



Theoretische Informatik und Logik

2. Übungsblatt

Sommersemester 2017

Die folgenden Aufgaben werden nicht in den Übungen besprochen und dienen der Selbstkontrolle.

Aufgabe C

Zeigen Sie, dass $\{1\}^*$ unentscheidbare Teilmengen besitzt.

Aufgabe D

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Jedes LOOP-Programm terminiert.
- Zu jedem WHILE-Programm gibt es ein äquivalentes LOOP-Programm.
- Die Anzahl der Ausführungen von P in der LOOP-Schleife

LOOP x_i DO P END

- kann beeinflusst werden, indem x_i in P entsprechend modifiziert wird.
- Die Ackermannfunktion ist total und damit LOOP-berechenbar.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass folgende Funktionen $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ LOOP-berechenbar sind:

- $f(x, y) := \max(x - y, 0)$
- $f(x, y) := x \cdot y$
- $f(x, y) := \max(x, y)$
- $f(x, y) := \text{ggT}(x, y)$, wobei $\text{ggT}(x, y)$ den größten gemeinsamen Teiler von x und y bezeichnet.

Aufgabe 2

Mit $\text{kgV}(x_1, x_2)$ bezeichnen wir das kleinste gemeinsame Vielfache zweier natürlicher Zahlen x_1 und x_2 . Geben Sie ein WHILE-Programm an, das die Funktion $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}, (x_1, x_2) \mapsto \text{kgV}(x_1, x_2)$ berechnet und erklären Sie seine Arbeitsweise.

Aufgabe 3

Es sei Σ ein fest gewähltes Alphabet mit mindestens zwei Elementen. Wir betrachten eine Programmiersprache L über Σ , die in der Lage ist, Turing-Maschinen zu simulieren. Für ein Wort $w \in \Sigma^*$ ist die *Kolmogorov-Komplexität* $K_L(w)$ die Länge des kürzesten Programms in L , welches bei leerer Eingabe das Wort w als Ausgabe produziert.

Zeigen Sie folgende Aussagen:

- Es gibt für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Wort $w \in \Sigma^*$ der Länge $|w| = n$, so dass $K_L(w) \geq n$.
- Es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{N}$, so dass gilt: Ist w das Ergebnis der Berechnung einer Turing-Maschine M mit Eingabe x , dann

$$K_L(w) \leq |\text{enc}(M)\#\#\text{enc}(x)| + c,$$

wobei $\text{enc}(M)\#\#\text{enc}(x)$ eine (effektive) Kodierung der Maschine M und der Eingabe x als ein Wort über Σ ist.

- Die Abbildung $w \mapsto K_L(w)$ ist nicht berechenbar.

Damit ist insbesondere gezeigt, dass es niemals einen Compiler geben kann, der ein gegebenes Programm in ein kleinstmögliches übersetzt.