Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2023**

Elliptische Kurven

Vorlesung 16

Differentialformen

in dieser Vorlesung besprechen wir Differentialformen auf einer elliptischen Kurve. Im komplexen Fall sind das die holomorphen Differentialformen im Sinne der (komplexen) Differentialgeometrie, also im Wesentlichen das duale Konzept zu Tangentialbündel und Vektorfelder, im Allgemeinen arbeiten wir mit den rein algebraisch definierten Kähler-Differentialen. Zur Konstruktion siehe den Kurs zur Singularitätentheorie. Wichtig ist hier, dass es für den Modul der Kähler-Differentiale eine einfache Restklassenkonstruktion gibt.

Auf einer ebenen affinen Kurve $V(g) \subseteq \mathbb{A}_K^2$ mit dem affinen Ring $R = K[X,Y]/(g)$ ist der Modul der Kähler-Differentiale gleich dem R-Modul

$$\Omega_{R|K} \,=\, Rdx \oplus Rdy/dg \,\cong\, R \times R/\left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right),$$

es handelt sich also um eine Darstellung als Restklassenmodul eines freien Moduls vom Rang 2 modulo einer Gleichung. Wenn die Kurve glatt ist, so ist in jedem Punkt eine der partiellen Ableitungen eine Einheit und somit ist lokal dieser Modul frei vom Rang 1. Es handelt sich also um einen invertierbaren Modul. Die Gleichung

$$\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy \,=\, 0$$

kann man auch als

$$\frac{1}{\frac{\partial g}{\partial y}} dx \,=\, -\frac{1}{\frac{\partial g}{\partial x}} dy$$

schreiben, wobei die linke Darstellung für den Ort gilt, wo $\frac{\partial g}{\partial y}$ nicht vercshwindet. Da im glatten Fall die partiellen Ableitungen das Einheitsideal erzeugen, handelt es sich um eine auf ganz R definierte nullstellenfreie Differentialform.

Bei einer projektiven Varietät muss man den Modul der Kähler-Differentialformen vergarben. Im Fall von Kurven lässt sich der Grundgedanke dieses Konzeptes einfach beschreiben. Für eine ebene projektive Kurve $C = V_+(F) \subseteq \mathbb{P}_K^2$ mit F vom Grad m und der Form $X^m + \ldots$ bilden $D_+(Y)$ und $D_+(Z)$ eine affine Überdeckung der Kurve und für die globalen Funktionen liegt das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(C, \mathcal{O}_C) & \longrightarrow & ((K[X,Y,Z]/(F))_Y)_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ ((K[X,Y,Z]/(F))_Z)_0 & \longrightarrow & ((K[X,Y,Z]/(F))_{YZ})_0 \end{array}$$

vor. Eine globale Funktion (links oben) wird genauer durch ein Paar bestehend aus einer Funktion rechts oben und einer Funktion links unten beschrieben, das die Bedingung erfüllt, dass es rechts unten auf das gleiche Element abbildet. Die Abbildungen sind bei einer integren Kurve injektiv und somit spielt sich alles im Funktionenkörper der Kurve ab.

Ein entsprechendes Diagramm gibt es für den Modul der Kähler-Differentiale, nämlich

$$\begin{array}{ccc} \Gamma\big(C, \Omega_{C|K}\big) & \longrightarrow & \Omega_{((K[X,Y,Z]/(F))_Y)_0|K} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_{((K[X,Y,Z]/(F))_Z)_0|K} & \longrightarrow & \Omega_{((K[X,Y,Z]/(F))_{YZ})_0|K} \, . \end{array}$$

Im integren Fall sind die Abbildungen wieder injektiv, und das Diagramm stellt die Definition für die globalen Differentialformen $\Gamma\big(C, \Omega_{C|K}\big)$ dar. Eine globale Differentialform ist nämlich ein Paar bestehend aus einer Differentialform rechts oben und einer Differentialform links unten, das die Bedingung erfüllt, dass es rechts unten auf die gleiche Differentialform abbildet. Im integren Fall spielt sich alles im Modul dere Kähler-Differentiale des Funktionenkörpers, also in $\Omega_{Q(C)|K}$ ab. Für die affinen Ausschnitte haben wir die oben angegebene Restklassendarstellung.

Lemma 16.1. *Es sei $F \in K[X,Y,Z]$ ein homogenes Polynom vom Grad $m \geq 3$, das eine glatte projektive Kurve*

$$C = V_+(F) \subseteq \mathbb{P}^2_K$$

definiere. Dann ist für jedes homogene Polynom H vom Grad $m-3$ die Differentialform

$$\frac{HY^2}{\frac{\partial F}{\partial Z}} d\frac{X}{Y}$$

auf C global definiert.

Beweis. Unmittelbar ist die Differentialform auf der offenen Menge $D_+(Y) \cap D_+(\frac{\partial F}{\partial Z})$ definiert. Man beachte, dass die Quotienten in der Differentialform den Grad 0 haben. Es ist zu zeigen, dass man die Form auch mit anderen Nennern schreiben kann, so dass die zugehörigen offenen Mengen die Kurve überdecken.

Wir betrachten die Differentialform

$$\pm \frac{Y^2}{\frac{\partial F}{\partial Z}} d\frac{X}{Y}$$

und die entsprechend gebildeten Formen, also ohne den Faktor H. Dies ist dann keine Differentialform auf der Kurve (außer bei $m = 3$), sondern auf einer offenen Menge der affinen Varietät zum homogenen Koordinantering $K[X,Y,Z]/(F)$. Im Nenner steht die partielle Ableitung nach der Variablen, die im Differential rechts nicht vorkommt, und im Zähler steht das Quadrat der Variablen im Differential rechts im Nenner. Das Vorzeichen wählen wir so, dass es, wenn hinten $d\frac{X}{Y}$ oder $d\frac{Y}{Z}$ steht, positiv und bei $d\frac{X}{Z}$ negativ und dreht sich um, wenn man im Differential Zähler und Nenner vertauscht.

Wir behaupten, dass es sich stets um die gleiche Differentialform handelt. Wegen der Quotientenregel

$$d\frac{X}{Y} = -\left(\frac{X}{Y}\right)^2 d\frac{Y}{X}$$

kann man die Zähler und Nenner im Bruch vertauschen. In $\Omega_{Q(K[X,Y,Z]/(F))|K}$ gilt (unter Verwendung von $dF = 0$ und Aufgabe 2.8)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial X} d\frac{X}{Y} &= \frac{\partial F}{\partial X}\left(\frac{1}{Y}dX - \frac{X}{Y^2}dY\right) \\
&= \frac{1}{Y}\cdot\frac{\partial F}{\partial X}dX - \frac{X}{Y^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial X}dY \\
&= -\frac{1}{Y}\left(\frac{\partial F}{\partial Y}dY + \frac{\partial F}{\partial Z}dZ\right) - \frac{X}{Y^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial X}dY \\
&= -\frac{1}{Y}\cdot\frac{\partial F}{\partial Z}dZ + \frac{1}{Y^2}\left(-X\frac{\partial F}{\partial X} - Y\frac{\partial F}{\partial Y}\right)dY \\
&= -\frac{1}{Y}\cdot\frac{\partial F}{\partial Z}dZ + \frac{1}{Y^2}\left(Z\frac{\partial F}{\partial Z}\right)dY \\
&= -\frac{\partial F}{\partial Z}\left(\frac{1}{Y}dZ - \frac{Z}{Y^2}dY\right) \\
&= -\frac{\partial F}{\partial Z}d\frac{Z}{Y},
\end{aligned}$$

woraus sich

$$\frac{Y^2}{\frac{\partial F}{\partial Z}} d\frac{X}{Y} = -\frac{Y^2}{\frac{\partial F}{\partial X}} d\frac{Z}{Y}$$

ergibt. Entsprechend gilt

$$\frac{X^2}{\frac{\partial F}{\partial Z}} d\frac{Y}{X} = -\frac{X^2}{\frac{\partial F}{\partial Y}} d\frac{Z}{X}$$

und somit auch

$$\frac{Y^2}{\frac{\partial F}{\partial Z}} d\frac{X}{Y} = -\frac{X^2}{\frac{\partial F}{\partial Z}} d\frac{Y}{X} = \frac{X^2}{\frac{\partial F}{\partial Y}} d\frac{Z}{X}.$$

Wenn man alles mit H multipliziert, ergeben sich entsprechende Darstellungen für die Differentialform der Satzaussage.

Auf $D_+(Y)$ besitzt die Form Darstellungen mit $\frac{\partial F}{\partial Z}$ und mit $\frac{\partial F}{\partial X}$ im Nenner. Wegen

$$X\frac{\partial F}{\partial X} + Y\frac{\partial F}{\partial Y} + Z\frac{\partial F}{\partial Z} = 0$$

auf $V(F)$ folgt für einen Punkt $P \in D_+(Y)$, in dem die beiden partiellen Ableitungen, die als Nenner der Form auftreten, verschwinden, dass auch die dritte partielle Ableitung verschwindet. Dies ist aber ein Widerspruch zur

Glattheit. D.h. für jeden Punkt gibt es eine Darstellung der Form und die Form ist global definiert. □

Mit dieser expliziten Methode erhält man auf einer glatten ebenen projektiven Kurve vom Grad m genau $\frac{(m-2)(m-1)}{2}$ globale Differentialformen, die linear unabhängig über K sind. In der Tat gibt es keine weiteren.

Beispiel 16.2. Es sei F ein homogenes Polynom vom Grad 3 in den Variablen X, Y, Z, das eine elliptische Kurve definiere. Dann ist nach Lemma 16.1 die Differentialform

$$\frac{Y^2}{\frac{\partial F}{\partial Z}} d\frac{X}{Y}$$

global definiert. Die Beschreibungen auf den anderen offenen Mengen sind entsprechend gebildet. Da die angegebene Beschreibung auf $D_+(Y) \cap D_+(\frac{\partial F}{\partial Z})$, folgt ferner, dass diese Differentialform keine Nullstelle besitzt.

Beispiel 16.3. Wir betrachten die homogene Gleichung (kurze Weierstaßform)

$$Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3$$

bzw.

$$Y^2Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3 = 0$$

über einem Körper der Charakteristik $\neq 2, 3$. Nach Beispiel 16.2 bzw. Lemma 16.1 ist

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{Y^2}{Y^2 - aXZ - 3bZ^2} d\frac{X}{Y} \\
&= -\frac{X^2}{Y^2 - aXZ - 3bZ^2} d\frac{Y}{X} \\
&= -\frac{Z}{2Y} d\frac{X}{Z} \\
&= \frac{X^2}{2YZ} d\frac{Z}{X} \\
&= \frac{Z^2}{3X^2 + aZ^2} d\frac{Y}{Z} \\
&= -\frac{Y^2}{3X^2 + aZ^2} d\frac{Z}{Y}
\end{aligned}$$

eine globale Differentialform ohne Nullstelle. Auf $D_+(Z)$ mit $x = X/Z$ und $y = Y/Z$ ist die Form gleich

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2y}dx &= \frac{Z^2}{3X^2 + aZ^2} dy \\
&= \left(\frac{3X^2 + aZ^2}{Z^2}\right)^{-1} dy \\
&= \left(3x^2 + a\right)^{-1} dy \\
&= \frac{1}{3x^2 + a} dy,
\end{aligned}$$

was man auch direkt aus der affinen Gleichung $y^2 = x^3 + ax + b$ ableiten kann.

Auf einer elliptischen Kurve in Weierstraßform werden wir zumeist mit der Form $\frac{dx}{y}$ arbeiten, jede andere globale Differentialform ist ein skalares Vielfaches davon.

Beispiel 16.4. Wir betrachten die Differentialform

$$\omega = dx/y$$

aus Beispiel 16.3 (bis auf den Faktor $-1/2$) für $K = \mathbb{C}$ auf der algebraischen Realisierung einer elliptischen Kurve

$$\mathbb{C}/\Gamma \cong V_+(F)$$

im Sinne von Satz 12.13. Unter der holomorphen Abbildung

$$\pi\colon \mathbb{C} \setminus \Gamma \longrightarrow V_+(F) \cap D_+(Z),\ z \longmapsto (\wp(z), \wp'(z)) = (x, y),$$

gilt

$$\pi^*\omega = dz,$$

da ja $\pi^* dx = \wp'(z)dz$ gilt (vergleiche Lemma 82.7 (Analysis (Osnabrück 2014-2016)) und Lemma 82.8 (Analysis (Osnabrück 2014-2016)) für das Zurückziehen von Differentialformen im reellen Fall).

Lemma 16.5. *Es sei E eine elliptische Kurve über einem Körper K. Dann ist die Garbe der Differentialformen auf E isomorph zur Strukturgarbe von E. Insbesondere ist der Raum der globalen Differentialformen auf E ein eindimensionaler Vektorraum über K.*

Beweis. Wir können annehmen, dass K algebraisch abgeschlossen ist. Die Aussage ist somit ein Spezialfall von Korollar 19.12 (Bündel, Garben und Kohomologie (Osnabrück 2019-2020)). □

Man kann auch direkt mit Beispiel 16.2 argumentieren.

Differentialformen unter Morphismen

Lemma 16.6. *Es sei E eine elliptische Kurve über einem Körper K mit kurzer Weierstraßgleichung*

$$y^2 = x^3 + ax + b.$$

Dann wird unter der Additionsabbildung

$$+\colon E \times E \longrightarrow E$$

die Differentialform $\frac{dx}{y}$ auf $\frac{dx_1}{y_1} + \frac{dx_2}{y_2}$ abgebildet.

Beweis. Die Addition $+\colon\ E \times E \to E$ wird gemäß Satz 6.5 durch

$$(x_1, y_1; x_2, y_2) \mapsto \big(\alpha^2 - x_1 - x_2,\ -\alpha^3 + \alpha(2x_1 + x_2) - y_1\big) = (x, y)$$

mit $\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ beschrieben. Diese Terme kann man als funktionale Ausdrücke auf der affinen offenen Menge $D_+(z)$ bzw. als Ringelemente in

$$R = K[x, y]/(y^2 - x^3 - ax - b)$$

bzw. im Tensorprodukt

$$R \otimes_K R = K[x_1, y_1, x_2, y_2]/(y_1^2 - x_1^3 - ax_1 - b, y_2^2 - x_2^3 - ax_2 - b)$$

auffassen, bei der letzten Interpretation geht es um den Ringhomomorphismus

$$R \longrightarrow R \otimes_K R,$$

der durch die Einsetzungen $x \mapsto \alpha^2 - x_1 - x_2$ und $y \mapsto -\alpha^3 + \alpha(2x_1 + x_2) - y_1$ festgelegt ist. Unter diesem Ringhomomorphismus wird dx nach Lemma 18.4 (Bündel, Garben und Kohomologie (Osnabrück 2019-2020)) (5) auf

$$\begin{aligned}
& d\big(\alpha^2 - x_1 - x_2\big) \\
= \ & 2\alpha d\alpha - dx_1 - dx_2 \\
= \ & 2\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} d\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) - dx_1 - dx_2 \\
= \ & 2\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{(x_2 - x_1)d(y_2 - y_1) - (y_2 - y_1)d(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)^2} - dx_1 - dx_2 \\
= \ & 2\frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1)^2} d(y_2 - y_1) - 2\frac{(y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^3} d(x_2 - x_1) - dx_1 - dx_2 \\
= \ & \frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1)^2}\left(\frac{3x_2^2 + a}{y_2} dx_2 - \frac{3x_1^2 + a}{y_1} dx_1\right) \\
& -2\frac{y_2^2 - 2y_1y_2 + y_1^2}{(x_2 - x_1)^3} d(x_2 - x_1) - dx_1 - dx_2 \\
= \ & \left(-\frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1)^2} \cdot \frac{3x_1^2 + a}{y_1} + 2\frac{y_2^2 - 2y_1y_2 + y_1^2}{(x_2 - x_1)^3} - 1\right) dx_1 + * dx_2
\end{aligned}$$

abgebildet, wobei der nicht angeführte Term vor dx_2 symmetrisch gebildet ist.

Der Term vor dx_1 ist

$$\begin{aligned}
& -\frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1)^2} \cdot \frac{3x_1^2 + a}{y_1} + 2\frac{y_2^2 - 2y_1y_2 + y_1^2}{(x_2 - x_1)^3} - 1 \\
= \ & -\frac{y_1y_2 - y_1^2}{(x_2 - x_1)^2} \cdot \frac{3x_1^2 + a}{x_1^3 + ax_1 + b} + 2\frac{\big(x_2^3 + ax_2 + b\big) - 2y_1y_2 + \big(x_1^3 + ax_1 + b\big)}{(x_2 - x_1)^3} - 1 \\
= \ & \frac{-y_1y_2 + \big(x_1^3 + ax_1 + b\big)}{(x_2 - x_1)^2} \cdot \frac{3x_1^2 + a}{x_1^3 + ax_1 + b} + 2\frac{x_1^3 + x_2^3 + a(x_1 + x_2) + 2b - 2y_1y_2}{(x_2 - x_1)^3} - 1 \\
= \ & \frac{x_1^3 + ax_1 + b}{(x_2 - x_1)^2} \cdot \frac{3x_1^2 + a}{x_1^3 + ax_1 + b} + 2\frac{x_1^3 + x_2^3 + a(x_1 + x_2) + 2b}{(x_2 - x_1)^3} - 1 + y_1y_2\left(-\frac{3x_1^2 + a}{\big(x_1^3 + ax_1 + b\big)(x_2 - x_1)^2} - \frac{4}{(x_2 - x_1)^3}\right) \\
= \ & \frac{\big(3x_1^2 + a\big)}{(x_2 - x_1)^2} + 2\frac{x_1^3 + x_2^3 + a(x_1 + x_2) + 2b}{(x_2 - x_1)^3} - 1 + y_1y_2\left(-\frac{3x_1^2 + a}{\big(x_1^3 + ax_1 + b\big)(x_2 - x_1)^2} - \frac{4}{(x_2 - x_1)^3}\right) \\
= \ & \frac{\big(3x_1^2 + a\big)(x_2 - x_1) + 2\big(x_1^3 + x_2^3 + a(x_1 + x_2) + 2b\big) - (x_2 - x_1)^3}{(x_2 - x_1)^3} + y_1y_2\frac{-\big(3x_1^2 + a\big)(x_2 - x_1) - 4x_1^3 - 4ax_1 - 4b}{\big(x_1^3 + ax_1 + b\big)(x_2 - x_1)^3}
\end{aligned}$$

Der Zähler links ist

$$\begin{aligned} r &= \left(3x_1^2+a\right)(x_2-x_1)+2\left(x_1^3+x_2^3+a(x_1+x_2)+2b\right)-(x_2-x_1)^3 \\ &= -3x_1^3+3x_1^2x_2+a(x_2-x_1)+2x_1^3+2x_2^3+2a(x_1+x_2) \\ &\quad +4b-x_2^3+3x_1x_2^2-3x_1^2x_2+x_1^3 \\ &= x_2^3+3x_1x_2^2+ax_1+3ax_2+4b. \end{aligned}$$

Der Zähler rechts ist

$$\begin{aligned} s &= -\left(3x_1^2+a\right)(x_2-x_1)-4x_1^3-4ax_1-4b \\ &= 3x_1^3-3x_1^2x_2-a(x_2-x_1)-4x_1^3-4ax_1-4b \\ &= -x_1^3-3x_1^2x_2-a(x_2+3x_1)-4b. \end{aligned}$$

Wir haben also eine Beschreibung der zurückgezogenen Differentialform $+^*dx$ der Gestalt

$$\left(\frac{r}{(x_2-x_1)^3}+\frac{s}{(x_2-x_1)^3(x_1^3+ax_1+b)}y_1y_2\right)dx_1+*dx_2$$

mit explizit bestimmten Polynomen r und s in x_1,x_2. Für die Differentialform $\frac{dx}{y}$ gilt

$$+^*\frac{dx}{y} = \frac{+^*dx}{+^*y},$$

wobei $+^*y$ einfach den Rückzug der Funktion y bezeichnet, also einfach $-\alpha^3+\alpha(2x_1+x_2)-y_1$. In Aufgabe 6.15 haben wir dies berechnet, es ist

$$-\alpha^3+\alpha(2x_1+x_2)-y_1 = \frac{fy_1+gy_2}{(x_2-x_1)^3}$$

mit

$$f = x_2^3+3x_1x_2^2+a(x_1+3x_2)+4b$$

und

$$g = -x_1^3-3x_1^2x_2-a(3x_1+x_2)-4b.$$

Die behauptete Gleichheit

$$+^*\frac{dx}{y} = \frac{\left(\frac{r}{(x_2-x_1)^3}+\frac{s}{(x_2-x_1)^3\left(x_1^3+ax_1+b\right)}y_1y_2\right)dx_1+*dx_2}{\frac{fy_1+gy_2}{(x_2-x_1)^3}} = \frac{dx_1}{y_1}+\frac{dx_2}{y_2}$$

ergibt sich somit (für den dx_1-Anteil) aus

$$r\left(x_1^3+ax_1+b\right)y_1+sy_1^2y_2 = (fy_1+gy_2)\left(x_1^3+ax_1+b\right).$$

Dies folgt nun direkt aus $r=f$ und $s=g$. $\square$

Satz 16.7. *Es sei E eine elliptische Kurve über einem Körper K und sei ω eine Differentialform auf E. Es seien*

$$\varphi_1,\varphi_2\colon\ E\longrightarrow E$$

Morphismen auf E. Dann gilt für den Rückzug die Gleichheit $(\varphi_1+\varphi_2)^*\omega = \varphi_1^*\omega+\varphi_2^*\omega$.

Beweis. Die Abbildung $\varphi_1 + \varphi_2$ ist die zusammengesetzte Abbildung

$$E \stackrel{\varphi_1,\varphi_2}{\longrightarrow} E \times E \stackrel{+}{\longrightarrow} E\,,$$

wir können damit den Rückzug einer Differentialform berechnen, wobei jede Differentialform ein skalares Vielfaches von $\frac{dx}{y}$ ist. Nach Lemma 16.6 ist

$$+^*\left(\frac{dx}{y}\right) = \frac{dx_1}{y_1} + \frac{dx_2}{y_2}.$$

Wenn π_1, π_2 die Projektionen bezeichnen, so ergibt sich

$$\begin{aligned}(\varphi_1,\,\varphi_2)^*\left(\frac{dx_1}{y_1} + \frac{dx_2}{y_2}\right) &= (\varphi_1,\,\varphi_2)^*\left(\frac{dx_1}{y_1}\right) + (\varphi_1,\,\varphi_2)^*\left(\frac{dx_2}{y_2}\right)\\ &= (\varphi_1,\,\varphi_2)^*\left(\pi_1^*\frac{dx}{y}\right) + (\varphi_1,\,\varphi_2)^*\left(\pi_2^*\frac{dx}{y}\right)\\ &= \varphi_1^*\frac{dx}{y} + \varphi_2^*\frac{dx}{y}.\end{aligned}$$

□

KOROLLAR 16.8. *Es sei E eine elliptische Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K und sei ω eine Differentialform auf E. Dann ist für jede Translation*

$$\tau_Q^*(\omega) = \omega.$$

Beweis. Die Translation mit Q kann man als Hintereinanderschaltung

$$E \stackrel{(\mathrm{Id}_E,\,Q)}{\longrightarrow} E \times E \stackrel{+}{\longrightarrow} E$$

auffassen. Da der Rückzug einer Differentialform unter einer konstanten Abbildung gleich 0 ist, ergibt sich mit Satz 16.7

$$\tau_Q^*(\omega) = (\mathrm{Id}_E + Q)^*(\omega) = \mathrm{Id}_E^*\,\omega + Q^*(\omega) = \omega.$$

□

LEMMA 16.9. *Es sei E eine elliptische Kurve über einem Körper K und sei ω eine Differentialform auf E. Dann gilt für den Rückzug unter der Multiplikation mit m die Gleichheit $[m]^*\omega = m\omega$.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 16.7 durch Induktion über m. □

KOROLLAR 16.10. *Es sei E eine elliptische Kurve über einem Körper K und sei $[m]\colon E \to E$ die Multiplikationsabbildung auf E. Dann ist $[m]$ genau dann separabel, wenn m kein Vielfaches der Charakteristik von K ist.*

Beweis. Nach Lemma 16.9 ist bei $m = 0$ der Rückzug der Differentialformen die Nullabbildung und bei $m \neq 0$ ist er surjektiv. Wegen Lemma 19.3 (Algebraische Zahlentheorie (Osnabrück 2020-2021)) entspricht dies den Fällen, dass der relative Kählermodul ungleich oder gleich 0 ist, was nach Satz Anhang 7.10 (Körper- und Galoistheorie (Osnabrück 2018-2019)) die (Nicht-)separabilität der Erweiterung der Funktionenkörper charakterisiert. □

Abbildungsverzeichnis