THEORETISCHE INFORMATIK UND LOGIK

13. Vorlesung: Prädikatenlogik: Syntax und Semantik

Markus Krötzsch

Lehrstuhl Wissensbasierte Systeme

TU Dresden, 26. Mai 2017

Komplexität und Spiele

NP ist eine typische Klasse für Solitaire-Spiele:

- Sudoku, Minesweeper, Tetris, ...

Komplexität und Spiele

NP ist eine typische Klasse für Solitaire-Spiele:

- Sudoku, Minesweeper, Tetris, ...

PSpace ist eine typische Klasse für Spiele, bei denen zwei Spieler abwechselnd eine polynomielle Zahl an Zügen durchführen:

- Geography, Reversi, Tic-Tac-Toe, aber auch: Sokoban, ...

Komplexität und Spiele

NP ist eine typische Klasse für Solitaire-Spiele:

- Sudoku, Minesweeper, Tetris, …

PSpace ist eine typische Klasse für Spiele, bei denen zwei Spieler abwechselnd eine polynomielle Zahl an Zügen durchführen:

- Geography, Reversi, Tic-Tac-Toe, aber auch: Sokoban, …

ExpTime findet sich bei Spielen, bei denen man Züge rückgängig machen kann (polynomielles Spielbrett – exponentiell viele Züge):

- Schach, Dame, Go, Stern-Halma, …

In jedem Fall muss man (nicht-endliche) Verallgemeinerungen der Spiele betrachten, um die „wahre“ Komplexität zu sehen

(Menschen spielen nicht, indem sie innerlich eine endliche Datenbank aller möglichen Stellungen konsultieren)

Komplexität und Spiele

NP ist eine typische Klasse für Solitaire-Spiele:

- Sudoku, Minesweeper, Tetris, ...

PSpace ist eine typische Klasse für Spiele, bei denen zwei Spieler abwechselnd eine polynomielle Zahl an Zügen durchführen:

- Geography, Reversi, Tic-Tac-Toe, aber auch: Sokoban, ...

ExpTime findet sich bei Spielen, bei denen man Züge rückgängig machen kann (polynomielles Spielbrett – exponentiell viele Züge):

- Schach, Dame, Go, Stern-Halma, ...

In jedem Fall muss man (nicht-endliche) Verallgemeinerungen der Spiele betrachten, um die „wahre" Komplexität zu sehen

(Menschen spielen nicht, indem sie innerlich eine endliche Datenbank aller möglichen Stellungen konsultieren)

Spiele sollten komplex sein, um lange zu motivieren

Halbzeit:
Zusammenfassung und Ausblick

Überblick Berechenbarkeit

Vorlesung 1

Hilbert in Paris • Die Turingmaschine • Church-Turing-These

Vorlesung 2

Berechenbarkeit • Entscheidbarkeit • Busy Beaver

Vorlesung 3

LOOP • WHILE • Turing-Mächtigkeit von WHILE

Vorlesung 4

Die Kraft des LOOP • Halteproblem • Reduktionen

Vorlesung 5

Satz von Rice • Semi-Entscheidbarkeit
Postsches Korrespondenzproblem

Vorlesung 6

Probleme formaler Sprachen • Noch unentscheidbarere Probleme
Euklid als Informatiker

Überblick Komplexität

Vorlesung 7

Königsberger Brücken • Beschränkte TMs • Robuste Komplexitäten

Vorlesung 8

Zeit vs. Raum • P und L • Polynomielle Reduktionen

Vorlesung 9

Coles Beweis ohne Worte • NP

SAT $\leq_p$ **Clique** $\leq_p$ **Unabhänige Menge**

Vorlesung 10

SAT $\leq_p$ **Teilmengen Summe** $\leq_p$ **Rucksack**

Pseudopolynomialität • Fake News zu NP

Vorlesung 11

NL und Erreichbarkeit • Schach ist schwer • PSpace und QBF

Vorlesung 12

TrueQBF $\leq_p$ **TrueQBF$_{\text{alt}}$** $\leq_p$ **Geography** • Spiele • Evaluation

Ausblick: Prädikatenlogik

Vorlesung 13

Logik ertser Stufe: Syntax und Semantik

Vorlesung 14

Unentscheidbarkeit Folgerung • Komplexität Model Checking

Vorlesung 15

Umformungen und Normalformen

Vorlesung 16

Schlussfolgern mit Resolution

Ausblick: Logik und mehr

Vorlesung 17

Entscheidbare Fragmente der Prädikatenlogik

Vorlesung 18

Logik höherer Ordnung

Vorlesung 19

Logik auf Wörtern und formale Sprachen

Vorlesung 20

Logik auf natürlichen Zahlen • Gödel

Vorlesung 21

Zusammenfassung • Ausblick

Prädikatenlogik

Logik

Aristoteles (384–324 v.Chr.):

„Alle Menschen sind sterblich.“
„Sokrates ist ein Mensch.“

„Also ist Sokrates sterblich.“

Gut, aber in der Informatik?

Wozu lehrt man Informatiker_innen Logik?

- Verifikation von Software: Logik als Spezifikationssprache gewünschter Eigenschaften
- Künstliche Intelligenz: Logik als Lehre vom folgerichtigen Denken
- Optimierung: Logisches Schließen als Suche nach Lösungen komplexer Probleme
- Datenverwaltung: Logik als eindeutig definiertes Format für Daten und Anfragen
- Wissensrepräsentation: Logik zur Darstellung und Anwendung von menschlichem Wissen in Form von Regeln, Taxonomien und Ontologien

Rückblick: Syntax der Aussagenlogik

In der Aussagenlogik gibt es eine abzählbar unendliche Menge **P** von atomaren Aussagen (auch bekannt als: aussagenlogische Variablen, Propositionen oder schlicht Atome)

Die Menge der aussagenlogischen Formeln ist induktiv[a] definiert:

- Jedes Atom $p \in \mathbf{P}$ ist eine aussagenlogische Formel
- Wenn F und G aussagenlogische Formeln sind, so auch:
  - $\neg F$: Negation, „nicht F“
  - $(F \wedge G)$: Konjunktion, „F und G“
  - $(F \vee G)$: Disjunktion, „F oder G“
  - $(F \rightarrow G)$: Implikation, „F impliziert G“
  - $(F \leftrightarrow G)$: Äquivalenz, „F ist äquivalent zu G“

[a] Das bedeutet: Die Definition ist selbstbezüglich und soll die kleinste Menge an Formeln beschreiben, die alle Bedingungen erfüllen.

Rückblick: Semantik der Aussagenlogik

Eine aussagenlogische Formel kann wahr oder falsch sein, je nachdem, wie man die atomaren Aussagen interpretiert. Dazu verwenden wir eine Wertzuweisung $w : \mathbf{P} \to \{1, 0\}$.

Eine Wertzuweisung w erfüllt eine Formel F, in Symbolen $w \models F$, wenn eine der folgenden rekursiven Bedingungen gilt:

Form von F	$w \models F$ wenn:	$w \not\models F$ wenn:
$F \in \mathbf{P}$:	$w(F) = 1$	$w(F) = 0$
$F = \neg G$	$w \not\models G$	$w \models G$
$F = (G_1 \wedge G_2)$	$w \models G_1$ und $w \models G_2$	$w \not\models G_1$ oder $w \not\models G_2$
$F = (G_1 \vee G_2)$	$w \models G_1$ oder $w \models G_2$	$w \not\models G_1$ und $w \not\models G_2$
$F = (G_1 \to G_2)$	$w \not\models G_1$ oder $w \models G_2$	$w \models G_1$ und $w \not\models G_2$
$F = (G_1 \leftrightarrow G_2)$	$w \models G_1$ und $w \models G_2$ oder $w \not\models G_1$ und $w \not\models G_2$	$w \models G_1$ und $w \not\models G_2$ oder $w \not\models G_1$ und $w \models G_2$

Dabei bedeutet „A oder B“ immer „A oder B oder beides“.

Von Aussagen- zu Prädikatenlogik

Die Prädikatenlogik gibt atomaren Aussagen eine innere Struktur:

- aus „$p_{\text{Soktrates-ist-ein-Mensch}}$“ wird
- „istMensch(sokrates)“

Von Aussagen- zu Prädikatenlogik

Die Prädikatenlogik gibt atomaren Aussagen eine innere Struktur:

- aus „$p_{\text{Soktrates-ist-ein-Mensch}}$“ wird
- „istMensch(sokrates)“

Dadurch können mehrere Dinge die selbe Eigenschaft haben:

$$\text{istMensch(sokrates)} \quad \text{istMensch(emilia)} \quad \text{istMensch(anton)} \quad \cdots$$

Von Aussagen- zu Prädikatenlogik

Die Prädikatenlogik gibt atomaren Aussagen eine innere Struktur:

- aus „$p_{\text{Soktrates-ist-ein-Mensch}}$“ wird
- „istMensch(sokrates)“

Dadurch können mehrere Dinge die selbe Eigenschaft haben:

istMensch(sokrates)   istMensch(emilia)   istMensch(anton) $\cdots$

Für allgemeine Aussagen über die Dinge, die eine Eigenschaft haben, gibt es zwei Quantoren:

- Existenzquantor $\exists$: Mindestens ein Ding hat die Eigenschaft
- Allquantor $\forall$: Alle Dinge haben die Eigenschaft

Beispiele

„Jeder Mensch ist sterblich."

$$\forall x.(\text{istMensch}(x) \to \text{istSterblich}(x))$$

Beispiele

„Jeder Mensch ist sterblich.“

$$\forall x.(\text{istMensch}(x) \to \text{istSterblich}(x))$$

„Es ist nicht alles Gold was glänzt.“

Beispiele

„Jeder Mensch ist sterblich."

$$\forall x.(\mathrm{istMensch}(x) \to \mathrm{istSterblich}(x))$$

„Es ist nicht alles Gold was glänzt."

(a) $\forall x.(\mathrm{glänzt}(x) \land \neg\mathrm{istGold}(x))$

(b) $\forall x.(\mathrm{glänzt}(x) \to \neg\mathrm{istGold}(x))$

(c) $\neg\forall x.(\mathrm{glänzt}(x) \to \mathrm{istGold}(x))$

(d) $\exists x.(\mathrm{glänzt}(x) \land \neg\mathrm{istGold}(x))$

Beispiele

„Jeder Mensch ist sterblich.“

$$\forall x.(\text{istMensch}(x) \to \text{istSterblich}(x))$$

„Es ist nicht alles Gold was glänzt.“

(a) $\forall x.(\text{glänzt}(x) \land \neg\text{istGold}(x))$ falsch

(b) $\forall x.(\text{glänzt}(x) \to \neg\text{istGold}(x))$ falsch

(c) $\neg\forall x.(\text{glänzt}(x) \to \text{istGold}(x))$ richtig

(d) $\exists x.(\text{glänzt}(x) \land \neg\text{istGold}(x))$ richtig

Beispiele

„Jeder Mensch ist sterblich."

$$\forall x.(\text{istMensch}(x) \to \text{istSterblich}(x))$$

„Es ist nicht alles Gold was glänzt."

(a) $\forall x.(\text{glänzt}(x) \wedge \neg\text{istGold}(x))$ falsch

(b) $\forall x.(\text{glänzt}(x) \to \neg\text{istGold}(x))$ falsch

(c) $\neg\forall x.(\text{glänzt}(x) \to \text{istGold}(x))$ richtig

(d) $\exists x.(\text{glänzt}(x) \wedge \neg\text{istGold}(x))$ richtig

„Null ist eine natürliche Zahl und jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger, der ebenfalls eine natürliche Zahl ist."

$$\text{NatNum}(\text{null}) \wedge \forall x.\big(\text{NatNum}(x) \to \exists y.(\text{succ}(x, y) \wedge \text{NatNum}(y))\big)$$

Intuitive Semantik: Logelei

In einem entlegenen Inselreich gibt es zwei Arten von Menschen:

- die einen (Typ W) sagen stets die Wahrheit
- die anderen (Typ L) lügen immer

Intuitive Semantik: Logelei

In einem entlegenen Inselreich gibt es zwei Arten von Menschen:

- die einen (Typ W) sagen stets die Wahrheit
- die anderen (Typ L) lügen immer

Wir besuchen einige der Inseln und fragen die Einheimischen nach dem Typ der Bewohner dort.

Intuitive Semantik: Logelei

In einem entlegenen Inselreich gibt es zwei Arten von Menschen:

- die einen (Typ W) sagen stets die Wahrheit
- die anderen (Typ L) lügen immer

Wir besuchen einige der Inseln und fragen die Einheimischen nach dem Typ der Bewohner dort.

- Auf Insel A antwortet jeder der Bewohner:
  „Wir sind hier alle vom gleichen Typ.“
  - Stimmt das? Und wenn ja, von welchem Typ sind sie?

Intuitive Semantik: Logelei

In einem entlegenen Inselreich gibt es zwei Arten von Menschen:

- die einen (Typ W) sagen stets die Wahrheit
- die anderen (Typ L) lügen immer

Wir besuchen einige der Inseln und fragen die Einheimischen nach dem Typ der Bewohner dort.

- Auf Insel A antwortet jeder der Bewohner:
  „Wir sind hier alle vom gleichen Typ."
  - Stimmt das? Und wenn ja, von welchem Typ sind sie?
- Auf Insel B antwortet jeder der Bewohner:
  „Hier gibt es einige vom Typ W und einige vom Typ L."
  - Was sagt uns das über die Typen der Bewohner von B?

Prädikatenlogik: Syntax (1)

In der Aussagenlogik gab es eine unendliche Menge von Atomen.

Prädikatenlogik: Syntax (1)

In der Aussagenlogik gab es eine unendliche Menge von Atomen.

In der Prädikatenlogik betrachten wir stattdessen mehrere Mengen:

- Eine Menge **V** von Variablen $x, y, z, \ldots$
- Eine Menge **C** von Konstanten $a, b, c, \ldots$
- Eine Menge **P** von Prädikatensymbolen $p, q, r, \ldots$
  jedes Prädikat hat eine Stelligkeit ≥ 0 (auch Arität genannt)

Variablen und Konstanten werden auch Terme genannt.

Diese Mengen sind:

(1) abzählbar unendlich (d.h. wir haben immer ausreichend Symbole jeden Typs zur Verfügung)

(2) disjunkt (d.h. es ist stets klar, welcher Art ein Symbol ist)

Prädikatenlogik: Syntax (1)

In der Aussagenlogik gab es eine unendliche Menge von Atomen.

In der Prädikatenlogik betrachten wir stattdessen mehrere Mengen:

- Eine Menge **V** von Variablen $x, y, z, \ldots$
- Eine Menge **C** von Konstanten $a, b, c, \ldots$
- Eine Menge **P** von Prädikatensymbolen $p, q, r, \ldots$
  jedes Prädikat hat eine Stelligkeit ≥ 0 (auch Arität genannt)

Variablen und Konstanten werden auch Terme genannt.

Diese Mengen sind:

(1) abzählbar unendlich (d.h. wir haben immer ausreichend Symbole jeden Typs zur Verfügung)

(2) disjunkt (d.h. es ist stets klar, welcher Art ein Symbol ist)

Ein prädikatenlogisches Atom ist ein Ausdruck $p(t_1, \ldots, t_n)$ für ein n-stelliges Prädikatensymbol $p \in$ **P** und Terme $t_1, \ldots, t_n \in$ **V** $\cup$ **C**.

Prädikatenlogik: Syntax (2)

Formeln werden jetzt wie in der Aussagenlogik aus Atomen aufgebaut:

Die Menge der prädikatenlogische Formeln ist induktiv definiert:

- Jedes Atom $p(t_1, \ldots, t_n)$ ist eine prädikatenlogische Formel
- Wenn $x \in \mathbf{V}$ eine Variable und F und G prädikatenlogische Formeln sind, dann sind auch die folgenden prädikatenlogische Formeln:
  - $\neg F$: Negation, „nicht F“
  - $(F \wedge G)$: Konjunktion, „F und G“
  - $(F \vee G)$: Disjunktion, „F oder G“
  - $(F \to G)$: Implikation, „F impliziert G“
  - $(F \leftrightarrow G)$: Äquivalenz, „F ist äquivalent zu G“
  - $\exists x.F$: Existenzquantor, „für ein x gilt F“
  - $\forall x.F$: Allquantor, „für alle x gilt F“

Funktionssymbole

Anmerkung: Oft werden in der Prädikatenlogik Funktionssymbole betrachtet, die in Termen (zusätzlich zu Variablen und Konstanten) vorkommen dürfen.

Wir verzichten hier vorerst darauf, da

- dies die Definition komplexer (und eventuel verwirrender) macht,
- man damit keine zusätzliche Ausdruckstärke erhält und
- wir diese Erweiterung für spezielle Anwendungen leicht auch später noch einführen können.

Konventionen und Vereinfachungen

Wir erlauben folgende Vereinfachungen der Syntax:

Konventionen und Vereinfachungen

Wir erlauben folgende Vereinfachungen der Syntax:

(1) Bei nullstelligen Prädikatensymbolen lassen wir die (leeren) Klammern weg.
Beispiel: wir schreiben $(p \to q)$ anstelle von $(p() \to q())$

Konventionen und Vereinfachungen

Wir erlauben folgende Vereinfachungen der Syntax:

(1) Bei nullstelligen Prädikatensymbolen lassen wir die (leeren) Klammern weg.
Beispiel: wir schreiben $(p \to q)$ anstelle von $(p() \to q())$

(2) Die äußersten Klammern einer Formel dürfen weggelassen werden.
Beispiel: wir schreiben $p \to q$ statt $(p \to q)$

Konventionen und Vereinfachungen

Wir erlauben folgende Vereinfachungen der Syntax:

(1) Bei nullstelligen Prädikatensymbolen lassen wir die (leeren) Klammern weg.
Beispiel: wir schreiben $(p \to q)$ anstelle von $(p() \to q())$

(2) Die äußersten Klammern einer Formel dürfen weggelassen werden.
Beispiel: wir schreiben $p \to q$ statt $(p \to q)$

(3) Klammern innerhalb geschachtelter Konjunktionen und Disjunktionen dürfen weggelassen werden.
Beispiel: wir schreiben $p \wedge q \wedge r$ statt $p \wedge (q \wedge r)$

Konventionen und Vereinfachungen

Wir erlauben folgende Vereinfachungen der Syntax:

(1) Bei nullstelligen Prädikatensymbolen lassen wir die (leeren) Klammern weg.
Beispiel: wir schreiben $(p \to q)$ anstelle von $(p() \to q())$

(2) Die äußersten Klammern einer Formel dürfen weggelassen werden.
Beispiel: wir schreiben $p \to q$ statt $(p \to q)$

(3) Klammern innerhalb geschachtelter Konjunktionen und Disjunktionen dürfen weggelassen werden.
Beispiel: wir schreiben $p \wedge q \wedge r$ statt $p \wedge (q \wedge r)$

(4) Hintereinander vorkommende Quantoren gleicher Art werden zusammengefasst, wobei man die Variablen als Liste angibt.
Beispiel: wir schreiben $\forall x, x'.\exists y, y'.(p(x, x') \to p(y, y'))$ statt $\forall x.\forall x'.\exists y.\exists y'.(p(x, x') \to p(y, y'))$

Konventionen und Vereinfachungen

Wir erlauben folgende Vereinfachungen der Syntax:

(1) Bei nullstelligen Prädikatensymbolen lassen wir die (leeren) Klammern weg.
Beispiel: wir schreiben $(p \to q)$ anstelle von $(p() \to q())$

(2) Die äußersten Klammern einer Formel dürfen weggelassen werden.
Beispiel: wir schreiben $p \to q$ statt $(p \to q)$

(3) Klammern innerhalb geschachtelter Konjunktionen und Disjunktionen dürfen weggelassen werden.
Beispiel: wir schreiben $p \wedge q \wedge r$ statt $p \wedge (q \wedge r)$

(4) Hintereinander vorkommende Quantoren gleicher Art werden zusammengefasst, wobei man die Variablen als Liste angibt.
Beispiel: wir schreiben $\forall x, x'.\exists y, y'.(p(x, x') \to p(y, y'))$ statt $\forall x.\forall x'.\exists y.\exists y'.(p(x, x') \to p(y, y'))$

Ansonsten schreiben wir Formel immer gemäß der formalen Syntax, einschließlich aller Klammern.

Teilformeln

Die Teilformeln einer Formel sind alle Teilausdrücke der Formel, welche selbst Formeln sind.

Die Menge der Teilformeln ist eindeutig bestimmt, wenn man der formalen Definition der Formel folgt.

Beispiel: Die Teilformeln von $\forall x.(p(x) \vee (q(x) \vee r(x)))$ sind $(p(x) \vee (q(x) \vee r(x)))$, $(q(x) \vee r(x))$, $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ sowie die Formel selbst, aber nicht $p(x) \vee (q(x)$ oder $\forall x.(p(x)$.

Teilformeln

Die Teilformeln einer Formel sind alle Teilausdrücke der Formel, welche selbst Formeln sind.

Die Menge der Teilformeln ist eindeutig bestimmt, wenn man der formalen Definition der Formel folgt.

Beispiel: Die Teilformeln von $\forall x.(p(x) \vee (q(x) \vee r(x)))$ sind $(p(x) \vee (q(x) \vee r(x)))$, $(q(x) \vee r(x))$, $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ sowie die Formel selbst, aber nicht $p(x) \vee (q(x)$ oder $\forall x.(p(x)$.

Anmerkung: Lässt man manche Klammern zur Vereinfachung der Syntax weg, dann sind die Teilfomeln nicht mehr eineutig bestimmt.

Beispiel: $\forall x.(p(x) \vee q(x) \vee r(x))$ könnte sowohl $\forall x.(p(x) \vee (q(x) \vee r(x)))$ als auch $\forall x.((p(x) \vee q(x)) \vee r(x))$ bezeichnen, was zu unterschiedlichen Teilformenl führt.

Freie und gebundene Variablenvorkommen

Eine Variable kann in einer Formel entweder frei oder gebunden vorkommen:

Die freien Vorkommen von Variablen in einer Formel sind rekursiv wie folgt definiert:

- In einem Atom sind alle Vorkommen von Variablen frei.
- Die freien Vorkommen in $\neg F$ sind die selben wie in F
- Die freien Vorkommen in $(F \land G)$, $(F \lor G)$, $(F \to G)$ und $(F \leftrightarrow G)$ sind alle freien Vorkommen aus F und G
- Die freien Vorkommen in $\forall x.F$ und $\exists x.F$ sind die selben wie in F, ohne die Vorkommen von x in F

Damit sind Vorkommen von Variablen x genau dann gebunden wenn sie im Bereich eines Quantors auftauchen.

Freie und gebundene Variablenvorkommen

Eine Variable kann in einer Formel entweder frei oder gebunden vorkommen:

Die freien Vorkommen von Variablen in einer Formel sind rekursiv wie folgt definiert:

- In einem Atom sind alle Vorkommen von Variablen frei.
- Die freien Vorkommen in $\neg F$ sind die selben wie in F
- Die freien Vorkommen in $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \to G)$ und $(F \leftrightarrow G)$ sind alle freien Vorkommen aus F und G
- Die freien Vorkommen in $\forall x.F$ und $\exists x.F$ sind die selben wie in F, ohne die Vorkommen von x in F

Damit sind Vorkommen von Variablen x genau dann gebunden wenn sie im Bereich eines Quantors auftauchen.

Beispiel: Eine Variable kann gleichzietig frei und gebunden in einer Formel auftauchen, wie z.B. x in $p(x) \wedge \exists x.q(x)$.

Offene und geschlossene Formeln

Formeln ohne freie Vorkommen von Variablen heißen geschlossene Formeln oder Sätze.

Anmerkung: Eigentlich würde man sich oft gern auf Sätze beschränken (da sie geschlossene Aussagen darstellen).

Leider muss man sich dennoch mit offenen Formeln beschäftigen, weil diese auftauchen, sobald man die Teilformeln einer geschlossenen Formeln anschaut (dies tun wir in vielen Defintionen und Beweisen).

Formeln mit freien Vorkommen von Variablen heißen offene Formeln.

Semantik der Prädikatenlogik

Atome interpretieren

Grundgedanke: Der Wahrheitswert von Formeln sollte sich wie in der Aussagenlogik aus dem Wahrheitswert von Atomen ergeben.

Beispiel: Ein mögliches Atom ist $p(a, x)$ mit $a \in \mathbf{C}$ und $x \in \mathbf{V}$. Wie soll diesem Ausdruck ein Wahrheitswert zugeordnet werden?

Dazu müssen drei Fragen beantwortet werden:

- Was bedeutet p?
- Was bedeutet a?
- Was bedeutet x?

Atome interpretieren

Grundgedanke: Der Wahrheitswert von Formeln sollte sich wie in der Aussagenlogik aus dem Wahrheitswert von Atomen ergeben.

Beispiel: Ein mögliches Atom ist $p(a, x)$ mit $a \in \mathbf{C}$ und $x \in \mathbf{V}$. Wie soll diesem Ausdruck ein Wahrheitswert zugeordnet werden?

Dazu müssen drei Fragen beantwortet werden:

- Was bedeutet p?
  Prädikatssymbole stehen für Relationen gleicher Stelligkeit
- Was bedeutet a?
- Was bedeutet x?

Atome interpretieren

Grundgedanke: Der Wahrheitswert von Formeln sollte sich wie in der Aussagenlogik aus dem Wahrheitswert von Atomen ergeben.

Beispiel: Ein mögliches Atom ist $p(a, x)$ mit $a \in \mathbf{C}$ und $x \in \mathbf{V}$. Wie soll diesem Ausdruck ein Wahrheitswert zugeordnet werden?

Dazu müssen drei Fragen beantwortet werden:

- Was bedeutet p?
  Prädikatssymbole stehen für Relationen gleicher Stelligkeit
- Was bedeutet a?
  Konstanten stehen für Elemente, die in Relationen stehen können
- Was bedeutet x?

Atome interpretieren

Grundgedanke: Der Wahrheitswert von Formeln sollte sich wie in der Aussagenlogik aus dem Wahrheitswert von Atomen ergeben.

Beispiel: Ein mögliches Atom ist $p(a, x)$ mit $a \in \mathbf{C}$ und $x \in \mathbf{V}$. Wie soll diesem Ausdruck ein Wahrheitswert zugeordnet werden?

Dazu müssen drei Fragen beantwortet werden:

- Was bedeutet p?
  Prädikatssymbole stehen für Relationen gleicher Stelligkeit
- Was bedeutet a?
  Konstanten stehen für Elemente, die in Relationen stehen können
- Was bedeutet x?
  Variablen stehen auch für Elemente, aber ihre verschiedenen Vorkommen können für verschiedene Elemente stehen

Atome interpretieren

Grundgedanke: Der Wahrheitswert von Formeln sollte sich wie in der Aussagenlogik aus dem Wahrheitswert von Atomen ergeben.

Beispiel: Ein mögliches Atom ist $p(a, x)$ mit $a \in \mathbf{C}$ und $x \in \mathbf{V}$. Wie soll diesem Ausdruck ein Wahrheitswert zugeordnet werden?

Dazu müssen drei Fragen beantwortet werden:

- Was bedeutet p?
  Prädikatssymbole stehen für Relationen gleicher Stelligkeit
- Was bedeutet a?
  Konstanten stehen für Elemente, die in Relationen stehen können
- Was bedeutet x?
  Variablen stehen auch für Elemente, aber ihre verschiedenen Vorkommen können für verschiedene Elemente stehen

Ein Atom $p(a, x)$ ist also wahr, wenn zwischen dem Element, für das a steht, und dem Element, für das x steht, die Relation besteht, für die p steht.

Interpretationen

Die Wertzuweisung der Aussagenlogik wird also durch Interpretationen und Zuweisungen für Variablen ersetzt.

Eine Interpretation $\mathcal{I}$ ist ein Paar $\langle \Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}} \rangle$ bestehend aus einer nichtleeren Grundmenge von Elemente $\Delta^{\mathcal{I}}$ (der Domäne) und einer Interpretationsfunktion $\cdot^{\mathcal{I}}$, welche:

- jede Konstante $a \in \mathbf{C}$ auf ein Element $a^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$ und
- jedes n-stellige Prädikatensymbol $p \in \mathbf{P}$ auf eine Relation $p^{\mathcal{I}} \in (\Delta^{\mathcal{I}})^n$

abbildet.

Eine Zuweisung $\mathcal{Z}$ für eine Interpretation $\mathcal{I}$ ist eine Funktion $\mathcal{Z} : \mathbf{V} \to \Delta^{\mathcal{I}}$, die Variablen auf Elemente der Domäne abbildet. Für $x \in \mathbf{V}$ und $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$ schreiben wir $\mathcal{Z}[x \mapsto \delta]$ für die Zuweisung, die x auf δ und alle anderen Variablen $y \neq x$ auf $\mathcal{Z}(y)$ abbildet.

Beispiel (1)

„Null ist eine natürliche Zahl und jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger, der ebenfalls eine natürliche Zahl ist.“

$$\mathsf{NatNum}(\mathsf{null}) \wedge \forall x.\big(\mathsf{NatNum}(x) \to \exists y.(\mathsf{succ}(x, y) \wedge \mathsf{NatNum}(y))\big)$$

Wir betrachten eine Interpretation $\mathcal{I}$ mit

- $\Delta^{\mathcal{I}} = \mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen
- $\mathsf{null}^{\mathcal{I}} = 0$
- $\mathsf{NatNum}^{\mathcal{I}} = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ die Menge der natürlichen Zahlen
- $\mathsf{succ}^{\mathcal{I}} = \{\langle d, e\rangle \mid d, e \in \mathbb{R}, d < e\}$

Unter dieser Interpretation ist das Atom $\mathsf{NatNum}(\mathsf{null})$ wahr, da $\mathsf{null}^{\mathcal{I}} \in \mathsf{NatNum}^{\mathcal{I}}$ gilt.

Wir schreiben: $\mathsf{NatNum}(\mathsf{null})^{\mathcal{I}} = 1$.

Beispiel (2)

„Null ist eine natürliche Zahl und jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger, der ebenfalls eine natürliche Zahl ist.“

$$\text{NatNum}(\text{null}) \wedge \forall x.\Big(\text{NatNum}(x) \to \exists y.(\text{succ}(x, y) \wedge \text{NatNum}(y))\Big)$$

Wir betrachten für die vorherige Interpretation $\mathcal{I}$ eine Zuweisung $\mathcal{Z}$ mit

- $\mathcal{Z}(x) = 42$
- $\mathcal{Z}(y) = 5$

Unter dieser Interpretation und Zuweisung ist das Atom $\text{succ}(x, y)$ falsch, da $\langle \mathcal{Z}(x), \mathcal{Z}(y) \rangle \notin \text{succ}^{\mathcal{I}}$ gilt.

Wir schreiben: $\text{succ}(x, y)^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} = 0$.

Anmerkung: Allgemein geben wir bei Interpretationen und Zuweisungen nur die Belegungen an, die für die Auswertung einer gegebenen Formel relevant sind. Zum Beispiel müssen wir $\mathcal{Z}$ nicht für alle $z \in \mathbf{V}$ definieren.

Atome interpretieren

Wir bestimmen dementsprechend die Wahrheit von Atomen unter einer Interpretation und Zuweisung:

Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation und $\mathcal{Z}$ eine Zuweisung für $\mathcal{I}$.

- Für eine Konstante c definieren wir $c^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} = c^{\mathcal{I}}$
- Für eine Variable x definieren wir $x^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}(x)$

Für ein Atom $p(t_1, \ldots, t_n)$ setzen wir sodann:

- $p(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} = 1$ wenn $\langle t_1^{\mathcal{I},\mathcal{Z}}, \ldots, t_n^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} \rangle \in p^{\mathcal{I}}$ und
- $p(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} = 0$ wenn $\langle t_1^{\mathcal{I},\mathcal{Z}}, \ldots, t_n^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} \rangle \notin p^{\mathcal{I}}$.

Atome interpretieren

Wir bestimmen dementsprechend die Wahrheit von Atomen unter einer Interpretation und Zuweisung:

Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation und $\mathcal{Z}$ eine Zuweisung für $\mathcal{I}$.

- Für eine Konstante c definieren wir $c^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} = c^{\mathcal{I}}$
- Für eine Variable x definieren wir $x^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}(x)$

Für ein Atom $p(t_1, \ldots, t_n)$ setzen wir sodann:

- $p(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} = 1$ wenn $\langle t_1^{\mathcal{I},\mathcal{Z}}, \ldots, t_n^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} \rangle \in p^{\mathcal{I}}$ und
- $p(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} = 0$ wenn $\langle t_1^{\mathcal{I},\mathcal{Z}}, \ldots, t_n^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} \rangle \notin p^{\mathcal{I}}$.

Achtung! Wir verwenden Interpretationen und Zuweisungen auf zwei Ebenen, die man nicht verwecheln sollte:

(1) um Terme t auf Elemente $t^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$ abzubilden

(2) um Atome A auf Wahrheitswerte $A^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} \in \{0, 1\}$ abzubilden

Formeln interpretieren

Eine Interpretation $\mathcal{I}$ und eine Zuweisung $\mathcal{Z}$ für $\mathcal{I}$ erfüllen eine Formel F, in Symbolen $\mathcal{I},\mathcal{Z} \models F$, wenn eine der folgenden rekursiven Bedingungen gilt:

Formel F	$\mathcal{I},\mathcal{Z} \models F$ wenn:	$\mathcal{I},\mathcal{Z} \not\models F$ wenn:
F Atom	$F^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} = 1$	$F^{\mathcal{I},\mathcal{Z}} = 0$
$\neg G$	$\mathcal{I},\mathcal{Z} \not\models G$	$\mathcal{I},\mathcal{Z} \models G$
$(G_1 \wedge G_2)$	$\mathcal{I},\mathcal{Z} \models G_1$ und $\mathcal{I},\mathcal{Z} \models G_2$	$\mathcal{I},\mathcal{Z} \not\models G_1$ oder $\mathcal{I},\mathcal{Z} \not\models G_2$
$(G_1 \vee G_2)$	$\mathcal{I},\mathcal{Z} \models G_1$ oder $\mathcal{I},\mathcal{Z} \models G_2$	$\mathcal{I},\mathcal{Z} \not\models G_1$ und $\mathcal{I},\mathcal{Z} \not\models G_2$
$(G_1 \to G_2)$	$\mathcal{I},\mathcal{Z} \not\models G_1$ oder $\mathcal{I},\mathcal{Z} \models G_2$	$\mathcal{I},\mathcal{Z} \models G_1$ und $\mathcal{I},\mathcal{Z} \not\models G_2$
$(G_1 \leftrightarrow G_2)$	$\mathcal{I},\mathcal{Z} \models G_1$ und $\mathcal{I},\mathcal{Z} \models G_2$ oder $\mathcal{I},\mathcal{Z} \not\models G_1$ und $\mathcal{I},\mathcal{Z} \not\models G_2$	$\mathcal{I},\mathcal{Z} \models G_1$ und $\mathcal{I},\mathcal{Z} \not\models G_2$ oder $\mathcal{I},\mathcal{Z} \not\models G_1$ und $\mathcal{I},\mathcal{Z} \models G_2$
$\forall x.G$	$\mathcal{I},\mathcal{Z}[x \mapsto \delta] \models G$ für alle $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$	$\mathcal{I},\mathcal{Z}[x \mapsto \delta] \not\models G$ für mindestens ein $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$
$\exists x.G$	$\mathcal{I},\mathcal{Z}[x \mapsto \delta] \models G$ für mindestens ein $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$	$\mathcal{I},\mathcal{Z}[x \mapsto \delta] \not\models G$ für alle $\delta \in \Delta^{\mathcal{I}}$

Beispiel

„Null ist eine natürliche Zahl und jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger, der ebenfalls eine natürliche Zahl ist.“

$$F = \mathsf{NatNum}(\mathsf{null}) \land \forall x.\big(\mathsf{NatNum}(x) \to \exists y.(\mathsf{succ}(x, y) \land \mathsf{NatNum}(y))\big)$$

Wir betrachten eine Interpretation $\mathcal{I}$ mit

- $\Delta^{\mathcal{I}} = \mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen
- $\mathsf{null}^{\mathcal{I}} = 0$
- $\mathsf{NatNum}^{\mathcal{I}} = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ die Menge der natürlichen Zahlen
- $\mathsf{succ}^{\mathcal{I}} = \{\langle d, e\rangle \mid d, e \in \mathbb{R}, d < e\}$

Dann gilt $\mathcal{I} \models F$ (unter jeder beliebigen Zuweisung).

Notation: Bei der Interpretation von Sätzen (Formeln ohne freie Variablen) spielen Zuweisungen keine Rolle. Wir schreiben sie in diesem Fall nicht.

Intuitive Semantik: Logelei

Wir kehren zurück auf das Inselreich mit Menschen von Typ W und Typ L.

Smullyan[1] fragte die Bewohner nach ihren Rauchgewohnheiten.

[1] R. Smullyan: A Beginner's Guide to Mathematical Logic, Dover 2014

Intuitive Semantik: Logelei

Wir kehren zurück auf das Inselreich mit Menschen von Typ W und Typ L.

Smullyan[1] fragte die Bewohner nach ihren Rauchgewohnheiten.

- Auf Insel A antwortete jeder der Bewohner:
  „Jeder, der hier von Typ W ist, raucht."
- Auf Insel B antwortete jeder der Bewohner:
  „Einige von uns hier sind von Typ L und rauchen."
- Auf Insel C hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:
  „Falls ich rauche, dann raucht jeder hier."
- Auf Insel D hatten alle den gleichen Typ und jeder sagte:
  „Einige hier rauchen, aber ich nicht."

Was können wir jeweils über die Bewohner und ihre Gewohnheiten schließen?

[1] R. Smullyan: A Beginner's Guide to Mathematical Logic, Dover 2014

Zusammenfassung und Ausblick

Prädikatenlogik verallgemeinert Aussagenlogik mit n-stelligen Prädikaten, Termen und Quantoren

Zur Auswertung von Formeln benötigen wir eine Interpretation und eine Variablenzuweisung

Was erwartet uns als nächstes?

- Logisches Schließen
- Entscheidbare logische Probleme
- Unentscheidbare logische Probleme