
$$\land \big(\neg L(x_5) \lor (\neg W(f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)) \land \neg L(f_7(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)))\big)\Big)$$

Beispiel: Konjunktive Normalform

$$
\begin{aligned}
& \forall x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. \\
& \Big(\underline{((W(x_1) \wedge \neg L(x_1)) \vee (L(x_1) \wedge \neg W(x_1)))} \\
& \ \wedge \big(\neg W(x_2) \vee (W(x_3) \vee L(x_4))\big) \\
& \ \wedge \big(\neg L(x_5) \vee (\neg W(f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)) \wedge \neg L(f_7(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)))\big)\Big) \\
\equiv \quad & \forall x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. \\
& \Big((W(x_1) \vee L(x_1)) \wedge (\neg L(x_1) \vee L(x_1)) \\
& \ \wedge (W(x_1) \vee \neg W(x_1)) \wedge (\neg L(x_1) \vee \neg W(x_1))) \\
& \ \wedge \big(\neg W(x_2) \vee (W(x_3) \vee L(x_4))\big) \\
& \ \wedge \big(\neg L(x_5) \vee (\neg W(f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)) \wedge \neg L(f_7(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)))\big)\Big)
\end{aligned}
$$

Beispiel: Konjunktive Normalform

$$
\begin{aligned}
& \forall x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. \\
& \Big(\underline{((W(x_1) \wedge \neg L(x_1)) \vee (L(x_1) \wedge \neg W(x_1)))} \\
& \ \wedge (\neg W(x_2) \vee (W(x_3) \vee L(x_4))) \\
& \ \wedge (\neg L(x_5) \vee (\neg W(f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)) \wedge \neg L(f_7(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))))\Big) \\
\equiv \quad & \forall x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. \\
& \Big((W(x_1) \vee L(x_1)) \wedge (\neg L(x_1) \vee L(x_1)) \\
& \ \wedge (W(x_1) \vee \neg W(x_1)) \wedge (\neg L(x_1) \vee \neg W(x_1))) \\
& \ \wedge (\neg W(x_2) \vee (W(x_3) \vee L(x_4))) \\
& \ \wedge \underline{(\neg L(x_5) \vee (\neg W(f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)) \wedge \neg L(f_7(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))))}\Big)
\end{aligned}
$$

Beispiel: Konjunktive Normalform

$$
\begin{aligned}
& \forall x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. \\
& \Big(\underline{((W(x_1) \wedge \neg L(x_1)) \vee (L(x_1) \wedge \neg W(x_1)))} \\
& \;\wedge (\neg W(x_2) \vee (W(x_3) \vee L(x_4))) \\
& \;\wedge (\neg L(x_5) \vee (\neg W(f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)) \wedge \neg L(f_7(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))))\Big) \\
\equiv \quad & \forall x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. \\
& \Big((W(x_1) \vee L(x_1)) \wedge (\neg L(x_1) \vee L(x_1)) \\
& \;\wedge (W(x_1) \vee \neg W(x_1)) \wedge (\neg L(x_1) \vee \neg W(x_1))) \\
& \;\wedge (\neg W(x_2) \vee (W(x_3) \vee L(x_4))) \\
& \;\wedge \underline{(\neg L(x_5) \vee (\neg W(f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)) \wedge \neg L(f_7(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))))}\Big) \\
\equiv \quad & \forall x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. \\
& \Big((W(x_1) \vee L(x_1)) \wedge (\neg L(x_1) \vee L(x_1)) \\
& \;\wedge (W(x_1) \vee \neg W(x_1)) \wedge (\neg L(x_1) \vee \neg W(x_1))) \\
& \;\wedge (\neg W(x_2) \vee (W(x_3) \vee L(x_4))) \\
& \;\wedge (\neg L(x_5) \vee \neg W(f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))) \wedge (\neg L(x_5) \vee \neg L(f_7(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)))\Big)
\end{aligned}
$$

Klauselform

Die Klauselform ist eine vereinfachte Schreibweise der KNF:

- Allquantoren werden weggelassen
- Klauseln werden als Mengen von Literalen geschrieben
- Konjunktionen von Klauseln werden als Mengen von Mengen von Literalen geschrieben

Beispiel: Unser Beispiel kann damit wie folgt geschrieben werden:

$$
\begin{aligned}
\{\quad & \{W(x_1), L(x_1)\}, \\
& \{\neg L(x_1), L(x_1)\}, \\
& \{W(x_1), \neg W(x_1)\}, \\
& \{\neg L(x_1), \neg W(x_1)\}, \\
& \{\neg W(x_2), W(x_3), L(x_4)\}, \\
& \{\neg L(x_5), \neg W(f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))\}, \\
& \{\neg L(x_5), \neg L(f_7(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5))\} \quad \}
\end{aligned}
$$

Zusammenfassung und Ausblick

Die Pränexform entsteht durch einfaches Vorziehen der Quantoren aus einer NNF

Funktionen liefern keine zusätzliche Ausdrucksstärke, aber sie helfen bei der Normalisierung von Formeln, da man existentielle Variablen durch Funktionsterme ersetzten kann (Skolemform)

Konjunktive Normalform und Klauselform werden wie in der Aussagenlogik gebildet

Was erwartet uns als nächstes?

- Herbrand, genialer Mathematiker aber unglücklicher Bergsteiger
- Unifikation und Resolution
- Logik über endlichen Modellen und ihre praktische Anwendung

Literatur und Bildrechte

Literatur

- Thoralf A. Skolem: **Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit und Beweisbarkeit mathematischen Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen.** Videnskapsselskapets Skrifter. I. Mat.-naturv Klasse, 1920, No. 4. Kristiania 1920.
- Hao Wang: **Skolem and Gödel.** Nordic Journal of Philosophical Logic, Vol. 1, No. 2, pp. 119–132. `http://www.hf.uio.no/ifikk/forskning/publikasjoner/tidsskrifter/njpl/vol1no2/skogod.pdf`

Bildrechte

Folie 11: Fotografie, 1930er (heute Oslo Museum, Inventarnummer OB.F06426c), gemeinfrei