TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Informatik Institut für Theoretische Informatik, Lehrstuhl für Automatentheorie

Theoretische Informatik und Logik

Musterlösung zu Übungsblatt 7

Sommersemester 2017

Aufgabe 4

Ein *linear bounded automaton* (LBA) ist eine deterministische Turing Maschine $\mathcal{M}$, die bei jeder Berechnung niemals mehr Platz benutzt als bereits durch die Eingabe belegt ist. Dies erreicht $\mathcal{M}$ dadurch, dass sie niemals ein ␣ überschreibt und den Lesekopf nach links bewegt, sobald sie ein ␣ liest.

Zeigen Sie, dass das Wortproblem für LBA

$$\mathbf{P}_{\mathsf{LBA}} \coloneqq \{ \mathsf{enc}(\mathcal{M})\#\#\,\mathsf{enc}(w) \mid \mathcal{M} \text{ ein LBA, der } w \text{ akzeptiert} \}.$$

ein $\mathrm{PS{\small PACE}}$-vollständiges Problem ist.

Lösung: Wir zeigen zuerst $\mathbf{P}_{\mathsf{LBA}} \in \mathrm{PS{\small PACE}}$. Dafür muss zuerst geprüft werden, ob eine gegeben Eingabe von der Form $\mathsf{enc}(\mathcal{M})\#\#\,\mathsf{enc}(w)$ ist, wobei $\mathcal{M}$ ein LBA ist. Dabei ist leicht zu sehen, dass in polynomieller Zeit geprüft werden kann, ob $\mathsf{enc}(\mathcal{M})$ die Kodierung einer Turing-Maschine ist. Um zu sehen, dass $\mathcal{M}$ ein LBA ist, genügt es dann zu prüfen, ob $\mathcal{M}$ niemals ein ␣ überschreibt, und bei Lesen des ␣ dieses nicht überschreibt und den Lesekopf nach links bewegt. Auch dies kann in polynomieller Zeit geprüft werden.

Als nächstes muss ein Entscheider für $\mathbf{P}_{\mathsf{LBA}}$ prüfen, ob $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ die Eingabe w akzeptiert. Dazu beobachten wir, dass die Maschine $\mathcal{M}$ höchstens $|Q| \cdot n \cdot |\Gamma|^n$ Konfigurationen durchläuft, bevor sie in eine Schleife gerät. Es genügt also, die Maschine $\mathcal{M}$ für höchstens $|Q| \cdot n \cdot |\Gamma|^n$ Schritte zu simulieren um zu entscheiden, ob $\mathcal{M}$ das Wort w erkennt. Die Simulation von $\mathcal{M}$ selbst benötigt nur linear Platz (da $\mathcal{M}$ ein LBA ist), und hinzu kommt noch Platz für einen Zähler, dessen Wert höchstens $|Q| \cdot n \cdot |\Gamma|^n$ ist und der deswegen höchstens Platz $\log|Q| + \log n + n \cdot \log|\Gamma|$ benötigt. Dies gesamte Simulation kann also in polynomiellen Platz ausgeführt werden.

Wir zeigen nun, dass $\mathbf{P}_{\mathsf{LBA}}$ $\mathrm{PS{\small PACE}}$-hart ist. Sei dazu $\mathbf{L} \in \mathrm{PS{\small PACE}}$ und sei $\mathcal{M}$ eine polynomiell platzbeschränkte Turing-Maschine, die $\mathbf{L}$ entscheidet. Sei p ein Polynom, welches den Platzverbrauch von $\mathcal{M}$ beschränkt. Ohne Einschränkung sei dabei $p(n) \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Definiere dann $\mathsf{pad}(w)$ durch

$$\mathsf{pad}(w) = w\bot^k,$$

wobei $\bot$ ein neues Symbol ist, so dass $|\mathsf{pad}(w)| = p(|w|)$ gilt.

Sei nun $\mathcal{M}'$ die Turing-Maschine, welche $\mathcal{M}$ auf der Eingabe simuliert und dabei das $\bot$-Zeichen wie ␣ behandelt. Dies kann erreicht werden, indem in der Übergangsfunktion von $\mathcal{M}$ jedes Vorkommen von ␣ durch $\bot$ ersetzt wird, und zusätzlich noch die Transition hinzugefügt wird, dass $\mathcal{M}'$ bei Lesen von ␣ den Lesekopf nach links bewegt und ␣ wieder schreibt. Dann ist $\mathcal{M}'$ ein LBA und es gilt

$$\mathcal{M}' \text{ akzeptiert } w \iff \mathcal{M} \text{ akzeptiert } w.$$

Also ist

$$f(\mathsf{enc}(w)) = \mathsf{enc}(\mathcal{M}')\#\#\,\mathsf{enc}(\mathsf{pad}(w))$$

eine polynomiell zeitbeschränkte Reduktion von $\mathbf{L}$ auf $\mathbf{P}_{\mathsf{LBA}}$. Da $\mathbf{L}$ beliebig gewählt war folgt, dass $\mathbf{P}_{\mathsf{LBA}}$ PSPACE-hart ist.