

# Analysis II

Prof. Dr. Holger Brenner  
Universität Osnabrück  
Fachbereich Mathematik/Informatik

Sommersemester 2022

## INHALTSVERZEICHNIS

1. Vorlesung - Uneigentliche Integrale	9
31.1. Uneigentliche Integrale	9
31.2. Vergleichskriterien mit Reihen	13
1. Arbeitsblatt	16
31.1. Übungsaufgaben	16
31.2. Aufgaben zum Abgeben	19
32. Vorlesung - Die Fakultätsfunktion	20
32.1. Euklidische Vektorräume	22
32.2. Norm und Abstand	25
32. Arbeitsblatt	27
32.1. Übungsaufgaben	27
32.2. Aufgaben zum Abgeben	31
33. Vorlesung - Metrische Räume	32
33.1. Metrische Räume	32
33.2. Teilmengen in einem metrischen Raum	34
33.3. Folgen in metrischen Räumen	36
33. Arbeitsblatt	39
33.1. Übungsaufgaben	39
33.2. Aufgaben zum Abgeben	43
34. Vorlesung - Stetigkeit	44
34.1. Stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen	44
34.2. Verknüpfungen und stetige Abbildungen	47
34.3. Polynomiale Funktionen	49
34. Arbeitsblatt	51
34.1. Übungsaufgaben	51
34.2. Aufgaben zum Abgeben	55
34.3. Die Aufgabe zum Abgeben	56
35. Vorlesung - Zusammenhang	56
35.1. Der Abschluss in einem metrischen Raum	56
35.2. Grenzwerte von Abbildungen	57
35.3. Zusammenhängende Räume	59

35.4. Zusammenhängende Räume und stetige Abbildungen	60
35.5. Wegzusammenhängende Räume	61
35. Arbeitsblatt	62
35.1. Übungsaufgaben	62
35.2. Aufgaben zum Abgeben	67
36. Vorlesung - Kompaktheit	68
36.1. Weitere Stetigkeitsbegriffe	68
36.2. Der Banachsche Fixpunktsatz	69
36.3. Kompaktheit	70
36.4. Der Fundamentalsatz der Algebra	72
36. Arbeitsblatt	73
36.1. Übungsaufgaben	73
36.2. Aufgaben zum Abgeben	77
37. Vorlesung - Differenzierbare Kurven	78
37.1. Differenzierbare Kurven	78
37. Arbeitsblatt	84
37.1. Übungsaufgaben	84
37.2. Aufgaben zum Abgeben	90
38. Vorlesung - Kurvenlängen	91
38.1. Die Mittelwertabschätzung für differenzierbare Kurven	91
38.2. Länge von Kurven	92
38. Arbeitsblatt	98
38.1. Übungsaufgaben	98
38.2. Aufgaben zum Abgeben	102
39. Vorlesung - Wegintegrale	103
39.1. Übungsaufgaben	103
39.2. Aufgaben zum Abgeben	107
39. Arbeitsblatt	109
39.1. Übungsaufgaben	109
39.2. Aufgaben zum Abgeben	113
40. Vorlesung - Gewöhnliche Differentialgleichungen	115
40.1. Gewöhnliche Differentialgleichungen	115
40.2. Erste Beispiele	117

40.3. Zentralfelder	119
40.4. Differentialgleichungen höherer Ordnung	120
40. Arbeitsblatt	122
40.1. Übungsaufgaben	122
40.2. Aufgaben zum Abgeben	128
40.3. Die Aufgabe zum Hochladen	129
41. Vorlesung - Lineare Differentialgleichungen	130
41.1. Das Polygonzugverfahren	130
41.2. Lineare Differentialgleichungssysteme	133
41.3. Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten	136
41. Arbeitsblatt	137
41.1. Übungsaufgaben	137
41.2. Aufgaben zum Abgeben	142
42. Vorlesung - Konstante Koeffizienten	144
42.1. Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten - Lösungsverfahren	144
42. Arbeitsblatt	154
42.1. Übungsaufgaben	154
42.2. Aufgaben zum Abgeben	159
43. Vorlesung - Richtungsableitung	160
43.1. Richtungsableitung	161
13. Arbeitsblatt	166
43.1. Übungsaufgaben	166
43.2. Aufgaben zum Abgeben	170
44. Vorlesung - Partielle Ableitungen	171
44.1. Partielle Ableitungen	171
44.2. Höhere Richtungsableitungen	174
44.3. Der Satz von Schwarz	175
44. Arbeitsblatt	176
44.1. Übungsaufgaben	176
44.2. Aufgaben zum Abgeben	181
45. Vorlesung - Totale Differenzierbarkeit	182

45.1. Totale Differenzierbarkeit	182
45.2. Die Kettenregel	186
45. Arbeitsblatt	190
45.1. Übungsaufgaben	190
45.2. Aufgaben zum Abgeben	193
46. Vorlesung - Totale Differenzierbarkeit II	195
46.1. Totale Differenzierbarkeit und partielle Ableitungen	195
46.2. Extrema	197
46. Arbeitsblatt	201
46.1. Übungsaufgaben	201
46.2. Aufgaben zum Abgeben	205
47. Vorlesung - Der Gradient	207
47.1. Linearformen und Bilinearformen	207
47.2. Der Gradient	208
47.3. Gradient und Niveaumengen	212
47.4. Lokale Extrema von Funktionen in mehreren Variablen	213
47. Arbeitsblatt	214
47.1. Übungsaufgaben	214
47.2. Aufgaben zum Abgeben	217
48. Vorlesung - Bilinearformen	218
48.1. Die Hesse-Form	218
48.2. Eigenschaften von Bilinearformen	219
48.3. Minorenkriterien für symmetrische Bilinearformen	222
48. Arbeitsblatt	224
48.1. Übungsaufgaben	224
48.2. Aufgaben zum Abgeben	226
49. Vorlesung - Taylor-Formel	227
49.1. Die Taylor-Formel - Vorbereitungen	227
49.2. Die Taylor-Formel	232
49. Arbeitsblatt	234
49.1. Übungsaufgaben	234
49.2. Aufgaben zum Abgeben	239
50. Vorlesung - Lokale Extrema	240

50.1. Hinreichende Kriterien für lokale Extrema	240
50. Arbeitsblatt	246
50.1. Übungsaufgaben	246
50.2. Aufgaben zum Abgeben	251
51. Vorlesung - Satz über die Umkehrabbildung	252
51.1. Der Satz über die Umkehrabbildung	252
51. Arbeitsblatt	259
51.1. Übungsaufgaben	259
51.2. Aufgaben zum Abgeben	262
52. Vorlesung - Diffeomorphismen	263
52.1. Reguläre Punkte	263
52.2. Diffeomorphismen	265
52. Arbeitsblatt	268
52.1. Übungsaufgaben	268
52.2. Aufgaben zum Abgeben	272
53. Vorlesung - Satz über implizite Abbildungen Integrierbarkeit	273
53.1. Der Satz über implizite Abbildungen	273
53. Arbeitsblatt	281
53.1. Übungsaufgaben	281
53.2. Aufgaben zum Abgeben	285
54. Vorlesung - Extrema unter Nebenbedingungen	287
54.1. Extrema unter Nebenbedingungen	287
54. Arbeitsblatt	294
54.1. Übungsaufgaben	294
54.2. Aufgaben zum Abgeben	297
55. Vorlesung - Lipschitz-Bedingung	298
55.1. Der Satz über die injektive Abbildung	298
55.2. Lipschitz-Bedingungen	299
55.3. Abbildungsräume und Supremumsnorm	301
55. Arbeitsblatt	304
55.1. Übungsaufgaben	304
55.2. Aufgaben zum Abgeben	307
56. Vorlesung - Satz von Picard-Lindelöf	308

56.1. Differential- und Integralgleichungen	308
56.2. Der Satz von Picard-Lindelöf	309
56.3. Die Picard-Lindelöf-Iteration	311
56. Arbeitsblatt	314
56.1. Übungsaufgaben	314
56.2. Aufgaben zum Abgeben	316
57. Vorlesung - Gradientenfelder	317
57.1. Zur Eindeutigkeit der Lösungen von Differentialgleichungen	317
57.2. Gradientenfelder	319
57.3. Wegintegrale und Gradientenfelder	321
57. Arbeitsblatt	323
57.1. Übungsaufgaben	323
57.2. Aufgaben zum Abgeben	326
58. Vorlesung - Integrabilitätsbedingung	327
58.1. Differenzierbarkeit des Integrals	327
58.2. Die Integrabilitätsbedingung	331
58. Arbeitsblatt	334
58.1. Übungsaufgaben	334
58.2. Aufgaben zum Abgeben	337
Anhang A: Bildlizenzen	339
Abbildungsverzeichnis	339

## Vorwort

Dieses Skript gibt die Vorlesung Analysis II wieder, die ich im Sommersemester 2021/22 an der Universität Osnabrück im Studiengang Mathematik gehalten habe.

Der Text wurde auf Wikiversity geschrieben und steht unter der Creative-Commons-Attribution-ShareAlike 4.0. Die Bilder wurden von Commons übernommen und unterliegen den dortigen freien Lizenzen. In einem Anhang werden die einzelnen Bilder mit ihren Autoren und Lizenzen aufgeführt. Die CC-BY-SA 4.0 Lizenz ermöglicht es, dass das Skript in seinen Einzelteilen verwendet, verändert und weiterentwickelt werden darf. Beim Übungsgruppenleiter Christian Ahring und den Tutoren Lukas Meyer, David Böttger, Tarek Schafmeyer und Fynn Pörtner bedanke ich mich für die Durchführung des Übungsbetriebs. Bei Frau Marianne Gausmann bedanke ich mich für die Erstellung der Pdf-Files und bei den Studierenden für einzelne Korrekturen.

Holger Brenner

## 1. VORLESUNG - UNEIGENTLICHE INTEGRALE

In dieser Vorlesung entwickeln wir die Integrationstheorie weiter, und zwar untersuchen wir die Frage, was passiert, wenn wir in einem Integral  $\int_a^b f(t)dt$  die Intervallgrenzen gegen unendlich oder gegen eine Zahl, wo die Funktion nicht definiert ist, wandern lassen.

### 31.1. Uneigentliche Integrale.

**Beispiel 31.1.** Wir knüpfen an Beispiel 24.9 an, d.h., es liegen zwei Massen  $M$  und  $m$  vor, die untereinander den Abstand  $R_0$  besitzen. Wie viel Energie muss man aufwenden, um die beiden Massen unendlich weit voneinander zu entfernen? In Beispiel 24.9 haben wir die Energie berechnet, um den Abstand von  $R_0$  auf  $R_1$  zu erhöhen, und erhielten

$$E(R_1) = \int_{R_0}^{R_1} \gamma \frac{Mm}{r^2} dr = \gamma Mm \left( \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1} \right).$$

Für  $R_1 \rightarrow \infty$  ist  $\frac{1}{R_1} \rightarrow 0$  und daher ist  $E(R_1) \rightarrow \gamma Mm \frac{1}{R_0}$ .

Dieses Beispiel zeigt, dass es sinnvoll sein kann, bei bestimmten Integralen die Intervallgrenzen „gegen unendlich laufen zu lassen“. Dies führt zum Begriff der *uneigentlichen Integrale*.

Unter einem (uneigentlichen) Randpunkt eines (ein- oder beidseitig) unbeschränkten Intervalls verstehen wir im Folgenden auch die Symbole  $\infty$  und  $-\infty$ . Dies heißt nicht, dass diese Symbole zu  $\mathbb{R}$  gehören, sondern lediglich, dass man dafür sinnvolle Grenzwertbetrachtungen durchführen kann. Die Definition für den Grenzwert einer Funktion gegen  $+\infty$  bzw.  $-\infty$  lautet folgendermaßen.

**Definition 31.2.** Es sei  $T = [a, \infty]$  (oder  $T = [-\infty, a]$ ) ein rechtsseitig (bzw. linksseitig) unbeschränktes Intervall und

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt  $b \in \mathbb{R}$  *Grenzwert* (oder *Limes*) von  $f$  für  $x \rightarrow +\infty$  (bzw.  $x \rightarrow -\infty$ ), wenn es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $x_0 \geq a$  (bzw.  $x_0 \leq a$ ) gibt mit  $|f(x) - b| \leq \epsilon$  für alle  $x \geq x_0$  (bzw.  $x \leq x_0$ ). In diesem Fall schreibt man

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$$

(bzw.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ ).

Die Rechenregeln für diesen Grenzwertbegriff (siehe Aufgabe 31.2) sind weitgehend analog zu den Rechenregeln für den bisherigen Grenzwertbegriff für Funktionen (siehe Lemma 12.12). Sie sind auch analog zu den Rechenregeln für Limiten von Folgen (siehe Lemma 6.1).

**Definition 31.3.** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $r$  ein (uneigentlicher) Randpunkt von  $I$  und  $a \in I$ . Es sei eine stetige Funktion

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

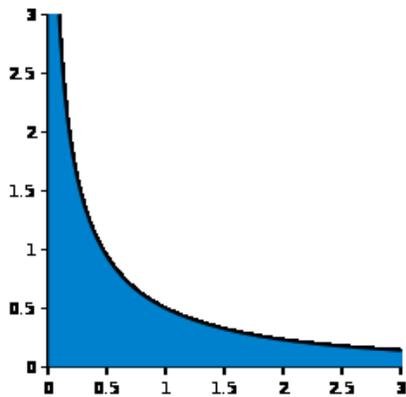
gegeben. Man sagt, dass das *uneigentliche Integral* zu  $f$  für  $x \rightarrow r$  existiert, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow r} \int_a^x f(t) dt$$

existiert. In diesem Fall schreibt man für diesen Grenzwert auch

$$\int_a^r f(t) dt$$

und nennt dies das *uneigentliche Integral* von  $a$  nach  $r$



Die Funktion  $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$ , der blaue Flächeninhalt repräsentiert das (beidseitig) uneigentliche Integral.

Die Existenz dieses uneigentlichen Integrals hängt nicht vom gewählten Intervallpunkt  $a \in I$  ab, wohl aber der Wert des uneigentlichen Integrals. Die inhaltliche Interpretation des uneigentlichen Integrals ist wiederum der Flächeninhalt unterhalb des Funktionsgraphen, aber erstreckt über ein nicht notwendigerweise kompaktes Intervall. Wenn für die Funktion  $f$  eine Stammfunktion  $F$  bekannt ist, so geht es um das Bestimmen des Grenzwertes

$$\lim_{x \rightarrow r} \int_a^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow r} F(x) - F(a).$$

Die Frage, ob eine uneigentliches Integral existiert, ist nur relevant, wenn  $r$  ein uneigentlicher Randpunkt  $+\infty$  oder  $-\infty$  ist oder wenn  $r$  der eigentliche Randpunkt eines an dieser Stelle halboffenen Intervalls ist.

**Lemma 31.4.** Es sei  $I$  ein reelles Intervall,  $a \in I$  und  $r$  sei ein (uneigentlicher) Randpunkt von  $I$ . Es seien

$$f, h: I \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

stetige Funktionen mit

$$f(t) \leq h(t) \text{ für alle } t \in I$$

und es sei vorausgesetzt, dass das uneigentliche Integral

$$\int_a^r h(t) dt$$

existiert. Dann existiert auch das uneigentliche Integral

$$\int_a^r f(t) dt$$

und es gilt

$$\int_a^r f(t) dt \leq \int_a^r h(t) dt.$$

*Beweis.* Wir behandeln den Fall, wo  $r$  die obere Intervallgrenze ist. Für alle  $b \in I$  ist

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b h(t) dt$$

wegen  $f(t) \leq h(t)$  für alle  $t \in I$ . Wegen der Nichtnegativität von  $h$  und von  $f$  wachsen beide Seite bei  $b \rightarrow r$ , und die rechte Seite ist durch das uneigentliche Integral  $\int_a^r h(t) dt$  beschränkt. Nach Satz 7.5 existiert der Grenzwert

$$\lim_{b \rightarrow r} \int_a^b f(t) dt = \int_a^r f(t) dt.$$

□

**Beispiel 31.5.** Sei  $f(t) := t^c$  mit  $c \in \mathbb{R}$ . Wir interessieren uns für die uneigentlichen Integrale zu  $f$  für  $t$  von 0 bis 1. Dabei ist die Funktion bei der Intervallgrenze 0 (bei negativem  $c$ ) nicht definiert, das ist also der kritische Randpunkt. Bei  $c = -1$  ist  $\ln t$  eine Stammfunktion von  $1/t$ . Daher ist

$$\int_x^1 \frac{1}{t} dt = -\ln x,$$

und der Grenzwert für  $x \rightarrow 0$  existiert nicht. Das uneigentliche Integral existiert also nicht.

Sei nun  $c < -1$ . Dann ist  $\frac{1}{c+1}t^{c+1}$  eine Stammfunktion zu  $t^c$  und daher ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \int_x^1 t^c dt \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{c+1} t^{c+1} \Big|_x^1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{c+1} - \frac{x^{c+1}}{c+1} \right).$$

Da es sich rechts um eine Potenz von  $x$  mit einem negativen Exponenten handelt, ist  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{c+1} = \infty$  nach der inversen Version von Aufgabe 17.7.

Das uneigentliche Integral existiert also nicht. Dies folgt übrigens auch aus Lemma 31.4, da ja  $t^{-1} \leq t^c$  für  $c < -1$  und  $0 < t \leq 1$  gilt.

Sei nun  $c > -1$ . Dann ist  $\frac{1}{c+1}t^{c+1}$  eine Stammfunktion zu  $t^c$  und daher ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \int_x^1 t^c dt \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{c+1} t^{c+1} \Big|_x^1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{c+1} - \frac{x^{c+1}}{c+1} \right).$$

Da es sich um eine Potenz von  $x$  mit einem positiven Exponenten handelt, ist  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{c+1} = 0$  (nach Aufgabe 17.7). Das uneigentliche Integral existiert also und besitzt den Wert  $\frac{1}{c+1}$ .

**Beispiel 31.6.** Sei  $f(t) := t^c$  mit  $c \in \mathbb{R}$ . Wir interessieren uns für das uneigentliche Integral zu  $f$  für  $t$  von 1 bis  $\infty$ . Der kritische (uneigentliche) Randpunkt ist also  $+\infty$ . Bei  $c = -1$  ist  $\ln t$  eine Stammfunktion von  $1/t$ . Daher ist

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x,$$

und der Grenzwert für  $x \rightarrow +\infty$  existiert nicht. Das uneigentliche Integral existiert also nicht.

Sei nun  $c < -1$ . Dann ist  $\frac{1}{c+1}t^{c+1}$  eine Stammfunktion zu  $t^c$  und daher ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \int_1^x t^c dt \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{c+1} t^{c+1} \Big|_1^x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^{c+1}}{c+1} - \frac{1}{c+1} \right).$$

Da es sich um eine Potenz von  $x$  mit einem negativen Exponenten handelt, ist  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{c+1} = 0$ . Das uneigentliche Integral existiert also und besitzt den Wert  $-\frac{1}{c+1}$ .

Bei  $c > -1$  ist  $t^c \geq t^{-1}$  für  $t \geq 1$  und daher kann nach Lemma 31.4 das uneigentliche Integral nicht existieren.

**Beispiel 31.7.** Wir wollen das uneigentliche Integral  $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$  berechnen. Nach Lemma 27.8 ist

$$\int_0^u \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \int_{\operatorname{arsinh} 0}^{\operatorname{arsinh} u} \frac{1}{\cosh^2 s} ds.$$

Die Stammfunktion von  $\frac{1}{\cosh^2 s}$  ist  $\frac{\sinh s}{\cosh s}$ . Die untere Intervallgrenze ergibt den Wert 0, für die obere Intervallgrenze ergibt sich

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\sinh s}{\cosh s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}} = 1.$$

Daher hat das uneigentliche Integral den Wert 1.

**Definition 31.8.** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall mit den beiden (uneigentlichen) Randpunkten  $r$  und  $s$  von  $I$ . Es sei eine stetige Funktion

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}$$

gegeben. Man sagt, dass das (beidseitig) *uneigentliche Integral*

$$\int_r^s f(t) dt$$

existiert, wenn für ein  $a \in I$  die beiden einseitig uneigentlichen Integrale

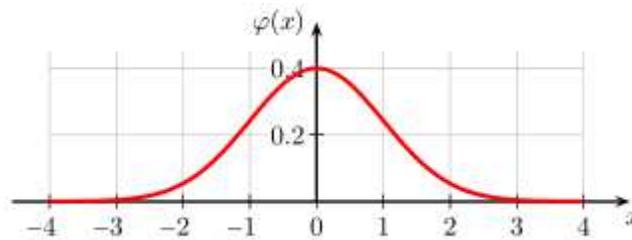
$$\int_r^a f(t) dt \text{ und } \int_a^s f(t) dt$$

existieren. In diesem Fall setzt man

$$\int_r^s f(t) dt := \int_r^a f(t) dt + \int_a^s f(t) dt$$

und nennt dies das *uneigentliche Integral* zu  $f$  von  $r$  nach  $s$ .

Die Existenz des beidseitig uneigentlichen Integrals hängt nicht von der Wahl des Punktes  $a \in I$  ab. Darüber hinaus hängt der Wert dieses Integrals, falls es existiert, ebenso wenig von dem gewählten Punkt ab.



Die Funktion  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$  ist die Dichtefunktion der Gaußschen Normalverteilung. Der Flächeninhalt unterhalb der Kurve ist 1.

**Beispiel 31.9.** Die Funktion  $e^{-t^2}$  ist nicht elementar integrierbar, d.h., man kann keine geschlossene Stammfunktion mit rationalen Funktionen, Exponentialfunktion, trigonometrischen Funktionen und ihren Umkehrfunktionen angeben. Es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi},$$

was wir hier ohne Beweis mitteilen, siehe Lemma 74.6 (Analysis (Osnabrück 2014-2016)). Durch eine einfache Substitution ergibt sich daraus

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1.$$

Dieses Integral nennt man *Fehlerintegral*; es spielt in der Stochastik eine wichtige Rolle.

## 31.2. Vergleichskriterien mit Reihen.

**Lemma 31.10.** *Es sei  $I = [1, \infty]$  ein rechtsseitig unbeschränktes Intervall und sei*

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige fallende Funktion mit  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \in I$ . Dann existiert das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} f(t) dt$$

genau dann, wenn die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

konvergiert.

*Beweis.* Wenn das uneigentliche Integral existiert, so betrachten wir die Abschätzung

$$\sum_{n=2}^k f(n) \leq \int_1^k f(t) dt,$$

die darauf beruht, dass die linke Seite das Treppenintegral zu einer unteren Treppenfunktion für  $f$  auf  $[1, k]$  ist. Da die rechte Seite beschränkt ist, gilt dies auch für die linke Seite, so dass wegen  $f(n) \geq 0$  die Reihe konvergiert. Ist umgekehrt die Reihe konvergent, so betrachten wir die Abschätzung

$$\int_1^k f(t) dt \leq \sum_{n=1}^{k-1} f(n),$$

die gilt, da die rechte Seite das Treppenintegral zu einer oberen Treppenfunktion ist. Wegen  $f(t) \geq 0$  ist die Integralfunktion  $x \mapsto \int_1^x f(t) dt$  wachsend und beschränkt, da die rechte Seite wegen der Konvergenz der Reihe beschränkt ist. Daher besitzt die Integralfunktion für  $x \mapsto \infty$  einen Grenzwert und das uneigentliche Integral existiert.  $\square$

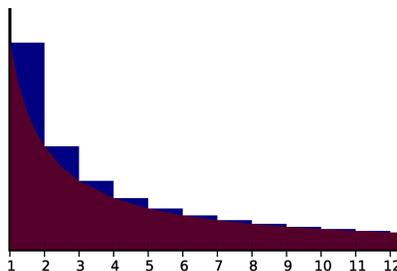
**Beispiel 31.11.** Die Funktion

$$f: [1, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \frac{1}{t},$$

ist streng fallend. Daher ist die Funktion  $g$ , die für  $x$  mit  $k \leq x < k+1$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) durch  $\frac{1}{k}$  definiert ist, eine „Majorante“ für  $f$ , also  $g(t) \geq f(t)$ . Auf jedem Intervall  $[1, n]$  liefert  $g$  eine obere Treppenfunktion zu  $f$ . Ebenso liefert die durch  $\frac{1}{k+1}$  bei  $k \leq x < k+1$  definierte Funktion  $h$  eine untere Treppenfunktion für  $f$ . Daher gelten die Abschätzungen

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \geq \int_1^n \frac{1}{t} dt \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}.$$

Das Integral in der Mitte besitzt den Wert  $\ln n$ . Daraus ergibt sich mit Lemma 31.10 ein neuer Beweis, dass die harmonische Reihe divergiert.



Die blaue Fläche stellt die Eulersche Konstante dar, die Darstellung ist überhöht.

Die Differenz zwischen der linken und der rechten Summe ist  $1 - \frac{1}{n}$ . Daher ist die Differenz

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n$$

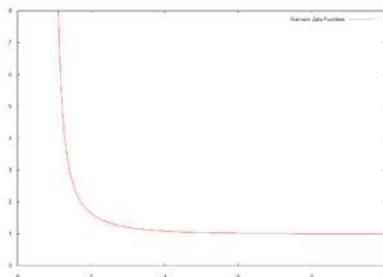
für jedes  $n$  positiv, mit  $n$  wachsend und nach oben beschränkt. Daher existiert für  $n \rightarrow \infty$  der Limes, und dieser Limes ändert sich nicht, wenn man vorne in der Summe bis  $n$  aufsummiert anstatt bis  $n - 1$ . Wir setzen

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

und nennen sie die *eulersche Konstante* (oder *Mascheronische Konstante*). Ihr numerischer Wert ist ungefähr

$$\gamma = 0,5772156649 \dots$$

Es ist ein offenes mathematisches Problem, ob diese Zahl rational ist oder nicht.



Die Riemannsche Zeta-Funktion im Reellen

Nach Beispiel 31.6 existiert für  $c < -1$  das uneigentliche Integral  $\int_1^\infty t^c dt$ , so dass aufgrund von Lemma 31.10 auch die Reihen  $\sum_{n=1}^\infty n^c = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{-c}}$  konvergieren. Daher ist die folgende Funktion wohldefiniert.

**Definition 31.12.** Die *Riemannsche  $\zeta$ -Funktion* ist für  $s \in \mathbb{R}$  mit  $s > 1$  durch

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

definiert.

Diese Funktion lässt sich komplex fortsetzen und spielt eine wichtige Rolle in der Zahlentheorie.

## 1. ARBEITSBLATT

### 31.1. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 31.1.** Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine wachsende Funktion und  $b \in \mathbb{R}$ . Zeige, dass die Folge  $f(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , genau dann gegen  $b$  konvergiert, wenn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$$

gilt, wenn also die Funktion für  $x \rightarrow +\infty$  den Grenzwert  $b$  besitzt.

**Aufgabe 31.2.** Es sei  $[a, +\infty[$  ein rechtsseitig unbeschränktes Intervall und  $f, g: [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  seien Funktionen derart, dass die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  existieren. Zeige, dass folgende Beziehungen gelten.

(1) Die Summe  $f + g$  besitzt einen Grenzwert für  $x \rightarrow +\infty$ , und zwar ist

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x).$$

(2) Das Produkt  $f \cdot g$  besitzt einen Grenzwert für  $x \rightarrow +\infty$ , und zwar ist

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x).$$

(3) Es sei  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in [a, +\infty[$  und  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \neq 0$ . Dann besitzt der Quotient  $f/g$  einen Grenzwert für  $x \rightarrow +\infty$ , und zwar ist

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)}.$$

**Aufgabe 31.3.** Sei  $I$  ein Intervall,  $r$  ein (uneigentlicher) Randpunkt von  $I$  und

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass die Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_a^r f(t) dt$$

nicht vom gewählten Startpunkt  $a \in I$  abhängt.

**Aufgabe 31.4.** Sei  $I = ]r, s[$  ein beschränktes offenes Intervall und

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, die sich auf  $[r, s]$  stetig fortsetzen lässt. Zeige, dass dann das uneigentliche Integral

$$\int_r^s f(t) dt$$

existiert und mit dem bestimmten Integral

$$\int_r^s f(t) dt$$

übereinstimmt.

**Aufgabe 31.5.** Formuliere und beweise Rechenregeln für uneigentliche Integrale (analog zu Lemma 23.15).

**Aufgabe 31.6.** Wir betrachten die Funktion

$$f(t) = \frac{1}{t(t-1)},$$

die auf

$$\mathbb{R} \setminus \{0, 1\} = [-\infty, 0[ \cup ]0, 1[ \cup ]1, +\infty]$$

definiert ist. Entscheide für jedes Teilintervall und jeden (uneigentlichen) Randpunkt, ob das uneigentliche Integral existiert oder nicht.

**Aufgabe 31.7.\***

Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{x^2 - 3x + 5}{x^4 + 2x^3 + 5x + 8} dx$$

existiert.

**Aufgabe 31.8.** Bestimme das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty e^{-t} dt.$$

**Aufgabe 31.9.** Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

existiert und berechne es im Falle der Existenz.

**Aufgabe 31.10.** Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx$$

existiert und berechne es im Falle der Existenz.

**Aufgabe 31.11.\***

a) Sei

$$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine monoton fallende stetige Funktion. Es sei vorausgesetzt, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} f(t) dt$$

existiert. Zeige, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$$

ist.

b) Man zeige durch ein Beispiel, dass die Aussage in a) für eine stetige, nicht monoton fallende Funktion nicht gelten muss.

**Aufgabe 31.12.\***

Es sei

$$f: ]0, 1] \longrightarrow [0, \infty[$$

eine stetige, streng fallende, bijektive Funktion mit der ebenfalls stetigen Umkehrfunktion

$$f^{-1}: [0, \infty[ \longrightarrow ]0, 1].$$

Es sei vorausgesetzt, dass das uneigentliche Integral  $\int_0^1 f(t) dt$  existiert. Zeige, dass dann auch das uneigentliche Integral  $\int_0^{\infty} f^{-1}(y) dy$  existiert und dass der Wert dieser beiden Integrale übereinstimmt.

**Aufgabe 31.13.** Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

existiert.

**Aufgabe 31.14.** Berechne das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{1+t^2})^3} dt.$$

### 31.2. Aufgaben zum Abgeben.

#### Aufgabe 31.15. (2 Punkte)

Berechne die Energie, die nötig wäre, um die Erde, ausgehend von der jetzigen Lage relativ zur Sonne, unendlich weit von der Sonne zu entfernen.

#### Aufgabe 31.16. (4 Punkte)

Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{x^3 - 3x + 5}{x^4 + 2x^3 + 5x + 8} dx$$

existiert.

#### Aufgabe 31.17. (8 Punkte)

Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

existiert.

(Versuche nicht, eine Stammfunktion für den Integranden zu finden.)

#### Aufgabe 31.18. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine unbeschränkte, stetige Funktion

$$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

derart, dass das uneigentliche Integral  $\int_0^{\infty} f(t) dt$  existiert.

#### Aufgabe 31.19. (5 Punkte)

Es sei  $I = [a, b]$  ein beschränktes Intervall und es sei

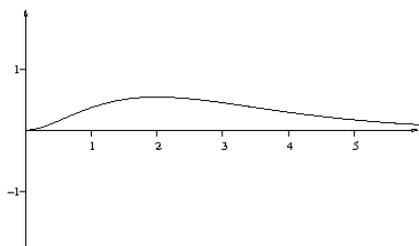
$$f: ]a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine fallende Folge in  $I$  mit dem Grenzwert  $a$  und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine wachsende Folge in  $I$  mit dem Grenzwert  $b$ . Es sei vorausgesetzt, dass das uneigentliche Integral  $\int_a^b f(t) dt$  existiert. Zeige, dass die Folge

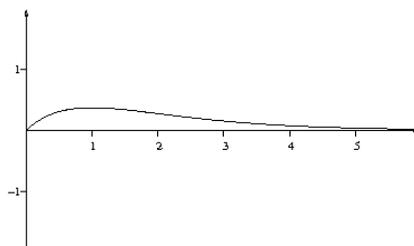
$$w_n = \int_{x_n}^{y_n} f(t) dt$$

gegen das uneigentliche Integral konvergiert.

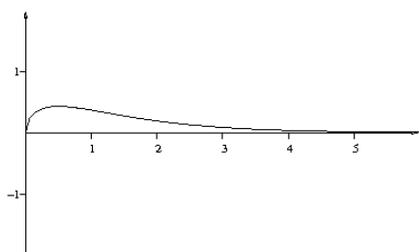
## 32. VORLESUNG - DIE FAKULTÄTSFUNKTION



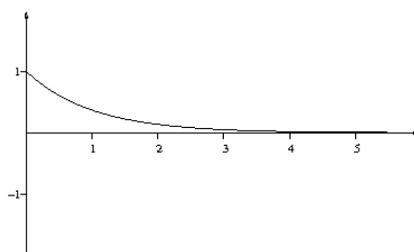
$$t^2 e^{-t}$$



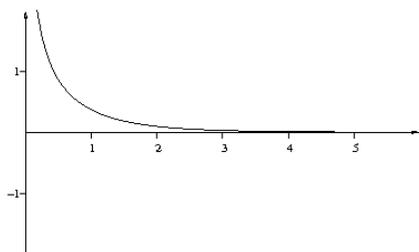
$$t e^{-t}$$



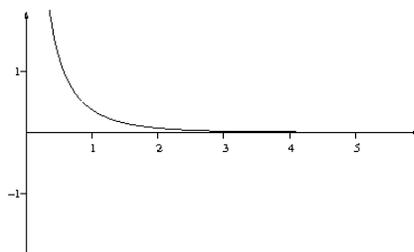
$$t^{\frac{1}{2}} e^{-t}$$



$$e^{-t}$$



$$t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}$$



$$t^{-1} e^{-t}$$

Die Fakultät einer natürlichen Zahl  $n$  ist  $n! = \cdot(n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ . Dabei gilt die rekursive Beziehung  $n! = n((n-1)!)$ . Gibt es eine Möglichkeit, diese für die natürlichen Zahlen definierte Funktion auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  durch eine differenzierbare Funktion  $f$  fortzusetzen? Ist es sogar möglich, dass dabei die Beziehung  $f(x) = x f(x-1)$  für jedes  $x$  gilt? Wir werden mit Hilfe von uneigentlichen Integralen zeigen, dass dies in der Tat möglich ist.

**Beispiel 32.1.** Es sei  $x > -1$ . Wir betrachten die Funktion

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto t^x e^{-t}.$$

Wir behaupten, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt$$

existiert. Für den rechten Rand (also  $\infty$ ) betrachten wir eine natürliche Zahl  $n \geq x$ . Da die Exponentialfunktion schneller wächst als jede Polynomfunktion (siehe Aufgabe 15.19), gibt es ein  $a \in \mathbb{R}_+$  derart, dass  $t^n e^{-\frac{t}{2}} \leq 1$  für alle  $t \geq a$  gilt. Daher ist

$$\begin{aligned} \int_a^b t^x e^{-t} dt &\leq \int_a^b t^n e^{-t} dt \\ &= \int_a^b t^n e^{-\frac{t}{2}} e^{-\frac{t}{2}} dt \\ &\leq \int_a^b e^{-\frac{t}{2}} dt \\ &= 2 \left( e^{-\frac{a}{2}} - e^{-\frac{b}{2}} \right) \\ &\leq 2e^{-\frac{a}{2}}. \end{aligned}$$

Für  $b \rightarrow \infty$  wächst das linke Integral und ist durch  $2e^{-\frac{a}{2}}$  beschränkt, so dass der Grenzwert existiert. Für das Verhalten am linken Rand (das nur bei  $-1 < x \leq 0$  problematisch ist) müssen wir wegen  $e^{-t} \leq 1$  nach Lemma 31.4 nur  $\int_0^1 t^x dt$  betrachten. Eine Stammfunktion davon ist  $\frac{1}{x+1} t^{x+1}$ , deren Exponent positiv ist, so dass der Limes für  $t \rightarrow 0$  existiert.

Das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty t^x e^{-t} dt$$

existiert also für  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x > -1$ . Dies ist der Ausgangspunkt für die Definition der Fakultätsfunktion.

**Definition 32.2.** Für  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x > -1$ , heißt die Funktion

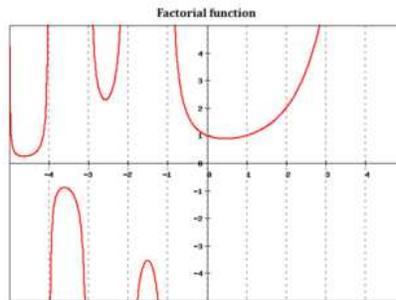
$$x \mapsto \text{Fak}(x) := \int_0^\infty t^x e^{-t} dt$$

die *Fakultätsfunktion*.

Die für  $x > 0$  durch

$$\Gamma(x) := \text{Fak}(x-1) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

definierte Funktion heißt *Gammafunktion*, mit der häufiger gearbeitet wird. Mit der Fakultätsfunktion werden aber die Formeln etwas schöner und insbesondere wird der Zusammenhang zur Fakultät, der in der folgenden Aussage aufgezeigt wird, deutlicher.



**Satz 32.3.** Die Fakultätsfunktion besitzt die folgenden Eigenschaften.

- (1) Es ist  $\text{Fak}(x) = x \cdot \text{Fak}(x - 1)$  für  $x > 0$ .
- (2) Es ist  $\text{Fak}(0) = 1$ .
- (3) Es ist  $\text{Fak}(n) = n!$  für natürliche Zahlen  $n \in \mathbb{N}$ .
- (4) Es ist  $\text{Fak}\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .

*Beweis.* (1) Mittels partieller Integration ergibt sich (für reelle Zahlen  $b \geq a > 0$  bei fixiertem  $x > 0$ )

$$\begin{aligned} \int_a^b t^x e^{-t} dt &= -t^x e^{-t} \Big|_a^b + \int_a^b x t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= -b^x e^{-b} + a^x e^{-a} + x \cdot \int_a^b t^{x-1} e^{-t} dt. \end{aligned}$$

Für  $b \rightarrow \infty$  geht  $b^x e^{-b} \rightarrow 0$  und für  $a \rightarrow 0$  geht  $a^x e^{-a} \rightarrow 0$  (da  $x$  positiv ist). Wendet man auf beide Seiten diese Grenzwertprozesse an, so erhält man  $\text{Fak}(x) = x \text{Fak}(x - 1)$ . (2). Es ist

$$\text{Fak}(0) = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^\infty = 1.$$

(3) folgt aus (1) und (2) durch Induktion. (4). Es ist

$$\text{Fak}\left(-\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2 \int_0^\infty e^{-s^2} ds = \int_{-\infty}^\infty e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}.$$

Dies ergibt sich mit der Substitution  $t = s^2$  und dem sogenannten Fehlerintegral.  $\square$

Die Fakultätsfunktion ist auch stetig und differenzierbar, was wir aber nicht beweisen werden.

### 32.1. Euklidische Vektorräume.

Wir beginnen nun mit der höherdimensionalen Analysis. Dazu müssen wir zunächst die topologischen Grundbegriffe (Abstand, Folgen, Stetigkeit, Grenzwerte) auf den  $\mathbb{R}^n$  erweitern. Wir beginnen mit Vektorräumen mit einem Skalarprodukt.

Im Anschauungsraum kann man nicht nur Vektoren addieren und skalieren, sondern ein Vektor hat auch eine Länge, und die Lagebeziehung von zwei Vektoren zueinander wird durch den Winkel zwischen ihnen ausgedrückt. Länge und Winkel werden beide durch den Begriff des *Skalarprodukts* präzisiert. Dafür muss ein reeller Vektorraum oder ein komplexer Vektorräume vorliegen.

**Definition 32.4.** Sei  $V$  ein reeller Vektorraum. Ein *Skalarprodukt* auf  $V$  ist eine Abbildung

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, (v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

mit folgenden Eigenschaften:

(1) Es ist

$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle$$

für alle  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $x_1, x_2 \in V$  und ebenso in der zweiten Komponente.

(2) Es ist

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$$

für alle  $v, w \in V$ .

(3) Es ist  $\langle v, v \rangle \geq 0$  für alle  $v \in V$  und  $\langle v, v \rangle = 0$  genau dann, wenn  $v = 0$  ist.

Die dabei auftretenden Eigenschaften heißen *Bilinearität*, *Symmetrie* und *positive Definitheit*.

**Beispiel 32.5.** Auf dem  $\mathbb{R}^n$  ist die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (v, w) = ((v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_n)) \longmapsto \sum_{i=1}^n v_i w_i,$$

ein Skalarprodukt, das man das *Standardskalarprodukt* nennt. Einfache Rechnungen zeigen, dass dies in der Tat ein Skalarprodukt ist.

Beispielsweise ist im  $\mathbb{R}^3$  mit dem Standardskalarprodukt

$$\left\langle \left( \begin{array}{c} 3 \\ -5 \\ 2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} -1 \\ 4 \\ 6 \end{array} \right) \right\rangle = 3 \cdot (-1) - 5 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = -11.$$

**Definition 32.6.** Ein reeller, endlichdimensionaler Vektorraum, der mit einem Skalarprodukt versehen ist, heißt *euklidischer Vektorraum*.

Zu einem euklidischen Vektorraum  $V$  ist jeder Untervektorraum  $U \subseteq V$  selbst wieder ein euklidischer Vektorraum, da man das Skalarprodukt auf  $U$  einschränken kann und dabei die definierenden Eigenschaften erhalten bleiben.

Im komplexen Fall sieht die Definition etwas anders aus. Es liegt keine Bilinearität und keine Symmetrie im strengen Sinne vor, sondern nur bis auf

komplexe Konjugation. Diese Variante ist nötig, um die positive Definitheit zu sichern, auf der der Abstands begriff beruht.

**Definition 32.7.** Es sei  $V$  ein komplexer Vektorraum. Ein *Skalarprodukt* auf  $V$  ist eine Abbildung

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{C}, (v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

mit folgenden Eigenschaften:

(1) Es ist

$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle$$

für alle  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, x_1, x_2, y \in V$  und

$$\langle x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \rangle = \overline{\lambda_1} \langle x, y_1 \rangle + \overline{\lambda_2} \langle x, y_2 \rangle$$

für alle  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, x, y_1, y_2 \in V$ .

(2) Es ist

$$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$$

für alle  $v, w \in V$ .

(3) Es ist  $\langle v, v \rangle \geq 0$  für alle  $v \in V$  und  $\langle v, v \rangle = 0$  genau dann, wenn  $v = 0$  ist.

**Definition 32.8.** Das auf dem  $\mathbb{C}^n$  durch

$$\langle u, v \rangle := \sum_{i=1}^n u_i \overline{v_i}$$

gegebene Skalarprodukt heißt (*komplexes*) *Standardskalarprodukt*.

Wir werden die beiden Fälle parallel behandeln. Wenn man zu einem komplexen Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  den zugrunde liegenden reellen Vektorraum betrachten, so ist der Realteil des komplexen Skalarprodukts ein reelles Skalarprodukt, siehe Aufgabe 32.7. Daher kann man sich bei Abstandsfragen auf den reellen Fall konzentrieren.

**Beispiel 32.9.** Es sei  $[a, b]$  ein abgeschlossenes reelles Intervall mit  $a < b$  und sei

$$V = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig}\},$$

versehen mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation. Wir setzen

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$$

und erhalten damit ein Skalarprodukt. Die Additivität folgt beispielsweise aus

$$\begin{aligned} \langle f_1 + f_2, g \rangle &= \int_a^b (f_1(t) + f_2(t)) \overline{g(t)} dt \\ &= \int_a^b f_1(t) \overline{g(t)} dt + \int_a^b f_2(t) \overline{g(t)} dt \\ &= \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle. \end{aligned}$$

Die positive Definitheit folgt so: Wenn  $f$  nicht die Nullfunktion ist, so sei  $s \in [a, b]$  ein Punkt mit  $f(s) \neq 0$ . Dann ist  $|f(s)| > 0$  und wegen der Stetigkeit von  $f$  gibt es dann auch eine Umgebung  $[s - \epsilon, s + \epsilon] \cap [a, b]$  der Länge  $\geq \epsilon$ , auf der überall

$$|f(t)| \geq c > 0$$

ist. Somit ist

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b |f(t)|^2 dt \geq \int_{\max(a, s-\epsilon)}^{\min(b, s+\epsilon)} |f(t)|^2 dt \geq \epsilon c^2 > 0$$

positiv.

### 32.2. Norm und Abstand.

Mit einem Skalarprodukt kann man die Länge eines Vektors und damit auch den Abstand zwischen zwei Vektoren erklären.

**Definition 32.10.** Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$  mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Dann nennt man zu einem Vektor  $v \in V$  die reelle Zahl

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

die *Norm* von  $v$ .

**Satz 32.11.** *Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$  mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und der zugehörigen Norm  $\|-\|$ . Dann gilt die Cauchy-Schwarzsche Abschätzung, nämlich*

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

für alle  $v, w \in V$ .

*Beweis.* Bei  $w = 0$  ist die Aussage richtig. Sei also  $w \neq 0$  und damit auch  $\|w\| \neq 0$ . Damit hat man die Abschätzungen

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle v - \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} w, v - \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} w \right\rangle \\ &= \langle v, v \rangle - \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} \langle w, v \rangle - \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} \langle v, w \rangle + \frac{\langle v, w \rangle \overline{\langle v, w \rangle}}{\|w\|^4} \langle w, w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle - \frac{\langle v, w \rangle \overline{\langle v, w \rangle}}{\|w\|^2} - \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} \langle v, w \rangle + \frac{\langle v, w \rangle \overline{\langle v, w \rangle}}{\|w\|^2} \\ &= \langle v, v \rangle - \frac{\langle v, w \rangle \overline{\langle v, w \rangle}}{\|w\|^2} \\ &= \langle v, v \rangle - \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|w\|^2}. \end{aligned}$$

Multiplikation mit  $\|w\|^2$  und Wurzelziehen ergibt das Resultat.  $\square$

**Bemerkung 32.12.** Für zwei von 0 verschiedene Vektoren  $v$  und  $w$  in einem euklidischen Vektorraum  $V$  folgt aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz, dass

$$-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1$$

ist. Damit kann man mit Hilfe der trigonometrischen Funktion *Kosinus* (als bijektive Abbildung  $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ ) bzw. der Umkehrfunktion den Winkel zwischen den beiden Vektoren definieren, nämlich durch

$$\angle(v, w) := \arccos \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

Der Winkel ist also eine reelle Zahl zwischen 0 und  $\pi$ . Die obige Gleichung kann man auch als

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\angle(v, w))$$

schreiben, was die Möglichkeit eröffnet, das Skalarprodukt in dieser Weise zu definieren. Allerdings muss man dann für den Winkel eine unabhängige Definition finden. Dieser Zugang ist etwas intuitiver, hat aber rechnerisch und beweistechnisch viele Nachteile.

**Lemma 32.13.** *Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$  mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Dann gelten für die zugehörige Norm folgende Eigenschaften.*

- (1) *Es ist  $\|v\| \geq 0$ .*
- (2) *Es ist  $\|v\| = 0$  genau dann, wenn  $v = 0$  ist.*
- (3) *Für  $\lambda \in \mathbb{K}$  und  $v \in V$  gilt*

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|.$$

- (4) *Für  $v, w \in V$  gilt*

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

*Beweis.* Die ersten beiden Eigenschaften folgen direkt aus der Definition des Skalarprodukts. Die Multiplikativität folgt aus

$$\|\lambda v\|^2 = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda \langle v, \lambda v \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle = |\lambda|^2 \|v\|^2.$$

Zum Beweis der Dreiecksungleichung schreiben wir

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + \langle v, w \rangle + \overline{\langle v, w \rangle} \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\langle v, w \rangle) \\ &\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 |\langle v, w \rangle| \end{aligned}$$

Aufgrund von Satz 32.11 ist dies  $\leq (\|v\| + \|w\|)^2$ . Diese Abschätzung überträgt sich auf die Quadratwurzeln.  $\square$

Die folgende Aussage heißt *Polarisationsformel*.

**Lemma 32.14.** *Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und der zugehörigen Norm  $\|-\|$ . Dann gilt bei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  die Beziehung*

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}(\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$$

und bei  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  die Beziehung

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 + i\|v + iw\|^2 - i\|v - iw\|^2).$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 32.9. □

**Definition 32.15.** Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$  mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Zu Vektoren  $v, w \in V$  nennt man

$$d(v, w) := \|v - w\|$$

den *Abstand* zwischen  $v$  und  $w$ .

**Lemma 32.16.** *Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$  mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Dann besitzt der zugehörige Abstand die folgenden Eigenschaften (dabei sind  $u, v, w \in V$ ).*

- (1) *Es ist  $d(v, w) \geq 0$ .*
- (2) *Es ist  $d(v, w) = 0$  genau dann, wenn  $v = w$ .*
- (3) *Es ist  $d(v, w) = d(w, v)$ .*
- (4) *Es ist*

$$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w).$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 32.18. □

Damit ist ein euklidischer Raum insbesondere ein *metrischer Raum*, womit wir uns in den nächsten Vorlesungen beschäftigen werden.

## 32. ARBEITSBLATT

### 32.1. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 32.1.** Sei  $x \in \mathbb{R}$  und betrachte die Funktion

$$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto f(t) = t^x e^{-t}.$$

Bestimme die Extremwerte dieser Funktion.

**Aufgabe 32.2.** Zeige, dass für die Fakultätsfunktion für  $k \in \mathbb{N}$  die Beziehung

$$\text{Fak} \left( \frac{2k-1}{2} \right) = \frac{\prod_{i=1}^k (2i-1)}{2^k} \cdot \sqrt{\pi}$$

gilt.

**Aufgabe 32.3.\***

a) Zeige, dass für  $x \geq 1$  die Abschätzung

$$\int_0^1 t^x e^{-t} dt \leq 1$$

gilt.

b) Zeige, dass die Funktion  $H(x)$  mit

$$H(x) = \int_1^\infty t^x e^{-t} dt$$

für  $x \geq 1$  monoton wachsend ist.

c) Zeige, dass  $10! \geq e^{11} + 1$  gilt.

d) Zeige, dass für die Fakultätsfunktion für  $x \geq 10$  die Abschätzung

$$\text{Fak}(x) \geq e^x$$

gilt.

**Aufgabe 32.4.** Zeige, dass das Standardskalarprodukt auf dem  $\mathbb{R}^n$  in der Tat ein Skalarprodukt ist.

**Aufgabe 32.5.** Es sei  $V$  ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und sei  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum. Zeige, dass die Einschränkung des Skalarproduktes auf  $U$  ebenfalls ein Skalarprodukt ist.

**Aufgabe 32.6.** Es seien  $(V_1, \langle -, - \rangle_1)$  und  $(V_2, \langle -, - \rangle_2)$  zwei euklidische Vektorräume. Zeige, dass durch

$$\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle := \langle v_1, w_1 \rangle_1 + \langle v_2, w_2 \rangle_2$$

ein Skalarprodukt auf dem Produktraum  $V_1 \times V_2$  definiert wird.

**Aufgabe 32.7.\***

Es sei  $V$  ein komplexer Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Zeige, dass der Realteil dieses Skalarproduktes ein Skalarprodukt auf dem zugrunde liegenden reellen Vektorraum ist.

**Aufgabe 32.8.\***

Was bedeutet die Polarisationsformel für ein reelles Skalarprodukt für die Multiplikation von reellen Zahlen?

**Aufgabe 32.9.** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und der zugehörigen Norm  $\|-\|$ .

a) Zeige, dass bei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  die Beziehung

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}(\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$$

gilt.

b) Zeige, dass bei  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  die Beziehung

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 + i\|v + iw\|^2 - i\|v - iw\|^2).$$

**Aufgabe 32.10.** Es sei  $V$  ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Bestätige

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4 \langle x, y \rangle.$$

**Aufgabe 32.11.** Es seien

$$f, g: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit  $f(x) = -x^2 + 1$  und  $g(x) = x^2 + x + 3$ . Berechne  $\langle f, g \rangle$  im Sinne von Beispiel 32.9.

**Aufgabe 32.12.** Es sei  $[a, b]$  ein abgeschlossenes reelles Intervall mit  $a < b$  und sei  $V = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ . Zu  $n \in \mathbb{N}_+$  und  $f, g \in V$  sei

$$\langle f, g \rangle_n := \sum_{i=0}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) g\left(a + i \frac{b-a}{n}\right).$$

Welche Eigenschaften eines Skalarproduktes erfüllt  $\langle -, - \rangle_n$ , welche nicht? Welche Beziehung besteht zwischen  $\langle -, - \rangle_n$  und dem Skalarprodukt aus Beispiel 32.9?

**Aufgabe 32.13.** Sei  $V$  ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Zeige, dass in der Abschätzung

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

von Cauchy-Schwarz genau dann die Gleichheit gilt, wenn  $v$  und  $w$  linear abhängig sind.

Zwei Vektoren  $v, w \in V$  heißen *orthogonal* (oder *senkrecht*) zueinander, wenn  $\langle v, w \rangle = 0$  ist. Nach Bemerkung 32.12 beträgt dann der Winkel zwischen ihnen  $\pi/2$ .

**Aufgabe 32.14.** Bestimme, welche der folgenden Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  zueinander orthogonal bezüglich des Standardskalarproduktes sind.

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 32.15.** Es sei  $V$  ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Beweise den *Satz des Pythagoras*: Für zwei Vektoren  $v, w \in V$ , die senkrecht aufeinander stehen, gilt die Beziehung

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

**Aufgabe 32.16.** Welche elementargeometrischen Beweise für den Satz des Pythagoras kennen Sie?

Ein Skalarprodukt ermöglicht es, von Orthonormalbasen zu sprechen.

Sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum. Eine Basis  $v_1, \dots, v_n$  von  $V$  heißt *Orthonormalbasis*, wenn

$$\langle v_i, v_i \rangle = 1 \text{ für alle } i \text{ und } \langle v_i, v_j \rangle = 0 \text{ für } i \neq j$$

gilt.

**Aufgabe 32.17.** Es sei  $V$  ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und sei  $u_i, i \in I$ , eine Orthonormalbasis von  $V$ . Zeige, dass für Vektoren  $v = \sum_{i \in I} a_i u_i$  und  $w = \sum_{i \in I} b_i u_i$  die Gleichheit

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i \in I} a_i b_i$$

gilt.

**Aufgabe 32.18.** Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$  mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Zeige, dass der zugehörige Abstand die folgenden Eigenschaften besitzt (dabei sind  $u, v, w \in V$ ).

- (1) Es ist  $d(v, w) \geq 0$ .
- (2) Es ist  $d(v, w) = 0$  genau dann, wenn  $v = w$ .
- (3) Es ist  $d(v, w) = d(w, v)$ .
- (4) Es ist

$$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w).$$

**Aufgabe 32.19.** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und seien  $u, v \in V$  Vektoren. Zeige, dass  $u$  genau dann senkrecht auf  $v$  steht, wenn die Abstandsgleichung

$$d(u, v) = d(u, -v)$$

gilt.

**Aufgabe 32.20.** Zeige, dass die Norm zum komplexen Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{C}$  einfach der komplexe Betrag ist.

**Aufgabe 32.21.** Es sei  $V$  ein komplexer Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$ . Zeige, dass die Norm zu diesem Skalarprodukt mit der Norm übereinstimmt, die man erhält, wenn man  $V$  als reellen Vektorraum mit dem zugehörigen reellen Skalarprodukt auffasst.

**Aufgabe 32.22.\***

Zeige, dass die Funktionen

$$f_m: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit

$$f_m(x) := e^{2\pi i m x}$$

zu  $m \in \mathbb{Z}$  im Raum der stetigen Funktionen von  $[0, 1]$  nach  $\mathbb{C}$  ein Orthonormalsystem bezüglich des durch

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f \bar{g} dx$$

gegebenen Skalarproduktes bilden. Verwende dabei Grundtatsachen über die komplexe Exponentialfunktion.

## 32.2. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 32.23.** (2 Punkte)

Zeige, dass für die Fakultätsfunktion die Beziehung

$$\text{Fak}(x) = \int_0^1 (-\ln t)^x dt$$

gilt.

**Aufgabe 32.24.** (3 Punkte)

Es sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  mit einem Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  und der zugehörigen Norm  $\|-\|$ . Zeige, dass die sogenannte *Parallelogrammgleichung*

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$$

gilt.

**Aufgabe 32.25.** (3 Punkte)

Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum und sei  $u_1, \dots, u_n \in V$  eine Orthonormalbasis von  $V$ . Zeige, dass für jeden Vektor  $v \in V$  die Beziehung

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i$$

gilt.

**Aufgabe 32.26.** (4 Punkte)

Es seien

$$f, g: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit  $f(x) = 2x^3 - x + 3$  und  $g(x) = -5x^2 + 4x - 7$ . Berechne

$$\langle f, g \rangle, \|f\|, \|g\|$$

im Sinne von Beispiel 32.9.

## 33. VORLESUNG - METRISCHE RÄUME

33.1. **Metrische Räume.**

Euklidische Räume besitzen nach Definition ein Skalarprodukt. Darauf aufbauend kann man einfach die Norm eines Vektors und den Abstand zwischen zwei Vektoren definieren. Die wichtigsten Eigenschaften dieses euklidischen Abstandes werden im Begriff der Metrik bzw. des metrischen Raumes axiomatisiert.

**Definition 33.1.** Es sei  $M$  eine Menge. Eine Abbildung  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Metrik* (oder *Distanzfunktion*), wenn für alle  $x, y, z \in M$  die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (1)  $d(x, y) = 0$  genau dann, wenn  $x = y$  ist (Definitheit),
- (2)  $d(x, y) = d(y, x)$  (Symmetrie), und
- (3)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (Dreiecksungleichung).

Ein *metrischer Raum* ist ein Paar  $(M, d)$ , wobei  $M$  eine Menge und  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Metrik ist.

Man kann leicht aus den Bedingungen folgern, dass eine Metrik nur nichtnegative Werte annimmt. Der Wert  $d(x, y)$  gibt den Abstand der Punkte  $x$  und  $y$  bezüglich  $d$  an. Oft wird die Metrik nicht in der Notation erwähnt, obwohl es Situationen gibt, in denen verschiedene Metriken auf ein- und derselben Menge betrachtet werden.

**Beispiel 33.2.** Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum und

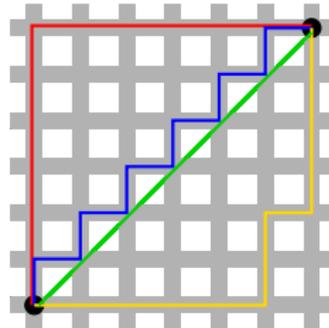
$$d(v, w) := \|v - w\| := \sqrt{\langle v - w, v - w \rangle}$$

der zugehörige Abstand. Dieser besitzt nach Lemma 32.15 die Eigenschaften einer Metrik. Insbesondere ist im  $\mathbb{R}^n$  der durch

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

gegebene *euklidische Abstand* eine Metrik.

Wenn wir nichts anderes sagen, so verstehen wir den  $\mathbb{R}^n$  und den  $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$  stets mit dem euklidischen Abstand. Insbesondere sind die reellen Zahlen und die komplexen Zahlen  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  mit der durch den Betrag definierten Metrik metrische Räume. Als gemeinsame Bezeichnung für  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  werden wir wieder  $\mathbb{K}$  verwenden.



Die Summenmetrik heißt auch *Taxi-Metrik*. Die grüne Linie repräsentiert den euklidischen Abstand, die anderen repräsentieren den Summenabstand.

**Beispiel 33.3.** Auf dem  $\mathbb{R}^n$  ist

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

eine Metrik, die man die *Summenmetrik* nennt.

**Beispiel 33.4.** Auf dem  $\mathbb{R}^n$  ist

$$d(x, y) = \max(|x_i - y_i|, i = 1, \dots, n)$$

eine Metrik, die man die *Maximumsmetrik* nennt.

**Beispiel 33.5.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge. Dann ist  $T$  ebenfalls ein metrischer Raum, wenn man

$$d_T(x, y) := d(x, y)$$

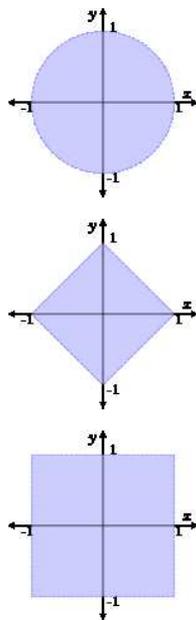
für alle  $x, y \in T$  setzt. Diese Metrik heißt die *induzierte Metrik*.

**Beispiel 33.6.** Zu einer beliebigen Menge  $M$  kann man durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ 1, & \text{falls } x \neq y, \end{cases}$$

eine Metrik definieren, die die *diskrete Metrik* heißt.

### 33.2. Teilmengen in einem metrischen Raum.



Die Gestalt der Kugelumgebungen hängt von der Metrik ab.

**Definition 33.7.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum,  $x \in M$  und  $\epsilon > 0$  eine positive reelle Zahl. Es ist

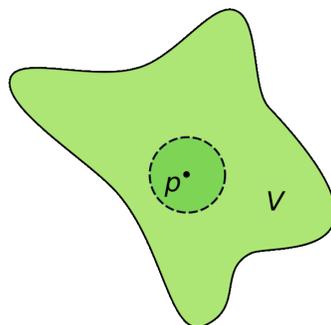
$$U(x, \epsilon) = \{y \in M \mid d(x, y) < \epsilon\}$$

die *offene* und

$$B(x, \epsilon) = \{y \in M \mid d(x, y) \leq \epsilon\}$$

die *abgeschlossene*  $\epsilon$ -Kugel um  $x$ .

Natürlich müssen Kugeln nicht unbedingt kugelförmig aussehen, aber sie tun es in der euklidischen Norm. Für  $x \in \mathbb{R}$  ist  $U(x, \epsilon)$  einfach das beidseitig offene Intervall  $]x - \epsilon, x + \epsilon[$  und  $B(x, \epsilon)$  ist einfach das beidseitig abgeschlossene Intervall  $[x - \epsilon, x + \epsilon]$ .



Eine Teilmenge ist offen, wenn jeder Punkt darin gleich mit einer vollen Kugelumgebung drin liegt. Bei einer solchen Menge ist es entscheidend, ob die *Randpunkte* dazu gehören oder nicht.

**Definition 33.8.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Eine Teilmenge  $U \subseteq M$  heißt *offen* (in  $(M, d)$ ), wenn für jedes  $x \in U$  ein  $\epsilon > 0$  mit

$$U(x, \epsilon) \subseteq U$$

existiert.

**Definition 33.9.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Eine Teilmenge  $A \subseteq M$  heißt *abgeschlossen*, wenn das Komplement  $M \setminus A$  offen ist.

Achtung! Abgeschlossen ist nicht das „Gegenteil“ von offen. Die „allermeisten“ Teilmengen eines metrischen Raumes sind weder offen noch abgeschlossen, es gibt aber auch Teilmengen, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind, z.B. die leere Teilmenge und die Gesamtmenge.

**Lemma 33.10.** *Es sei  $M$  ein metrischer Raum und  $x \in M$  ein Punkt. Dann sind die offenen Kugeln  $U(x, \epsilon)$  offen und die abgeschlossenen Kugeln  $B(x, \epsilon)$  abgeschlossen.*

*Beweis.* Sei  $y \in U(x, \epsilon)$ , d.h. es ist  $d(x, y) < \epsilon$ . Wir setzen  $a = \epsilon - d(x, y) > 0$  und behaupten, dass  $U(y, a) \subseteq U(x, \epsilon)$  ist. Dazu sei  $z \in U(y, a)$ . Dann ist aufgrund der Dreiecksungleichung

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + a = \epsilon$$

und somit  $z \in U(x, \epsilon)$ . Für die zweite Behauptung siehe Aufgabe 33.12.  $\square$

**Lemma 33.11.** *Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

- (1) Die leere Menge  $\emptyset$  und die Gesamtmenge  $M$  sind offen.
- (2) Es sei  $I$  eine beliebige Indexmenge und seien  $U_i, i \in I$ , offene Mengen. Dann ist auch die Vereinigung

$$\bigcup_{i \in I} U_i$$

offen.

- (3) Es sei  $I$  eine endliche Indexmenge und seien  $U_i, i \in I$ , offene Mengen. Dann ist auch der Durchschnitt

$$\bigcap_{i \in I} U_i$$

offen.

*Beweis.* Siehe Aufgabe 33.10. □

**Definition 33.12.** Eine Teilmenge  $T \subseteq M$  eines metrischen Raumes  $M$  heißt *beschränkt*, wenn es eine reelle Zahl  $b$  mit

$$d(x, y) \leq b \text{ für alle } x, y \in T$$

gibt.

### 33.3. Folgen in metrischen Räumen.

Wir besprechen die Konvergenz einer Folge in einem metrischen Raum. Eine Folge im  $\mathbb{R}^2$  ist beispielsweise durch

$$x_n = (\cos n, \sin n), n \in \mathbb{N}.$$

Es handelt sich um eine Folge, die sich auf dem Einheitskreis bewegt, und zwar dreht sich der Punkt um die Bogenlänge 1 (also um ca. 57,3 Grad). Die Folgenglieder nähern sich also nicht untereinander an, sodass keine Konvergenz zu erwarten ist. Bei der Folge

$$y_n = \left( \frac{1}{n} \cos n, \frac{1}{n} \sin n \right), n \in \mathbb{N},$$

bewegen sich die Glieder auf einer „gedachten Spirale“. Die Punkte drehen sich nach wie vor um den gleichen Winkel, allerdings wird der Abstand zum Nullpunkt immer kleiner, sodass man Konvergenz gegen 0 erwarten kann.

**Definition 33.13.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $M$ . Man sagt, dass die Folge gegen  $x \in M$  *konvergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem  $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$ , gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  derart, dass für alle  $n \geq n_0$  die Beziehung

$$d(x_n, x) \leq \epsilon$$

gilt. In diesem Fall heißt  $x$  der *Grenzwert* oder der *Limes* der Folge. Dafür schreibt man auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Wenn die Folge einen Grenzwert besitzt, so sagt man auch, dass sie *konvergiert* (ohne Bezug auf einen Grenzwert), andernfalls, dass sie *divergiert*.

Diese Definition stimmt natürlich für  $M = \mathbb{R}$  mit unserem bisherigen Begriff für konvergente Folge überein. Allerdings hatten wir, als wir diesen Begriff für angeordnete Körper einführten, die reellen Zahlen selbst noch nicht zur Verfügung. Die Bedingung kann man auch so ausdrücken, dass für  $n \geq n_0$  stets  $x_n \in B(x, \epsilon)$  ist. Da die Eigenschaft für alle positiven  $\epsilon$  gilt, kann man genauso gut mit offenen Bällen arbeiten.

**Lemma 33.14.** *Der  $\mathbb{R}^m$  sei mit der euklidischen Metrik versehen und sei  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}^m$  mit*

$$z_n = (z_{1n}, \dots, z_{mn}).$$

*Dann konvergiert die Folge im  $\mathbb{R}^m$  genau dann, wenn alle Komponentenfolgen  $(z_{in})_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}$  konvergieren.*

*Beweis.* Es sei die Gesamtfolge konvergent gegen  $w = (w_1, \dots, w_m)$ . Wir behaupten, dass die  $i$ -te Komponentenfolge  $(z_{in})_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $w_i$  konvergiert. Sei (ohne Einschränkung)  $i = 1$  und  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Wegen der Konvergenz der Gesamtfolge gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $d(z_n, w) \leq \epsilon$  für alle  $n \geq n_0$ . Daher ist

$$\begin{aligned} |z_{1n} - w_1| &= \sqrt{(z_{1n} - w_1)^2} \\ &\leq \sqrt{(z_{1n} - w_1)^2 + (z_{2n} - w_2)^2 + \dots + (z_{mn} - w_m)^2} \\ &= d(z_n, w) \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Seien nun alle Komponentenfolgen konvergent, wobei die  $i$ -te Folge den Grenzwert  $w_i$  besitzen möge, und sei ein  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Wir setzen  $w = (w_1, \dots, w_m)$  und behaupten, dass die Folge gegen  $w$  konvergiert. Zu  $\epsilon/m$  gibt es für jede Komponentenfolge ein  $n_{0i}$  derart, dass  $|z_{in} - w_i| \leq \epsilon/m$  für alle  $n \geq n_{0i}$  gilt. Dann gilt für alle

$$n \geq n_0 := \max(n_{0i}, i = 1, \dots, m)$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} d(z_n, w) &= \sqrt{(z_{1n} - w_1)^2 + \dots + (z_{mn} - w_m)^2} \\ &\leq \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{m}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\epsilon}{m}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon^2}{m}} \\ &= \frac{\epsilon}{\sqrt{m}} \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

□

Insbesondere konvergiert eine Folge von komplexen Zahlen genau dann, wenn die zugehörigen Folgen der Realteile und der Imaginärteile konvergieren, was bereits in Aufgabe 8.14 gezeigt wurde.

**Definition 33.15.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $M$ . Ein Punkt  $x \in M$  heißt *Häufungspunkt* der Folge, wenn es für jedes  $\epsilon > 0$  unendlich viele Folgenglieder  $x_n$  mit  $d(x_n, x) \leq \epsilon$  gibt.

Wie in  $\mathbb{R}$  (vergleiche Aufgabe 5.38) besteht wieder die Beziehung, dass ein Punkt  $x$  genau dann Häufungspunkt einer Folge ist, wenn es eine Teilfolge gibt, die gegen  $x$  konvergiert, siehe Aufgabe 33.33.

**Satz 33.16.** *Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge. Dann ist  $T$  genau dann abgeschlossen, wenn jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T$ , die in  $M$  konvergiert, bereits in  $T$  konvergiert.*

*Beweis.* Sei zunächst  $T$  abgeschlossen und eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T$  gegeben, die in  $M$  gegen  $x \in M$  konvergiert. Wir müssen zeigen, dass  $x \in T$  ist. Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann liegt  $x$  im offenen Komplement von  $T$  und daher gibt es ein  $\epsilon > 0$  derart, dass der gesamte  $\epsilon$ -Ball  $U(x, \epsilon)$  im Komplement von  $T$  liegt. Also ist

$$T \cap U(x, \epsilon) = \emptyset.$$

Da die Folge aber gegen  $x$  konvergiert, gibt es ein  $n_0$  derart, dass alle Folgenglieder  $x_n$ ,  $n \geq n_0$ , zu diesem Ball gehören. Da sie andererseits in  $T$  liegen, ist dies ein Widerspruch. Sei nun  $T$  nicht abgeschlossen. Wir müssen eine Folge in  $T$  konstruieren, die in  $M$  konvergiert, deren Grenzwert aber nicht zu  $T$  gehört. Da  $T$  nicht abgeschlossen ist, ist das Komplement  $U := M \setminus T$  nicht offen. D.h. es gibt einen Punkt  $x \in U$  derart, dass in jedem  $\epsilon$ -Ball von  $x$  auch Punkte außerhalb von  $U$ , also in  $T$  liegen. Insbesondere ist also für jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}_+$  der Durchschnitt

$$T \cap U\left(x, \frac{1}{n}\right) \neq \emptyset.$$

Wir wählen aus dieser Schnittmenge ein Element  $x_n$  und behaupten, dass die sich ergebende Folge die gewünschten Eigenschaften besitzt. Zunächst liegen nach Konstruktion alle Folgenglieder in  $T$ . Die Folge konvergiert gegen  $x$ , da man sich hierzu auf

$$\epsilon = 1/n$$

beschränken kann und alle Folgenglieder  $x_m$ ,  $m \geq n$ , in  $U(x, \frac{1}{m}) \subseteq U(x, \frac{1}{n})$  liegen. Da der Grenzwert einer Folge im Falle der Existenz eindeutig bestimmt ist, und  $x \notin T$  ist, konvergiert die Folge in  $T$  nicht.  $\square$

**Korollar 33.17.** *Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}$  eine Teilmenge der reellen Zahlen. Es sei  $A \subseteq T$  eine in  $T$  abgeschlossene Teilmenge. Wenn das Supremum  $\sup(A)$  in  $T$  existiert, so ist  $\sup(A) \in A$ .*

*Beweis.* Es sei  $s = \sup(A) \in T$ . Zu jedem  $n \in \mathbb{N}_+$  gibt es Elemente  $x_n \in A$ ,  $x_n \leq s$ , und mit  $s - x_n \leq \frac{1}{n}$ . Andernfalls wäre nämlich  $s - \frac{1}{n}$  eine kleinere obere Schranke von  $A$ . Die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert also gegen  $s \in T$  und aufgrund von Satz 33.16 ist  $s \in A$ .  $\square$

Wenn man z.B. das offene Intervall  $]0, 1[$  in  $\mathbb{R}$  nimmt und  $A = T = ]0, 1[$  betrachtet, so ist  $A$  abgeschlossen in  $T$ , das Supremum dieser Menge gehört aber nicht dazu. Ein wichtiger Spezialfall ist das folgende Korollar.

**Korollar 33.18.** *Es sei  $A \subseteq \mathbb{R}$  eine nicht leere, nach oben beschränkte, abgeschlossene Teilmenge der reellen Zahlen. Dann gehört das Supremum  $\sup(A)$  zu  $A$ .*

*Beweis.* Dies folgt aus Korollar 33.17 mit  $T = \mathbb{R}$  und aus Satz 7.5.  $\square$

### 33. ARBEITSBLATT

#### 33.1. Übungsaufgaben.

##### Aufgabe 33.1.\*

Es seien  $P = (\frac{3}{4}, -1)$  und  $Q = (2, \frac{1}{5})$  zwei Punkte im  $\mathbb{R}^2$ . Bestimme den Abstand zwischen diesen beiden Punkten in

- der euklidischen Metrik,
- der Summenmetrik,
- der Maximumsmetrik.
- Vergleiche diese verschiedenen Abstände der Größe nach.

**Aufgabe 33.2.** Zeige, dass die Summenmetrik im  $\mathbb{R}^n$  eine Metrik ist.

**Aufgabe 33.3.** Zeige, dass die Maximumsmetrik im  $\mathbb{R}^n$  eine Metrik ist.

**Aufgabe 33.4.** Es sei  $n \geq 2$ . Zeige, dass für die Norm  $\|x\| := \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$  auf dem  $\mathbb{R}^n$  kein Skalarprodukt  $\langle -, - \rangle$  mit der Eigenschaft  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  existiert.

**Aufgabe 33.5.** Es sei  $M$  die Parabel, also der Graph der Quadratfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2.$$

Entscheide, ob auf  $M$  durch

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := |x_1 - x_2|$$

bzw. durch

$$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := |y_1 - y_2|$$

eine Metrik definiert wird.

**Aufgabe 33.6.** Es sei

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

der Einheitskreis. Zeige, dass man auf  $K$  eine Metrik definieren kann, indem man  $d(P, Q)$  ( $P, Q \in K$ ) als den positiven Winkel zwischen den zugehörigen Strahlen durch den Nullpunkt  $(0, 0)$  ansetzt.

**Aufgabe 33.7.** Es sei

$$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine stetige konkave Funktion mit  $f(0) = 0$  und  $f(t) > 0$  für  $t > 0$  und sei

$$d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine Metrik. Zeige, dass dann auch  $f \circ d$  eine Metrik ist.

**Aufgabe 33.8.** Es seien  $(M_1, d_1)$  und  $(M_2, d_2)$  metrische Räume. Zeige, dass auf der Produktmenge  $M_1 \times M_2$  durch

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}$$

eine Metrik gegeben ist.

**Aufgabe 33.9.** Zeige, dass auf jeder Menge  $M$  die diskrete Metrik in der Tat eine Metrik ist.

**Aufgabe 33.10.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Zeige, dass folgende Eigenschaften gelten.

- (1) Die leere Menge  $\emptyset$  und die Gesamtmenge  $M$  sind offen.
- (2) Es sei  $I$  eine beliebige Indexmenge und seien  $U_i, i \in I$ , offene Mengen. Dann ist auch die Vereinigung

$$\bigcup_{i \in I} U_i$$

offen.

- (3) Es sei  $I$  eine endliche Indexmenge und seien  $U_i, i \in I$ , offene Mengen. Dann ist auch der Durchschnitt

$$\bigcap_{i \in I} U_i$$

offen.

**Aufgabe 33.11.\***

Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Zeige, dass die offenen Kugeln  $U(x, \epsilon)$  offen sind.

**Aufgabe 33.12.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Zeige, dass die abgeschlossenen Kugeln  $B(x, \epsilon)$  abgeschlossen sind.

**Aufgabe 33.13.\***

Wir betrachten im  $\mathbb{R}^2$  die offenen Bälle  $U = U((0, 0), 1)$  und  $V = U((2, 0), 2)$ . Man gebe für jeden Punkt

$$x = (a, b) \in U \cap V$$

einen expliziten offenen Ball mit Mittelpunkt  $x$  an, der ganz innerhalb von  $U \cap V$  liegt.

**Aufgabe 33.14.** Zeige, dass auf dem  $\mathbb{R}^n$  die euklidische Metrik, die Summenmetrik und die Maximummetrik dieselben offenen Mengen definieren.

**Aufgabe 33.15.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Zeige, dass in  $M$  die sogenannte *Hausdorff*-Eigenschaft gilt, d.h. zu je zwei verschiedenen Punkten  $x$  und  $y$  gibt es offene Mengen  $U$  und  $V$  mit

$$x \in U \text{ und } y \in V \text{ und } U \cap V = \emptyset.$$

**Aufgabe 33.16.\***

Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Zeige, dass jede endliche Teilmenge  $T \subseteq M$  abgeschlossen ist.

**Aufgabe 33.17.** Zeige, dass die Menge der reellen Zahlen in  $\mathbb{C}$  abgeschlossen ist.

**Aufgabe 33.18.** Zeige, dass die Menge

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

in  $\mathbb{R}^2$  abgeschlossen ist.

**Aufgabe 33.19.** Zeige, dass die Menge der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$  weder offen noch abgeschlossen ist.

**Aufgabe 33.20.\***

Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge mit der induzierten Metrik. Zeige, dass eine Teilmenge  $Z \subseteq T$  genau dann offen in  $T$  ist, wenn es eine in  $M$  offene Menge  $U$  mit  $Z = T \cap U$  gibt.

**Aufgabe 33.21.** Sei  $M$  eine Menge, die mit der diskreten Metrik versehen sei. Zeige, dass jede Teilmenge von  $M$  sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

**Aufgabe 33.22.** Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in einem metrischen Raum  $M$ . Zeige, dass die Folge genau dann gegen  $x \in M$  konvergiert, wenn die Folge der Abstände  $d(x_n, x)$  in  $\mathbb{R}$  gegen 0 konvergiert.

**Aufgabe 33.23.** Zeige, dass eine Folge in einem metrischen Raum maximal einen Grenzwert besitzt.

**Aufgabe 33.24.** Entscheide, ob im  $\mathbb{R}^3$  (versehen mit der euklidischen Metrik) die Folge

$$x_n = \left( \frac{n^5 - 4n^2}{e^n}, \frac{-5n^4 + n^3 - n^{-1}}{13n^4 - 9n^2 + 5n + 6}, \frac{4 \cos^3 n + 6n^2 + 5n - 2}{2n^2 - \sin^7 n} \right)$$

konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

**Aufgabe 33.25.** Zu einem Dreieck  $\Delta = (A, B, C)$  ist das Seitenmittelpunktsdreieck durch die Eckpunkte  $\frac{1}{2}(A + B)$ ,  $\frac{1}{2}(A + C)$ ,  $\frac{1}{2}(B + C)$  gegeben. Diese Konstruktion ergibt eine rekursiv definierte Folge von Dreiecken  $\Delta_n$ , wobei  $\Delta_1 = \Delta$  und  $\Delta_{n+1}$  das Seitenmittelpunktsdreieck zu  $\Delta_n$  ist. Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}^2$  mit  $x_n \in \Delta_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}_+$ . Zeige, dass diese Folge konvergiert und bestimme den Grenzwert.

**Aufgabe 33.26.** Zeige, dass eine konvergente Folge in einem metrischen Raum genau einen Häufungspunkt besitzt.

**Aufgabe 33.27.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $M$ . Zeige, dass die Menge aller Häufungspunkte dieser Folge abgeschlossen ist.

**Aufgabe 33.28.\***

Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in einem metrischen Raum  $M$ . Zeige, dass die Folge genau dann gegen  $x \in M$  konvergiert, wenn in jeder offenen Menge  $U$  mit  $x \in U$  alle bis auf endlich viele Folgenglieder liegen.

### 33.2. Aufgaben zum Abgeben.

#### Aufgabe 33.29. (2 Punkte)

Entscheide, ob für vier Punkte  $A, B, C, X$  in der euklidischen Ebene  $\mathbb{R}^2$  stets die Abschätzung

$$d(A, B) + d(B, C) \leq d(A, X) + d(B, X) + d(C, X)$$

gilt.

#### Aufgabe 33.30. (3 Punkte)

Es seien  $P$  und  $Q$  zwei verschiedene Punkte im  $\mathbb{R}^2$  und  $G$  die dadurch definierte Gerade. Zeige, dass  $G$  abgeschlossen in  $\mathbb{R}^2$  ist.

#### Aufgabe 33.31. (6 (2+2+2) Punkte)

a) Definiere auf der Einheitskugel, also der Kugeloberfläche

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

die „geodätische Metrik“, bei der der Abstand zweier Punkte  $P, Q \in S$  durch die Länge der kürzesten Verbindung auf der Oberfläche gegeben ist.

b) Zeige, dass es sich um eine Metrik handelt.

c) Welchen Abstand besitzen die Punkte  $(0, 0, 1)$  und  $(1, 0, 0)$  in der euklidischen und in der geodätischen Metrik?

Die kürzeste Verbindung liegt auf dem Großkreis, den man erhält, wenn man die Kugeloberfläche mit der durch  $P, Q, (0, 0, 0)$  gegebenen Ebene schneidet (wann definieren diese drei Punkte keine Ebene?). Die Formel für den Kreisumfang und die Tatsache, dass der Winkel proportional zur Bogenlänge ist, darf verwendet werden.

#### Aufgabe 33.32. (4 Punkte)

Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $M$ , die gegen  $x \in M$  konvergiere. Es sei  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine weitere Folge derart, dass die Abstände  $d(x_n, y_n)$  eine Nullfolge in  $\mathbb{R}$  sei. Zeige, dass auch  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $x$  konvergiert.

#### Aufgabe 33.33. (4 Punkte)

Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $M$ . Zeige, dass ein Punkt  $x \in M$  genau dann ein Häufungspunkt der Folge ist, wenn es eine gegen  $x$  konvergente Teilfolge gibt.

**Aufgabe 33.34.** (4 (2+2) Punkte)

Es sei  $z_n = (x_n, y_n)$  eine Folge im  $\mathbb{R}^2$ , die durch die beiden reellen Komponentenfolgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bzw.  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegeben sei, und sei  $z = (x, y)$  ein Punkt. Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen.

- (1) Wenn  $z$  ein Häufungspunkt von  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist, dann ist  $x$  ein Häufungspunkt von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $y$  ein Häufungspunkt von  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- (2) Wenn  $x$  ein Häufungspunkt von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $y$  ein Häufungspunkt von  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist, dann ist  $z$  ein Häufungspunkt von  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

## 34. VORLESUNG - STETIGKEIT

## 34.1. Stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen.

Ein metrischer Raum ist dadurch ausgezeichnet, dass es in ihm eine Abstandsfunktion gibt, und dass dadurch zwei Punkte „näher“ zueinander liegen können als zwei andere Punkte. Bei einer Abbildung

$$f: L \longrightarrow M$$

zwischen zwei metrischen Räumen kann man sich fragen, inwiefern der Abstand im Werteraum  $M$  durch den Abstand im Definitionsraum  $L$  kontrollierbar ist. Sei  $x \in L$  und  $y = f(x)$  der Bildpunkt. Man möchte, dass für Punkte  $x'$ , die „nahe“ an  $x$  sind, auch die Bildpunkte  $f(x')$  „nahe“ an  $f(x)$  sind. Um diese intuitive Vorstellung zu präzisieren, sei ein  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Dieses  $\epsilon$  repräsentiert eine „gewünschte Zielgenauigkeit“ (oder „Zieltoleranz“). Die Frage ist dann, ob man ein  $\delta > 0$  finden kann (eine „Startgenauigkeit“ oder „Starttoleranz“) mit der Eigenschaft, dass für alle  $x'$  mit  $d(x, x') \leq \delta$  die Beziehung  $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$  gilt. Dies führt zum Begriff der stetigen Abbildung.

**Definition 34.1.** Es seien  $(L, d_1)$  und  $(M, d_2)$  metrische Räume,

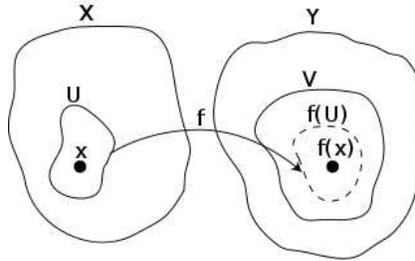
$$f: L \longrightarrow M$$

eine Abbildung und  $x \in L$ . Die Abbildung  $f$  heißt *stetig in  $x$* , wenn für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  derart existiert, dass

$$f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \epsilon)$$

gilt. Die Abbildung  $f$  heißt *stetig*, wenn sie stetig in  $x$  für jedes  $x \in L$  ist.

Statt mit den abgeschlossenen Ballumgebungen könnte man hier genauso gut mit den offenen Ballumgebungen arbeiten. Die einfachsten Beispiele für stetige Abbildungen sind konstante Abbildungen, die Identität eines metrischen Raumes und die Inklusion  $T \subseteq M$  einer mit der induzierten Metrik versehenen Teilmenge eines metrischen Raumes. Siehe dazu die Aufgaben. Bei  $L = M = \mathbb{R}$  stimmt diese Definition mit der bisherigen überein.



Der folgende Satz heißt *Folgenkriterium* und ist eine direkte Verallgemeinerung von Satz 12.5.

**Lemma 34.2.** *Es sei*

$$f: L \longrightarrow M, x \longmapsto f(x),$$

*eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen  $L$  und  $M$  und sei  $x \in L$  ein Punkt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (1)  *$f$  ist stetig im Punkt  $x$ .*
- (2) *Für jedes  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$  mit der Eigenschaft, dass aus  $d(x, x') \leq \delta$  folgt, dass*

$$d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$$

*ist.*

- (3) *Für jede konvergente Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $L$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  ist auch die Bildfolge  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent mit dem Grenzwert  $f(x)$ .*

*Beweis.* Die Äquivalenz von (1) und (2) ist klar. Sei nun (2) erfüllt und sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $L$ , die gegen  $x$  konvergiert. Wir müssen zeigen, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$  ist. Dazu sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Wegen (2) gibt es ein  $\delta$  mit der angegebenen Eigenschaft und wegen der Konvergenz von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $x$  gibt es eine natürliche Zahl  $n_0$  derart, dass für alle  $n \geq n_0$  die Abschätzung

$$d(x_n, x) \leq \delta$$

gilt. Nach der Wahl von  $\delta$  ist dann

$$d(f(x_n), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0,$$

so dass die Bildfolge gegen  $f(x)$  konvergiert. Sei (3) erfüllt und  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Wir nehmen an, dass es für alle  $\delta > 0$  Elemente  $z \in L$  gibt, deren Abstand zu  $x$  maximal gleich  $\delta$  ist, deren Wert  $f(z)$  unter der Abbildung aber zu  $f(x)$  einen Abstand größer als  $\epsilon$  besitzt. Dies gilt dann insbesondere für die Stammbrüche  $\delta = 1/n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . D.h. für jede natürliche Zahl  $n$  gibt es ein  $x_n \in L$  mit

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{n} \text{ und mit } d(f(x_n), f(x)) > \epsilon.$$

Diese so konstruierte Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $x$ , aber die Bildfolge konvergiert nicht gegen  $f(x)$ , da der Abstand der Bildfolgenwerte zu  $f(x)$  zumindest  $\epsilon$  ist. Dies ist ein Widerspruch zu (3).  $\square$

**Satz 34.3.** *Es sei*

$$f: L \longrightarrow M, x \longmapsto f(x),$$

*eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen  $L$  und  $M$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (1)  *$f$  ist stetig in jedem Punkt  $x \in L$ .*
- (2) *Für jeden Punkt  $x \in L$  und jedes  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$  mit der Eigenschaft, dass aus  $d(x, x') \leq \delta$  folgt, dass  $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$  ist.*
- (3) *Für jeden Punkt  $x \in L$  und jede konvergente Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $L$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  ist auch die Bildfolge  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent mit dem Grenzwert  $f(x)$ .*
- (4) *Für jede offene Menge  $V \subseteq M$  ist auch das Urbild  $f^{-1}(V) = \{x \in L \mid f(x) \in V\}$  offen.*

*Beweis.* Die Äquivalenz der ersten drei Formulierungen folgt direkt aus Lemma 34.2. Sei (1) erfüllt und eine offene Menge  $V \subseteq M$  gegeben mit dem Urbild  $U := f^{-1}(V)$ . Sei  $x \in U$  ein Punkt mit dem Bildpunkt  $y = f(x) \in V$ . Da  $V$  offen ist, gibt es nach Definition ein  $\epsilon > 0$  mit  $U(y, \epsilon) \subseteq V$ . Nach (2) gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $f(U(x, \delta)) \subseteq U(y, \epsilon)$ . Daher ist

$$x \in U(x, \delta) \subseteq U$$

und wir haben eine offene Ballumgebung von  $x$  innerhalb des Urbilds gefunden. Deshalb ist  $U$  offen. Sei (4) erfüllt und  $x \in L$  mit  $y = f(x)$  und  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Da der offene Ball  $U(y, \epsilon)$  offen ist, ist wegen (4) auch das Urbild  $f^{-1}(U(y, \epsilon))$  offen. Da  $x$  zu dieser Menge gehört, gibt es ein  $\delta > 0$  mit

$$U(x, \delta) \subseteq f^{-1}(U(y, \epsilon)),$$

so dass (1) erfüllt ist.  $\square$

**Lemma 34.4.** *Seien  $L, M, N$  metrische Räume und seien*

$$f: L \longrightarrow M \text{ und } g: M \longrightarrow N$$

*stetige Abbildungen. Dann ist auch die Hintereinanderschaltung*

$$g \circ f: L \longrightarrow N, x \longmapsto g(f(x)),$$

*stetig.*

*Beweis.* Dies folgt am einfachsten aus der Charakterisierung von stetig mit offenen Mengen, siehe Lemma 34.3.  $\square$

Bei einer bijektiven stetigen Abbildung zwischen metrischen Räumen ist die Umkehrfunktion nicht automatisch stetig, siehe Aufgabe 34.16 und Aufgabe 34.17.

**Definition 34.5.** Zwei metrische Räume  $L$  und  $M$  heißen *homöomorph*, wenn es eine bijektive stetige Abbildung

$$\varphi: L \longrightarrow M$$

gibt, deren Umkehrabbildung  $\varphi^{-1}$  ebenfalls stetig ist.

Eine solche Abbildung  $\varphi$  heißt *Homöomorphismus*.

### 34.2. Verknüpfungen und stetige Abbildungen.

**Lemma 34.6.** *Die Negation*

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, x \longmapsto -x,$$

und die Inversenbildung

$$\mathbb{K} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{K} \setminus \{0\}, x \longmapsto x^{-1},$$

sind stetig.

*Beweis.* Die erste Aussage folgt direkt aus

$$|-x - (-y)| = |-x + y|.$$

Zur zweiten Aussage sei  $x \neq 0$  und  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Sei  $b = |x| > 0$ . Wir setzen  $\delta = \min\left(\frac{b^2\epsilon}{2}, \frac{b}{2}\right)$ . Dann gilt für jedes  $y$  mit  $|x - y| \leq \delta$  die Abschätzung (wegen  $|y| \geq b/2$ )

$$|x^{-1} - y^{-1}| = \left| \frac{y - x}{xy} \right| = \frac{|y - x|}{|x| \cdot |y|} \leq \frac{b^2\epsilon/2}{b^2/2} = \epsilon.$$

□

**Lemma 34.7.** *Die Addition*

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto x + y,$$

und die Multiplikation

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

sind stetig.

*Beweis.* Siehe Aufgabe 34.7. □

**Lemma 34.8.** *Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und seien Funktionen*

$$f_i: M \longrightarrow \mathbb{K}$$

(für  $i = 1, \dots, m$ ) gegeben mit der zusammengesetzten Abbildung

$$f: M \longrightarrow \mathbb{K}^m, x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_m(x)).$$

Dann ist  $f$  genau dann stetig, wenn alle Komponentenfunktionen  $f_i$  stetig sind.

*Beweis.* Es genügt, diese Aussage für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  zu zeigen. Dafür folgt sie direkt aus Lemma 33.14 unter Verwendung von Lemma 34.2.  $\square$

Die folgende Aussage ist eine Verallgemeinerung von Lemma 12.7.

**Lemma 34.9.** *Es sei  $M$  ein metrischer Raum und seien*

$$f, g: M \longrightarrow \mathbb{K}$$

*stetige Funktionen. Dann sind auch die Funktionen*

$$f + g: M \longrightarrow \mathbb{K}, x \longmapsto f(x) + g(x),$$

$$f - g: M \longrightarrow \mathbb{K}, x \longmapsto f(x) - g(x),$$

$$f \cdot g: M \longrightarrow \mathbb{K}, x \longmapsto f(x) \cdot g(x),$$

*stetig. Für eine Teilmenge  $U \subseteq M$ , auf der  $g$  keine Nullstelle besitzt, ist auch die Funktion*

$$f/g: U \longrightarrow \mathbb{K}, x \longmapsto f(x)/g(x),$$

*stetig.*

*Beweis.* Wir betrachten Abbildungsdiagramme der Form

$$M \xrightarrow{f, g} \mathbb{K} \times \mathbb{K} \xrightarrow{+} \mathbb{K}.$$

Die Abbildung links ist stetig aufgrund von Lemma 34.8. Die rechte Abbildung ist stetig aufgrund von Lemma 34.7. Daher ist wegen Lemma 34.4 auch die Gesamtabbildung stetig. Die Gesamtabbildung ist aber die Addition der beiden Funktionen. Für die Multiplikation verläuft der Beweis gleich, für die Negation und die Division muss man zusätzlich Lemma 34.6 heranziehen und (für die Division) das Diagramm

$$U \xrightarrow{f, g^{-1}} \mathbb{K} \times \mathbb{K} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{K}$$

betrachten.  $\square$

**Satz 34.10.** *Es sei  $\mathbb{K}^n$  mit der euklidischen Metrik versehen und sei*

$$\varphi: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

*eine lineare Abbildung. Dann ist  $\varphi$  stetig.*

*Beweis.* Eine komplex-lineare Abbildung ist auch reell-linear, und die euklidische Metrik hängt nur von der reellen Struktur ab. Wir können also  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  annehmen. Aufgrund von Lemma 34.8 können wir  $m = 1$  annehmen. Die Abbildung sei durch

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i,$$

mit  $a_i \in \mathbb{R}$  gegeben. Die Nullabbildung ist konstant und daher stetig, also sei  $a = \max(|a_i|, i = 1, \dots, n) > 0$ . Es sei  $x \in \mathbb{R}^n$  und ein  $\epsilon > 0$  vorgegeben.

Für alle  $y \in \mathbb{R}^n$  mit  $d(x, y) \leq \frac{\epsilon}{na}$  ist insbesondere  $|x_i - y_i| \leq \frac{\epsilon}{na}$  für alle  $i$  und daher ist

$$\begin{aligned} d(\varphi(x), \varphi(y)) &= \left| \sum_{i=1}^n a_i x_i - \sum_{i=1}^n a_i y_i \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n a_i (x_i - y_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |a_i (x_i - y_i)| \\ &\leq na |x_i - y_i| \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

□

### 34.3. Polynomiale Funktionen.

Wir haben schon Polynome in ein und in zwei Variablen (beispielsweise bei einfachen Differentialgleichungen) verwendet. Die folgende Definition verwendet Multiindex-Schreibweise, um Polynomfunktionen in beliebig (endlich) vielen Variablen einzuführen. Dabei steht ein Index  $\nu$  für ein Tupel

$$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$$

und für Variablen  $x_1, \dots, x_n$  verwendet man die Schreibweise

$$x^\nu = x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}.$$

**Definition 34.11.** Eine Funktion

$$f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n),$$

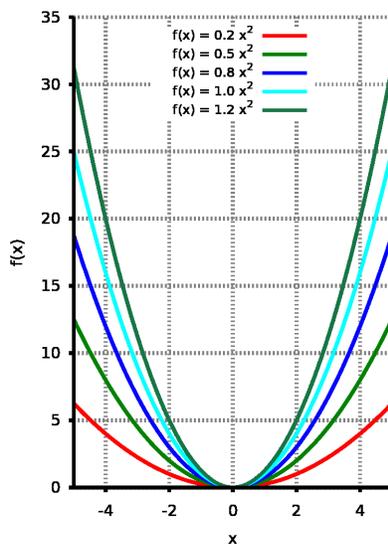
die man als eine Summe der Form

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu x^\nu = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_n^{\nu_n}$$

mit  $a_\nu \in \mathbb{K}$  schreiben kann, wobei nur endlich viele  $a_\nu \neq 0$  sind, heißt *polynomiale Funktion*.

**Bemerkung 34.12.** Gelegentlich betrachtet man funktionale Ausdrücke für Funktionen in einer Variablen  $x$ , in denen noch weitere unbestimmte Parameter vorkommen, von denen letztlich die zu untersuchende Funktion abhängt. Typische Beispiele ist die Menge aller linearen Funktionen  $ax + b$ , wo  $x$  die eigentliche Funktionsvariable der linearen Funktion bezeichnet und  $a, b$  Parameter sind, die die Steigung bzw. den Wert der linearen Funktion an der Stelle 0 repräsentieren, oder die Menge der Parabeln  $ax^2$ , wo  $x$  die Funktionsvariable bezeichnet und  $a$  ein Parameter ist, der die Enge oder die Weite der Parabel bestimmt, oder die Menge der Parabeln  $x^2 + px + q$ , wo der Parameter  $p$  den linearen Term und der Parameter  $q$  den konstanten Term bezeichnet. Man spricht in solchen Situationen von einer *Funktionschar*

oder von einer *Kurvenschar*. Mit diesem Konzept kann man ähnlich gebaute Funktionen simultan studieren. Man interessiert sich für die Bedeutung der Parameter, wie sich diese auf den Funktionsverlauf auswirken, wie man beispielsweise aus den Parametern  $p$  und  $q$  die Nullstellen bestimmen kann, etc.



In einer solchen Situation kann man einen Schritt weiter gehen und die Parameter als zusätzliche prinzipiell gleichberechtigte Variablen neben  $x$  ansehen. In dieser Weise entstehen (zumeist polynomiale) Funktionen in zwei oder in drei Variablen, die man mit Methoden der höherdimensionalen Analysis studieren kann. Beispielsweise kann man so Aussagen wie, dass eine kleine Änderung der Parameter den Funktionsverlauf nicht wesentlich ändert, präzisieren und überprüfen. Wenn man den Graphen der Gesamtfunktion in zwei Variablen skizziert (also eine „Gebirgsfläche“ im  $\mathbb{R}^3$ ), so erhält man die Graphen der Funktionen in der Schar zurück, indem man mit den Ebenen schneidet, die durch die Festlegung des Parameters gegeben sind.

Offenbar sind die Summe und die Produkte von polynomialen Funktionen wieder polynomial. Dies gilt auch, wenn man Polynome in andere Polynome einsetzt.

**Satz 34.13.** *Eine polynomiale Funktion*

$$f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

*ist stetig.*

*Beweis.* Die einzelnen Variablen  $x_i$  repräsentieren die  $i$ -te lineare Projektion

$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow x_i.$$

Nach Satz 34.10 sind diese stetig. Aufgrund von Lemma 34.9 sind dann auch die monomialen Funktionen

$$x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_n^{\nu_n} : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

stetig und damit aus dem gleichen Grund überhaupt alle polynomialen Funktionen.  $\square$

Wikiversitydruckversion—Kurs:Analysis (Osnabrück 2021-2023)/Teil II—Vorlesung—34

## 34. ARBEITSBLATT

### 34.1. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 34.1.** Es seien  $L$  und  $M$  metrische Räume und  $m \in M$ . Zeige, dass die konstante Abbildung

$$f: L \longrightarrow M, x \longmapsto m,$$

stetig ist.

**Aufgabe 34.2.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Zeige, dass die Identität

$$M \longrightarrow M, x \longmapsto x,$$

stetig ist.

**Aufgabe 34.3.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge mit der induzierten Metrik. Zeige, dass die Inklusion  $T \subseteq M$  stetig ist.

**Aufgabe 34.4.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und seien  $a < b < c$  reelle Zahlen. Es seien

$$f: [a, b] \longrightarrow M$$

und

$$g: [b, c] \longrightarrow M$$

stetige Abbildungen mit  $f(b) = g(b)$ . Zeige, dass dann die Abbildung

$$h: [a, c] \longrightarrow M$$

mit

$$h(t) = f(t) \text{ für } t \leq b \text{ und } h(t) = g(t) \text{ für } t > b$$

ebenfalls stetig ist.

**Aufgabe 34.5.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und sei

$$f: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei  $x \in M$  ein Punkt mit  $f(x) > 0$ . Zeige, dass dann auch  $f(y) > 0$  für alle  $y$  aus einer offenen Ballumgebung von  $x$  gilt.

**Aufgabe 34.6.** Es sei

$$f: L \longrightarrow M$$

eine stetige Abbildung zwischen den metrischen Räumen  $L$  und  $M$ . Ist das Urbild eines offenen Balles  $U(y, \epsilon) \subseteq M$  stets wieder ein offener Ball in  $L$ ?

**Aufgabe 34.7.** Zeige, dass die Addition

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto x + y,$$

und die Multiplikation

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

stetig sind.

**Aufgabe 34.8.** Es seien  $L, M, N$  metrische Räume und seien

$$f: L \longrightarrow M \text{ und } g: M \longrightarrow N$$

Abbildungen. Es sei  $f$  stetig in  $x \in L$  und es sei  $g$  stetig in  $f(x) \in M$ . Zeige, dass die Hintereinanderschaltung

$$g \circ f: L \longrightarrow N, x \longmapsto g(f(x)),$$

stetig in  $x$  ist.

**Aufgabe 34.9.** Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto |z|,$$

stetig ist.

**Aufgabe 34.10.** Es sei  $V$  ein euklidischer Raum. Zeige, dass die Norm

$$V \longrightarrow \mathbb{R}, v \longmapsto \|v\|,$$

eine stetige Abbildung ist.

**Aufgabe 34.11.** Zeige, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \max(x, y),$$

stetig ist.

**Aufgabe 34.12.** Betrachte die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

die durch

$$f(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0, \\ 0, & \text{falls } y \leq 0, \\ y/x, & \text{falls } x \geq y > 0, \\ x/y, & \text{falls } y > x > 0, \end{cases}$$

definiert ist. Zeige, dass die Einschränkung von  $f$  auf jeder zur  $x$ -Achse oder zur  $y$ -Achse parallelen Geraden stetig ist, dass aber  $f$  selbst nicht stetig ist.

**Aufgabe 34.13.** Es sei  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Untervektorraum im euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$ . Zeige, dass  $V$  abgeschlossen im  $\mathbb{R}^n$  ist.

**Aufgabe 34.14.** Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass der Graph von  $f$  abgeschlossen in  $\mathbb{R}^2$  ist.

**Aufgabe 34.15.\***

Es seien  $L$  und  $M$  metrische Räume und es seien

$$f, g: L \longrightarrow M$$

zwei stetige Abbildungen. Zeige, dass die Menge

$$N = \{x \in L \mid f(x) = g(x)\}$$

abgeschlossen in  $L$  ist.

**Aufgabe 34.16.** Wir betrachten die *trigonometrische Parametrisierung des Einheitskreises*, also die Abbildung

$$\varphi: [0, 2\pi[ \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (\cos t, \sin t).$$

Zeige, dass  $\varphi$  eine Bijektion zwischen  $[0, 2\pi[$  und dem Einheitskreis definiert, die stetig ist, deren Umkehrabbildung aber nicht stetig ist.

**Aufgabe 34.17.** Es sei  $X = \mathbb{R}^n$  mit der euklidischen Metrik und  $Y = \mathbb{R}^n$  mit der diskreten Metrik. Es sei

$$f: Y \longrightarrow X$$

die Identität. Zeige, dass  $f$  stetig ist, die Umkehrabbildung  $f^{-1}$  aber nicht.

**Aufgabe 34.18.\***

Zeige, dass das offene Einheitsintervall  $]0, 1[$  und das abgeschlossene Einheitsintervall  $[0, 1]$  nicht homöomorph sind.

**Aufgabe 34.19.** Stifte eine Homöomorphie zwischen der abgeschlossenen Kreisscheibe und dem abgeschlossenen Quadrat.

**Aufgabe 34.20.** Es sei  $I = [a, b[$  ein halboffenes Intervall. Kann man  $I$  in zwei disjunkte Unterräume  $I = T_1 \cup T_2$  derart zerlegen, dass  $T_1$  und  $T_2$  untereinander homöomorph sind?

**Aufgabe 34.21.** Es sei

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Polynomfunktion und  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $\mathbb{R}^n$  mit den zugehörigen Koordinatenfunktionen  $z_i, i = 1, \dots, n$ . Zeige, dass  $f$  auch eine Polynomfunktion in diesen Koordinaten ist.

**Aufgabe 34.22.** Es sei

$$f: \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

eine Abbildung, die in jeder Komponente polynomial sei und sei

$$g: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine polynomiale Funktion. Zeige, dass dann auch die Hintereinanderschaltung  $g \circ f$  eine polynomiale Funktion ist.

**Aufgabe 34.23.** Skizziere die folgenden Funktionsscharen auf zweifache Weise, nämlich einerseits als die Graphen der Funktionen für einige („typische“) Parameter und andererseits als den Graph einer einzigen Funktion in zwei Variablen. Wie sieht man in der zweiten Darstellungsform die erste?

- (1)  $x + a$ ,
- (2)  $ax$ ,
- (3)  $ax^2$ ,
- (4)  $(x - a)^2$ ,
- (5)  $x^a$ ,
- (6)  $a^x$ .

**Aufgabe 34.24.** Es sei  $n \in \mathbb{N}$ . Zeige, dass die Determinante

$$\mathbb{K}^{n^2} \cong \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}, M \longmapsto \det M,$$

eine polynomiale Funktion ist.

**Aufgabe 34.25.** Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $G = \text{Gl}(n, \mathbb{R})$  die Menge der reellen invertierbaren  $n \times n$ -Matrizen. Zeige, dass die Abbildung

$$G \longrightarrow G, M \longmapsto M^{-1},$$

stetig ist.

**Aufgabe 34.26.\***

Finde ein Polynom  $p(x, y)$  der Form

$$p(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2,$$

das die Bedingungen

$$p(0, 0) = 0,$$

$$p(0, 1) = 1,$$

$$p(1, 0) = 0,$$

$$p(1, 1) = 3,$$

$$p(0, 2) = 6,$$

$$p(-1, 1) = 1,$$

erfüllt.

## 34.2. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 34.27.** (5 Punkte)

Im Nullpunkt  $0 \in \mathbb{R}^3$  befinde sich die Pupille eines Auges (oder eine Linse) und die durch  $x = -1$  bestimmte Ebene sei die Netzhaut  $N \cong \mathbb{R}^2$  (oder eine Fotoplatte). Bestimme die Abbildung

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die das Sehen (oder Fotografieren) beschreibt (d.h. einem Punkt des Halbraumes wird durch den Lichtstrahl ein Punkt der Netzhaut zugeordnet). Ist diese Abbildung stetig, ist sie linear?

**Aufgabe 34.28.** (8 Punkte)

Ein Billardtisch sei 127 cm breit und 254 cm lang, die Kugeln haben einen Radius von 2 cm und die Ecklöcher seien ein Viertelkreis<sup>1</sup> mit Radius 5 cm um einen Eckpunkt. An den Tisch sei ein Koordinatensystem angelegt, das parallel zu den Tischseiten verläuft und bei dem die linke untere Ecke der Nullpunkt sei.

Berechne für die linke untere Ecke die Koordinaten der beiden Punkte des Lochrandes, durch die der Mittelpunkt einer Kugel hindurch muss, wenn

<sup>1</sup>Diese Aufgabe ergibt auch Sinn, wenn die Löcher volle Kreise um die Eckpunkte sind, hat aber ein anderes Ergebnis.

sie eingelocht werden soll. Wie lang ist der Abstand zwischen diesen beiden Punkten, wie lang ist die Lochberandung zwischen diesen Punkten?

Eine Kugel soll nun direkt (ohne Verwendung von Bande oder anderen Kugeln) in dieses Loch versenkt werden, wobei der Queuestoß stets in Richtung der Kugelmitte und an deren „Äquator“ durchgeführt wird. Welche Winkeltoleranz zum Versenken der Kugel liegt vor, wenn der Kugelmittelpunkt die folgende Position besitzt:

- a) (63.5, 63.5)
- b) (100, 100)
- c) (63.5, 192,5)
- d) (63.5, 10)

Welche Länge hat das zugehörige Kreissegment auf der Kugel?

**Aufgabe 34.29.** (2 Punkte)

Man gebe eine Homöomorphie zwischen  $]0, 1[$  und  $\mathbb{R}$  an.

**Aufgabe 34.30.** (5 Punkte)

Es sei  $I = ]a, b[$  ein offenes Intervall. Kann man  $I$  in zwei disjunkte Unterräume  $I = T_1 \cup T_2$  derart zerlegen, dass  $T_1$  und  $T_2$  untereinander homöomorph sind?

**34.3. Die Aufgabe zum Aufgeben.**

**Aufgabe 34.31.** (10 Punkte)

Es sei  $I = [a, b]$  ein abgeschlossenes Intervall. Kann man  $I$  in zwei disjunkte Unterräume  $I = T_1 \cup T_2$  derart zerlegen, dass  $T_1$  und  $T_2$  untereinander homöomorph sind?

35. VORLESUNG - ZUSAMMENHANG

**35.1. Der Abschluss in einem metrischen Raum.**

**Definition 35.1.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge. Ein Punkt  $a \in M$  heißt *Berührungspunkt* von  $T$ , wenn zu jedem  $\epsilon > 0$  der Durchschnitt

$$T \cap U(a, \epsilon) \neq \emptyset.$$

**Definition 35.2.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge. Die Menge aller Berührungspunkte von  $T$  heißt der *Abschluss* von  $T$ . Er wird mit  $\bar{T}$  bezeichnet.

Der Abschluss ist eine abgeschlossene Menge, und zwar die kleinste abgeschlossene Menge, die  $T$  umfasst, siehe Aufgabe 35.3.

### 35.2. Grenzwerte von Abbildungen.

**Definition 35.3.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum, sei  $T \subseteq M$  eine Teilmenge und sei  $a \in M$  ein Berührungspunkt von  $T$ . Es sei

$$f: T \longrightarrow L$$

eine Abbildung in einen weiteren metrischen Raum  $L$ . Dann heißt  $b \in L$  der *Grenzwert* (oder *Limes*) von  $f$  in  $a$ , wenn es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt mit der folgenden Eigenschaft: Für jedes  $x \in B(a, \delta) \cap T$  ist  $f(x) \in B(b, \epsilon)$ . In diesem Fall schreibt man

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Wenn der Grenzwert existiert, so ist er eindeutig bestimmt. Wenn  $a$  kein Berührungspunkt von  $T$  ist, so ist die obige Definition grundsätzlich auch formulierbar, doch dann ist jedes  $b$  ein Grenzwert.

**Notation 35.4.** In der Situation von Definition 35.3 wird der Grenzwert, falls er existiert, mit

$$\lim_{x \in T, x \rightarrow a} f(x) \text{ bzw. mit } \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

bezeichnet.

**Beispiel 35.5.** Es sei

$$M = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+ \right\} \cup \{0\},$$

(mit der von  $\mathbb{R}$  induzierten Metrik),

$$T = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

und  $a = 0$ , der ein Berührungspunkt von  $T$  ist. Eine Abbildung

$$f: T \longrightarrow L$$

in einen metrischen Raum  $L$  ist dasselbe wie eine Folge in  $L$ , da ja einfach jedem  $n \in \mathbb{N}_+$  ein Element  $x_n = f(\frac{1}{n}) \in L$  zugeordnet wird. Sei  $b \in L$ . Dann besitzt die Abbildung  $f$  in  $0$  den Grenzwert  $b$  genau dann, wenn die Folge gegen  $b$  konvergiert.

**Lemma 35.6.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum, sei  $T \subseteq M$  eine Teilmenge und sei  $a \in M$  ein Berührungspunkt von  $T$ . Es sei

$$f: T \longrightarrow L$$

eine Abbildung in einen weiteren metrischen Raum  $L$  und sei  $b \in L$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (1) Die Abbildung  $f$  besitzt in  $a$  den Grenzwert  $b$ .

- (2) Zu jeder offenen Menge  $V \subseteq L$  mit  $b \in V$  gibt es eine offene Menge  $U \subseteq M$  mit  $a \in U$  und mit  $f(U \cap T) \subseteq V$ .
- (3) Für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $T$ , die gegen  $a$  konvergiert, konvergiert die Bildfolge  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $b$ .

*Beweis.* (1)  $\Rightarrow$  (2). Da  $V$  offen ist gibt es ein  $\epsilon > 0$  mit  $U(b, \epsilon) \subseteq V$ . Aufgrund von (1) gibt es ein  $\delta > 0$  mit

$$f(T \cap U(a, \delta)) \subseteq U(b, \epsilon)$$

und wir können  $U = T \cap U(a, \delta)$  nehmen. (2)  $\Rightarrow$  (3). Sei eine gegen  $a$  konvergente Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T$  und ein  $\epsilon > 0$  gegeben. Für die offene Menge  $V = U(b, \epsilon)$  gibt es nach (2) eine offene Menge  $U \subseteq M$  mit  $a \in U$  und  $f(U \cap T) \subseteq V$ . Wegen der Offenheit von  $U$  gibt es auch ein  $\delta > 0$  mit  $U(a, \delta) \cap T \subseteq U \cap T$ . Da die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $a$  konvergiert, gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $x_n \in U(a, \delta)$  für alle  $n \geq N$ . Für diese  $n$  ist dann  $f(x_n) \in U(b, \epsilon)$ , d.h. die Bildfolge konvergiert gegen  $b$ . (3)  $\Rightarrow$  (1). Nehmen wir an, dass  $b$  nicht der Grenzwert ist. Dann gibt es ein  $\epsilon > 0$  derart, dass es für alle  $\delta > 0$  ein  $x \in T$  gibt mit  $x \in U(a, \delta)$  und mit  $f(x) \notin U(b, \epsilon)$ . Wir wenden diese Eigenschaft auf die Stammbrüche  $\delta = 1/n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , an und erhalten eine Folge

$$x_n \in U(a, 1/n) \text{ und } f(x_n) \notin U(b, \epsilon).$$

Die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert dann gegen  $a$ , die Bildfolge  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  aber nicht gegen  $b$ , im Widerspruch zu (3).  $\square$

**Lemma 35.7.** *Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum, sei  $T \subseteq M$  eine Teilmenge und sei  $a \in M$  ein Berührungspunkt von  $T$ . Es seien  $f: T \rightarrow \mathbb{K}$  und  $g: T \rightarrow \mathbb{K}$  Funktionen derart, dass die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  existieren. Dann gelten folgende Beziehungen.*

- (1) Die Summe  $f + g$  besitzt einen Grenzwert in  $a$ , und zwar ist

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

- (2) Das Produkt  $f \cdot g$  besitzt einen Grenzwert in  $a$ , und zwar ist

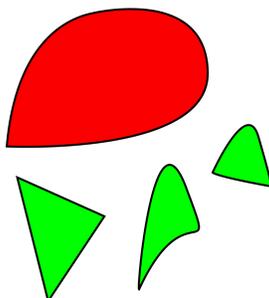
$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

- (3) Es sei  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in T$  und  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ . Dann besitzt der Quotient  $f/g$  einen Grenzwert in  $a$ , und zwar ist

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 35.9.  $\square$

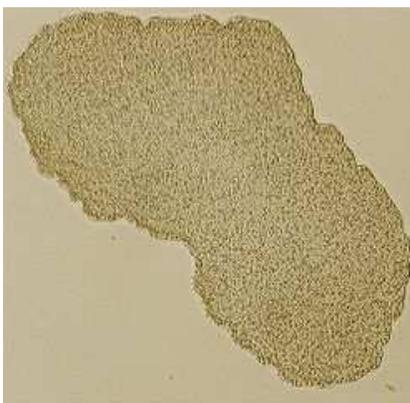
### 35.3. Zusammenhängende Räume.



Die rote Menge ist zusammenhängend, die grüne Menge nicht.

**Definition 35.8.** Ein metrischer Raum heißt *zusammenhängend*, wenn es genau zwei Teilmengen von  $X$  gibt (nämlich  $\emptyset$  und  $X$  selbst), die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Den leeren metrischen Raum bezeichnet man gemäß dieser Definition als nicht zusammenhängend (oder *unzusammenhängend*). Ein nichtleerer nicht zusammenhängender Raum  $X$  ist dadurch ausgezeichnet, dass man  $X = A \cup B$  als disjunkte Vereinigung schreiben kann, wobei  $A$  und  $B$  beide nichtleer und in  $X$  abgeschlossen (und damit auch beide offen) sind.



Das Tierchen *Trichoplax adhaerens* hat merkwürdige Zusammenhangseigenschaften. Es ist ein zusammenhängender Vielzeller. Wenn man es durch ein Sieb drückt, so dass die einzelnen Zellen voneinander getrennt werden, entstehen unzusammenhängende Zellen. Diese finden dann aber wieder zueinander und es entsteht erneut ein zusammenhängendes lebendiges Tierchen.

In der folgenden Aussage verstehen wir unter Intervalle auch die (einseitig oder beidseitig) unbeschränkten Intervalle, wie z.B.  $[a, +\infty]$ .

**Satz 35.9.** *Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}$  eine Teilmenge der reellen Zahlen. Dann ist  $T$  genau dann zusammenhängend, wenn  $T$  ein (nichtleeres) Intervall ist.*

*Beweis.* Es sei zuerst  $T$  kein Intervall. Wenn  $T$  leer ist, so ist  $T$  nach Definition nicht zusammenhängend. Sei also  $T \neq \emptyset$ , aber kein Intervall. Dann gibt es nach Aufgabe 6.23  $x, z \in T$  und  $y \notin T$  mit

$$x < y < z.$$

Dann ist die Menge

$$A = T \cap ]-\infty, y[ = T \cap ]-\infty, y]$$

sowohl offen als auch abgeschlossen in  $T$ , da man  $A$  sowohl als Durchschnitt von  $T$  mit einem offenen Intervall als auch als Durchschnitt mit einem abgeschlossenen Intervall schreiben kann. Wegen  $x \in A$  und  $z \notin A$  ist sie weder  $\emptyset$  noch  $T$ , also ist  $T$  nicht zusammenhängend. Sei nun  $T$  ein nicht-leeres Intervall und sei angenommen, dass es eine Teilmenge  $A \subseteq T$  mit  $A \neq \emptyset, T$  gibt, die in  $T$  sowohl offen als auch abgeschlossen sei. Es sei  $x \in A$  und  $y \in T$ ,  $y \notin A$ . Wir betrachten das (abgeschlossene und beschränkte) Intervall  $I = [x, y] \subseteq T$  (ohne Einschränkung sei  $x < y$ ) und setzen  $A' = A \cap [x, y]$ . Dies ist eine in  $I$  offene und abgeschlossene Teilmenge von  $I$ , die wegen  $x \in A'$  nicht leer ist und wegen  $y \notin A'$  nicht ganz  $I$  ist. D.h., es genügt, die Behauptung für ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall  $I = [x, y]$  zu zeigen und können davon ausgehen, dass es eine offene und abgeschlossene Teilmenge  $A$  mit  $x \in A$  und  $y \notin A$  gibt. Wir betrachten die reelle Zahl  $s = \sup(A)$ , die wegen Satz 7.5 existiert. Da ein abgeschlossenes Intervall vorliegt, gehört  $s$  zu  $I$  und aufgrund von Korollar 33.17 ist  $s \in A$ . Da  $A$  aber auch offen in  $T$  ist, gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $[s - \delta, s + \delta] \cap I \subseteq A$ . Da  $s$  das Supremum von  $A$  ist, folgt  $s = y$ . Dies ist ein Widerspruch zu  $y \notin A$ .  $\square$

Insbesondere sind also die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  zusammenhängend. Dies gilt auch für die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  und für den  $\mathbb{R}^n$  (siehe Satz 35.13). Für die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  gilt die vorstehende Aussage nicht, dort sind nämlich nur die einpunktigen Intervalle zusammenhängend, alle anderen Intervalle sind in  $\mathbb{Q}$  unzusammenhängend, da es zwischen zwei rationalen Zahlen stets irrationale Zahlen gibt, mit deren Hilfe man Teilmengen definieren kann, die zugleich offen als auch abgeschlossen sind.

#### 35.4. Zusammenhängende Räume und stetige Abbildungen.

**Satz 35.10.** *Es seien  $L$  und  $M$  metrische Räume und sei*

$$f: L \longrightarrow M$$

*eine stetige Abbildung. Es sei  $S \subseteq L$  eine zusammenhängende Teilmenge. Dann ist auch das Bild*

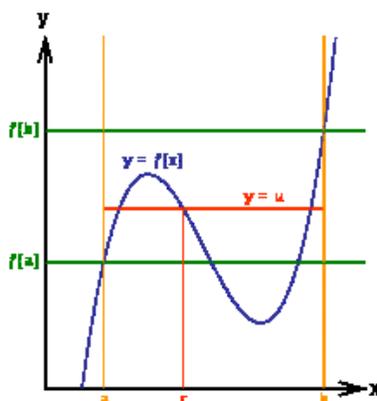
$$f(S)$$

*zusammenhängend.*

*Beweis.* Es sei  $f(S) = T$  und  $A \subseteq T$  eine offene und abgeschlossene Teilmenge, die weder leer noch ganz  $T$  sei. Die eingeschränkte Abbildung

$$f: S \longrightarrow T$$

ist ebenfalls stetig, und sie ist auch surjektiv. Daher ist  $f^{-1}(A)$  eine offene und abgeschlossene Teilmenge in  $S$ , die ebenfalls weder leer noch ganz  $S$  ist, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass  $S$  zusammenhängend ist.  $\square$



Daraus ergibt sich in Verbindung mit Satz 35.9 auch ein neuer Beweis für den Zwischenwertsatz aus Analysis I.

### 35.5. Wegzusammenhängende Räume.

**Definition 35.11.** Ein nichtleerer metrischer Raum  $X$  heißt *wegzusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten  $x, y \in X$  eine stetige Abbildung

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow X$$

mit  $\gamma(a) = x$  und  $\gamma(b) = y$  gibt.

**Lemma 35.12.** *Ein wegzusammenhängender metrischer Raum ist zusammenhängend.*

*Beweis.* Nehmen wir an, es gebe eine Zerlegung  $X = U_1 \uplus U_2$  in zwei nichtleere offene Teilmenge  $U_1$  und  $U_2$ . Sei  $x_1 \in U_1$  und  $x_2 \in U_2$ . Nach Voraussetzung gibt es eine stetige Abbildung

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow X$$

mit  $\gamma(a) = x_1$  und  $\gamma(b) = x_2$ . Dann ist

$$[a, b] = \gamma^{-1}(U_1) \uplus \gamma^{-1}(U_2)$$

eine disjunkte Zerlegung eines Intervalls in zwei nichtleere offene Mengen im Widerspruch zu Satz 35.9.  $\square$

Mit dieser Aussage lässt sich häufig zeigen, dass gewisse Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  zusammenhängend sind. Beispielsweise ist der  $\mathbb{R}^n$  selbst sowie die offenen und abgeschlossenen Kugeln darin zusammenhängend, siehe Aufgabe 35.25.

**Satz 35.13.** *Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge. Dann ist  $U$  genau dann zusammenhängend, wenn  $U$  wegzusammenhängend ist.*

*Beweis.* Die eine Richtung folgt aus Lemma 35.12. Für die andere Richtung sei  $U$  zusammenhängend. Zu einem Punkt  $x \in U$  betrachten wir die Menge

$$Z(x) = \{y \in U \mid \text{Es gibt einen stetigen Weg von } x \text{ nach } y\}.$$

Diese Menge ist offen, da offene Bälle wegzusammenhängend sind und man stetige Wege aneinander legen kann. Aus diesem Grund ist für zwei Punkte  $x_1, x_2 \in U$  entweder  $Z(x_1) = Z(x_2)$  oder aber  $Z(x_1) \cap Z(x_2) = \emptyset$ . Wenn  $U$  nicht wegzusammenhängend wäre, so wäre  $U \neq Z(x)$  und es gäbe eine Zerlegung

$$U = Z(x) \uplus \bigcup_{y \notin Z(x)} Z(y)$$

in nichtleere offene Teilmengen im Widerspruch zum Zusammenhang.  $\square$

Für nicht offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  gilt die vorstehende Äquivalenz nicht, siehe Aufgabe 35.29.

## 35. ARBEITSBLATT

### 35.1. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 35.1.** Bestimme den Abschluss von  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$

**Aufgabe 35.2.\***

Bestimme den Abschluss für die folgenden Teilmengen von  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ .

- (1) Sei  $k \in \mathbb{N}_+$  fixiert.  $S_k$  ist die Menge der reellen Zahlen  $\geq 0$ , deren Dezimalentwicklung nach der  $k$ -ten Nachkommastelle abbricht.
- (2)  $T$  ist die Menge aller reellen Zahlen  $\geq 0$ , deren Dezimalentwicklung irgendwo abbricht.

**Aufgabe 35.3.** Es sei  $T \subseteq M$  eine Teilmenge in einem metrischen Raum  $M$ . Zeige für den Abschluss von  $T$  die Gleichheit

$$\overline{T} = \bigcap_{T \subseteq A \subseteq M, A \text{ abgeschlossen}} A.$$

**Aufgabe 35.4.\***

Es sei  $T \subseteq M$  eine Teilmenge in einem metrischen Raum  $M$ . Zeige für den Abschluss von  $T$  die Gleichheit

$$\overline{T} = \{x \in M \mid \text{es gibt eine Folge } x_n \text{ in } T, \text{ die gegen } x \text{ konvergiert}\}.$$

- Aufgabe 35.5.** (1) Zeige, dass in einem metrischen Raum  $M$  der Abschluss einer offenen Kugel  $U(x, r)$  nicht die abgeschlossene Kugel  $B(x, r)$  sein muss.  
 (2) Zeige, dass in einem euklidischen Raum  $V$  der Abschluss einer offenen Kugel  $U(x, r)$  gleich der abgeschlossenen Kugel  $B(x, r)$  ist.

**Aufgabe 35.6.\***

Es sei  $M$  ein metrischer Raum, zu einer Menge  $A \subseteq M$  bezeichnet  $\overline{A}$  den Abschluss von  $A$ . Beweise oder widerlege die folgenden Eigenschaften

- (1) 
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$
  
 (2) 
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

**Aufgabe 35.7.** Zeige, dass der Grenzwert einer Funktion in einem Berührungspunkt der Definitionsmenge im Falle der Existenz eindeutig bestimmt ist.

**Aufgabe 35.8.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum, sei  $T \subseteq M$  eine Teilmenge und sei  $a \in M$  ein Berührungspunkt von  $T$ . Es sei

$$f: T \longrightarrow V$$

eine Abbildung in einen euklidischen Vektorraum  $V$  mit den Komponentenfunktionen

$$f_1, \dots, f_n: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

bezüglich einer Basis von  $V$ . Zeige, dass der Limes

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

genau dann existiert, wenn sämtliche Limiten

$$\lim_{x \rightarrow a} f_j(x)$$

existieren.

**Aufgabe 35.9.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum, sei  $T \subseteq M$  eine Teilmenge und sei  $a \in M$  ein Berührungspunkt von  $T$ . Es seien  $f: T \rightarrow \mathbb{K}$  und  $g: T \rightarrow \mathbb{K}$  Funktionen derart, dass die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  existieren. Zeige, dass die folgenden Beziehungen gelten.

(1) Die Summe  $f + g$  besitzt einen Grenzwert in  $a$ , und zwar ist

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

(2) Das Produkt  $f \cdot g$  besitzt einen Grenzwert in  $a$ , und zwar ist

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

(3) Es sei  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in T$  und  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ . Dann besitzt der Quotient  $f/g$  einen Grenzwert in  $a$ , und zwar ist

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

**Aufgabe 35.10.** Es seien  $D, E, F$  metrische Räume und sei

$$h: D \longrightarrow E$$

eine stetige Abbildung. Es sei  $P \in D$  ein Berührungspunkt von  $D \setminus \{P\}$  und

$$h(P) = Q \in E$$

ein Berührungspunkt von  $E \setminus \{Q\}$ . Es sei

$$g: E \setminus \{Q\} \longrightarrow F$$

eine Abbildung und es sei vorausgesetzt, dass

$$\lim_{y \rightarrow Q} g(y)$$

existiert. Zeige, dass dann auch

$$\lim_{x \rightarrow P} g(h(x))$$

existiert und mit  $\lim_{y \rightarrow Q} g(y)$  übereinstimmt.

**Aufgabe 35.11.** Es sei  $T \subseteq M$  eine Teilmenge eines metrischen Raumes,  $a \in M$  ein Berührungspunkt von  $T$ ,

$$g: T \longrightarrow L$$

eine Abbildung in einen weiteren metrischen Raum und  $b \in L$ . Zeige, dass für den Limes

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$$

genau dann gilt, wenn

$$\lim_{x \rightarrow a} d(g(x), b) = 0$$

gilt.

**Aufgabe 35.12.\***

Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge. Es sei

$$f: T \longrightarrow L$$

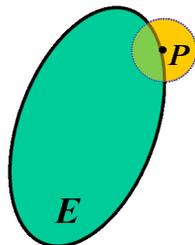
eine stetige Abbildung in einen weiteren metrischen Raum  $L$  und sei  $a \in M$ ,  $a \notin T$ , ein Punkt, der ein Berührungspunkt von  $T$  sei. Zeige, dass der Grenzwert

$$\lim_{x \in T, x \rightarrow a} f(x)$$

genau dann existiert, wenn  $f$  eine stetige Fortsetzung

$$\tilde{f}: T \cup \{a\} \longrightarrow L$$

besitzt.



Die nächsten Aufgaben verwenden den folgenden Begriff.

Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge. Ein Punkt  $x \in M$  heißt *Randpunkt* von  $T$ , wenn für jedes  $\epsilon > 0$  der offene Ball

$$U(x, \epsilon)$$

sowohl Punkte aus  $T$  als auch Punkte aus  $M \setminus T$  enthält.

Die Menge aller Randpunkte von  $T$  heißt *Rand* von  $T$ , geschrieben  $\text{Rand}(T)$ .

**Aufgabe 35.13.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge. Zeige, dass der Rand von  $T$  gleich dem Durchschnitt von  $\overline{T}$  und  $\overline{M \setminus T}$  ist.

**Aufgabe 35.14.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge. Zeige, dass der Rand von  $T$  abgeschlossen ist.

**Aufgabe 35.15.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge. Zeige, dass die Menge

$$T \cup \text{Rand}(T)$$

abgeschlossen ist.

**Aufgabe 35.16.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge. Zeige, dass die Menge

$$T \setminus \text{Rand}(T)$$

offen ist.

**Aufgabe 35.17.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge. Zeige, dass  $T$  genau dann abgeschlossen ist, wenn die Inklusion  $\text{Rand}(T) \subseteq T$  gilt.

**Aufgabe 35.18.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und sei  $M = A \cup B$  mit nichtleeren Teilmengen  $A, B \subseteq M$  und  $A \cap B = \emptyset$ . Es gebe ein  $\delta > 0$  mit

$$d(x, y) \geq \delta \text{ für alle } x \in A, y \in B.$$

Zeige, dass  $A$  (und auch  $B$ ) sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

**Aufgabe 35.19.** Zeige, dass in  $\mathbb{R}$  der nichtleere Durchschnitt von zusammenhängenden Teilmengen wieder zusammenhängend ist. Muss dies auch für den nichtleeren Durchschnitt von zusammenhängenden Teilmengen im  $\mathbb{R}^2$  gelten?

**Aufgabe 35.20.** Es sei  $I$  ein nichtleeres reelles Intervall und  $x \in I$  ein Punkt. Bestimme die Teilmengen von  $I \setminus \{x\}$ , die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

**Aufgabe 35.21.\***

Beweise den Zwischenwertsatz mit Satz 35.9 und Satz 35.10.

**Aufgabe 35.22.** Zeige, dass  $\mathbb{Q}$  nicht zusammenhängend ist.

**Aufgabe 35.23.** Bestimme die zusammenhängenden Teilmengen von  $\mathbb{Q}$ .

**Aufgabe 35.24.** Zeige, dass der  $\mathbb{R}^n$  wegzusammenhängend ist.

**Aufgabe 35.25.** Es sei  $T$  eine offene (oder abgeschlossene) Kugel im  $\mathbb{R}^n$ . Zeige, dass  $T$  wegzusammenhängend ist.

**Aufgabe 35.26.** Es sei  $n \geq 2$  und  $P \in \mathbb{R}^n$  ein Punkt. Zeige, dass  $\mathbb{R}^n \setminus \{P\}$  wegzusammenhängend ist.

**Aufgabe 35.27.** Zeige, dass ein reelles Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  wegzusammenhängend ist.

**Aufgabe 35.28.** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein reelles Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Zeige, dass der Graph von  $f$  (als Teilmenge von  $I \times \mathbb{R}$ ) wegzusammenhängend ist.

**Aufgabe 35.29.** Untersuche den Graph der durch

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

gegebenen Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  auf Zusammenhangseigenschaften.

### 35.2. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 35.30.** (4 Punkte)

Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge. Zeige, dass der Rand von  $T$  genau dann leer ist, wenn  $T$  sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

**Aufgabe 35.31.** (4 Punkte)

Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge. Es sei  $T$  zusammenhängend. Zeige, dass auch der Abschluss  $\bar{T}$  zusammenhängend ist.

**Aufgabe 35.32.** (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine offene, nicht zusammenhängende Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  mit der Eigenschaft, dass der Abschluss von  $U$  zusammenhängend ist.

**Aufgabe 35.33.** (5 Punkte)

Bestimme den Abschluss der Menge  $T = U(0, 1) \cap \mathbb{Q}^2$  in  $\mathbb{R}^2$ .

**Aufgabe 35.34.** (4 Punkte)

Es seien  $a, b, r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ , und sei

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$$

der Kreis mit dem Mittelpunkt  $M = (a, b)$  und dem Radius  $r$ . Es sei  $G$  eine Gerade in  $\mathbb{R}^2$  mit der Eigenschaft, dass es auf  $G$  mindestens einen Punkt  $P$  gibt mit  $d(M, P) \leq r$ . Zeige, dass  $K \cap G \neq \emptyset$  ist.

**Aufgabe 35.35.** (5 Punkte)

Zeige, dass die Kugeloberfläche

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

wegzusammenhängend ist. Man gebe dabei für je zwei Punkte einen expliziten Weg an, der diese Punkte stetig verbindet.

## 36. VORLESUNG - KOMPAKTHEIT

## 36.1. Weitere Stetigkeitsbegriffe.

Bei der Stetigkeit von Abbildungen zwischen metrischen Räumen weiß man lediglich, dass jede gewünschte Zielgenauigkeit durch eine gewisse Startgenauigkeit erreicht werden kann, wobei die Beziehung zwischen Ziel- und Startgenauigkeit vom jeweiligen Punkt abhängt. Wir führen einige stärkere Stetigkeitsbegriffe ein, bei denen es einen globaleren Zusammenhang zwischen Ziel- und Startgenauigkeiten gibt.

**Definition 36.1.** Es sei

$$f: L \longrightarrow M, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen  $L$  und  $M$ . Dann heißt  $f$  *gleichmäßig stetig*, wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit folgender Eigenschaft gibt: Für alle  $x, x' \in L$  mit  $d(x, x') \leq \delta$  ist  $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon$ .

**Definition 36.2.** Es sei

$$f: L \longrightarrow M, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen  $L$  und  $M$ . Die Abbildung heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es eine reelle Zahl  $c \geq 0$  mit

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

für alle  $x, y \in L$  gibt.

Eine solche Zahl  $c$  heißt *Lipschitz-Konstante*. Lipschitz-stetige Funktionen mit einer Lipschitz-Konstanten  $< 1$  bekommen einen eigenen Namen.

**Definition 36.3.** Es sei

$$f: L \longrightarrow M, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen  $L$  und  $M$ . Dann heißt  $f$  *stark kontrahierend*, wenn es eine nichtnegative reelle Zahl  $c < 1$  gibt mit

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

für alle  $x, y \in L$ .

Die Zahl  $c$  nennt man auch einen *Kontraktionsfaktor*.

### 36.2. Der Banachsche Fixpunktsatz.

Wenn man eine Karte von Osnabrück in die Osnabrücker Reithalle legt und einen beliebigen Punkt von Osnabrück nimmt, so definiert dieser Punkt einen Punkt auf der Karte und damit auch den zugehörigen Punkt in der Reithalle. Diesem Punkt entspricht ein Kartenpunkt, der wiederum ein Punkt in der Reithalle ist, und so weiter. Man erhält also eine Folge von Punkten, die - abhängig vom Maßstab - schnell konvergiert, und zwar gegen einen Punkt, der mit seinem Punkt auf der Karte übereinstimmt. Diese Beobachtung wird im *Banachschen Fixpunktsatz* präzisiert.

**Definition 36.4.** Es sei  $M$  eine Menge und

$$f: M \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Ein Element  $x \in M$  mit  $f(x) = x$  heißt *Fixpunkt* der Abbildung.

**Definition 36.5.** Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in einem metrischen Raum  $M$  heißt *Cauchy-Folge*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

Zu jedem  $\epsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\epsilon > 0$ , gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  derart, dass für alle  $n, m \geq n_0$  die Beziehung

$$d(x_n, x_m) \leq \epsilon$$

gilt.

**Definition 36.6.** Ein metrischer Raum  $M$  heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in  $M$  konvergiert.

Der euklidische Raum  $\mathbb{R}^n$  und jede abgeschlossene Teilmenge davon ist vollständig, siehe Aufgabe 36.8 und Aufgabe 36.21.

**Satz 36.7.** *Es sei  $M$  ein nicht-leerer vollständiger metrischer Raum und*

$$f: M \longrightarrow M$$

*eine stark kontrahierende Abbildung. Dann besitzt  $f$  genau einen Fixpunkt.*

*Beweis.* Es sei  $c \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq c < 1$ , ein Kontraktionsfaktor, d.h. es gelte

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

für alle  $x, y \in M$ . Wenn  $x, y \in M$  Fixpunkte sind, so folgt aus

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

sofort  $d(x, y) = 0$  und somit  $x = y$ , es kann also maximal einen Fixpunkt geben. Sei nun  $x \in M$  ein beliebiger Punkt. Wir betrachten die durch

$$x_0 = x \text{ und } x_n := f^n(x) := f(x_{n-1})$$

rekursiv definierte Folge in  $M$ . Wir setzen

$$a = d(f(x), x).$$

Dann gilt für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Beziehung

$$d(f^{n+1}(x), f^n(x)) \leq c \cdot d(f^n(x), f^{n-1}(x)) \leq c^n \cdot d(f(x), x) = c^n a.$$

Daher gilt aufgrund der Dreiecksungleichung und der geometrischen Reihe für  $n \geq m$  die Beziehung

$$\begin{aligned} & d(f^n(x), f^m(x)) \\ \leq & d(f^n(x), f^{n-1}(x)) + d(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x)) + \dots + d(f^{m+1}(x), f^m(x)) \\ \leq & a (c^{n-1} + c^{n-2} + \dots + c^{m+1} + c^m) \\ = & ac^m (c^{n-m-1} + c^{n-m-2} + \dots + c^2 + c^1 + 1) \\ \leq & c^m a \frac{1}{1-c}. \end{aligned}$$

Zu einem gegebenen  $\epsilon > 0$  wählt man  $n_0$  mit

$$c^{n_0} a \frac{1}{1-c} \leq \epsilon.$$

Dies zeigt, dass eine Cauchy-Folge vorliegt, die aufgrund der Vollständigkeit gegen ein  $y \in M$  konvergiert. Wir zeigen, dass dieses  $y$  ein Fixpunkt ist. Die Bildfolge  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $f(y)$ , da eine kontrahierende Abbildung stetig ist. Andererseits stimmt diese Bildfolge mit der Ausgangsfolge bis auf die Indizierung überein, so dass der Grenzwert  $y$  sein muss.  $\square$

### 36.3. Kompaktheit.

**Definition 36.8.** Eine Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{R}^m$  heißt *kompakt*, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

**Satz 36.9.** *Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}^m$  eine Teilmenge. Dann ist  $T$  genau dann kompakt, wenn jede Folge in  $T$  eine in  $T$  konvergente Teilfolge besitzt.*

*Beweis.* Wenn  $T$  nicht beschränkt ist, so gibt es zu jeder natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in T$  mit  $d(x_n, 0) \geq n$ . Diese Folge kann keine konvergente Teilfolge besitzen. Wenn  $T$  nicht abgeschlossen ist, so gibt es nach Satz 33.16 eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T$ , die gegen ein  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $x \notin T$ , konvergiert. Jede Teilfolge davon

konvergiert ebenfalls gegen  $x$ , so dass es keine in  $T$  konvergente Teilfolge geben kann.

Sei nun  $T$  abgeschlossen und beschränkt, und sei eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T$  vorgegeben. Für diese Folge ist insbesondere jede Komponentenfolge  $(x_{in})_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt. Wir betrachten die erste Komponente  $i = 1$ . Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass gibt es eine Teilfolge  $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  derart, dass die erste Komponente dieser Folge konvergiert. Aus dieser Teilfolge wählen wir nun eine weitere Teilfolge derart, dass auch die zweite Komponentenfolge konvergiert. Insgesamt erhält man durch dieses Verfahren eine Teilfolge, wo jede Komponentenfolge konvergiert. Nach Lemma 33.14 konvergiert dann die gesamte Teilfolge in  $\mathbb{R}^m$ . Da  $T$  abgeschlossen ist, liegt nach Satz 33.16 der Grenzwert in  $T$ .  $\square$

**Satz 36.10.** *Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  eine kompakte Teilmenge und sei*

$$f: T \longrightarrow M$$

*eine stetige Abbildung in einen metrischen Raum  $M$ . Dann ist  $f$  gleichmäßig stetig.*

*Beweis.* Wir nehmen an, dass  $f$  nicht gleichmäßig stetig ist. Dann gibt es ein  $\epsilon > 0$  derart, dass für kein  $\delta > 0$  die Beziehung  $f(U(x, \delta)) \subseteq U(f(x), \epsilon)$  für alle  $x \in T$  erfüllt ist. Insbesondere gibt es also für jedes  $n \in \mathbb{N}_+$  ein Paar  $x_n, y_n \in T$  mit  $d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}$ , aber mit  $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$ . Wegen der Kompaktheit gibt es aufgrund von Satz 36.9 eine Teilfolge  $(x_n)_{n \in N}$  (dabei ist  $N \subseteq \mathbb{N}$  unendlich) von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die gegen ein  $x \in T$  konvergiert. Die entsprechende Teilfolge  $(y_n)_{n \in N}$  konvergiert ebenfalls gegen  $x$ . Wegen der Stetigkeit konvergieren die beiden Bildfolgen  $(f(x_n))_{n \in N}$  und  $(f(y_n))_{n \in N}$  gegen  $f(x)$ . Dies ergibt aber einen Widerspruch, da  $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$  ist.  $\square$

**Satz 36.11.** *Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  eine kompakte Teilmenge und*

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

*eine stetige Abbildung. Dann ist auch das Bild  $f(T)$  kompakt.*

*Beweis.* Es sei  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in f(T)$  eine Folge, wobei wir  $y_n = f(x_n)$  mit  $x_n \in T$  schreiben können. Da  $T$  kompakt ist, gibt es nach Satz 36.9 eine konvergente Teilfolge  $x_{n_i}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , die gegen ein  $x \in T$  konvergiert. Aufgrund der Stetigkeit konvergiert auch die Bildfolge  $y_{n_i} = f(x_{n_i})$  gegen  $f(x)$ . Damit ist eine konvergente Teilfolge gefunden und  $f(T)$  ist kompakt nach Satz 36.9.  $\square$

**Satz 36.12.** *Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  eine nichtleere kompakte Teilmenge und sei*

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine stetige Funktion. Dann gibt es ein  $x \in T$  mit*

$$f(x) \geq f(x') \text{ für alle } x' \in T.$$

*D.h., dass die Funktion ihr Maximum (und ihr Minimum) annimmt.*

*Beweis.* Aufgrund von Satz 36.11 ist  $f(T)$  kompakt, also abgeschlossen und beschränkt. Insbesondere ist  $f(T) \leq M$  für eine reelle Zahl  $M$ . Wegen  $T \neq \emptyset$  besitzt  $f(T)$  wegen Satz 7.5 ein Supremum  $s$  in  $\mathbb{R}$ , das wegen der Abgeschlossenheit nach Korollar 33.18 zu  $f(T)$  gehört, also das Maximum von  $f(T)$  ist. Daher gibt es auch ein  $x \in T$  mit  $f(x) = s$ .  $\square$

**Lemma 36.13.** *Es sei  $P \in \mathbb{K}[X]$  ein Polynom. Dann gibt es ein  $w \in \mathbb{K}$  mit*

$$|P(z)| \geq |P(w)|$$

für alle  $z \in \mathbb{K}$ . D.h. das Minimum des Betrags eines Polynoms wird angenommen.

*Beweis.* Es sei

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

(mit  $a_n \neq 0$ ). Wir setzen

$$a := \max(|a_i|, i = 0, \dots, n-1)$$

und  $r := \max\left(\frac{na+|a_0|+1}{|a_n|}, 1\right)$ . Bei  $n = 0$  ist die Aussage klar, sei also  $n \geq 1$

Für  $z$  mit  $|z| \geq r$  gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |P(z)| &\geq \left| a_n z^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i \right| \\ &\geq |a_n| |z|^n - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| |z|^i \\ &\geq |a_n| |z|^n - \sum_{i=0}^{n-1} a |z|^{n-1} \\ &\geq |z|^{n-1} (|a_n| |z| - na) \\ &\geq |a_0| + 1 \\ &> |a_0|. \end{aligned}$$

Auf der kompakten Menge  $B(0, r)$  nimmt die stetige Funktion  $z \mapsto |P(z)|$  nach Satz 36.12 ihr Minimum an, d.h. es gibt ein  $w \in B(0, r)$  mit  $|P(z)| \geq |P(w)|$  für alle  $z \in B(0, r)$ . Wegen  $|a_0| = |P(0)| \geq |P(w)|$  und der Überlegung für  $z$  mit  $|z| \geq r$  ergibt sich, dass im Punkt  $w$  überhaupt das Minimum der Funktion angenommen wird.  $\square$

#### 36.4. Der Fundamentalsatz der Algebra.

**Satz 36.14.** *Jedes nichtkonstante Polynom  $P \in \mathbb{C}[X]$  über den komplexen Zahlen besitzt eine Nullstelle.*

*Beweis.* Es sei  $P \in \mathbb{C}[X]$  ein nichtkonstantes Polynom. Aufgrund von Lemma 36.13 gibt es ein  $z_0 \in \mathbb{C}$  mit  $|P(z)| \geq |P(z_0)|$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Wir müssen zeigen, dass dieses Betragsminimum 0 ist. Wir nehmen also an, dass

$|P(z_0)| > 0$  ist, und müssen dann ein  $z_1$  finden, an dem der Betrag des Polynoms kleiner wird. Durch Verschieben (d.h. indem wir die Situation in der neuen Variablen  $z - z_0$  betrachten) können wir annehmen, dass das Minimum an der Stelle 0 angenommen wird, und durch Division durch  $P(z_0)$  können wir annehmen, dass das Polynom im Nullpunkt den Wert 1 besitzt. D.h. wir können annehmen, dass ein Polynom

$$P = 1 + c_k z^k + c_{k+1} z^{k+1} + \dots + c_d z^d$$

mit  $k \geq 1$  und  $c_k \neq 0$  vorliegt, das im Nullpunkt das Betragsminimum annimmt. Wegen Korollar 21.9 gibt es ein  $\gamma \in \mathbb{C}$  mit  $\gamma^k = -c_k^{-1}$ . Wir setzen  $z = \gamma w$  (das ist eine Variablenstreckung). In der neuen Variablen  $w$  erhalten wir ein Polynom der Form

$$1 - w^k + w^{k+1}Q(w),$$

das nach wie vor im Nullpunkt das Betragsminimum annimmt (hierbei ist  $Q(w) \in \mathbb{C}[w]$  ein Polynom). Aufgrund von Satz 36.12 gibt es ein  $b \in \mathbb{R}_+$  mit  $|Q(w)| \leq b$  für alle  $w \in B(0, 1)$ . Für reelles  $w$  mit  $0 < w < \min(1, b^{-1})$  gilt

$$\begin{aligned} |1 - w^k + w^{k+1}Q(w)| &\leq |1 - w^k| + |w^{k+1}Q(w)| \\ &= 1 - w^k + w^{k+1}|Q(w)| \\ &= 1 - w^k(1 - w|Q(w)|) \\ &< 1. \end{aligned}$$

Wir haben also Stellen gefunden, wo der Betrag des Polynoms einen kleineren Wert annimmt, ein Widerspruch.  $\square$

## 36. ARBEITSBLATT

### 36.1. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 36.1.** Es sei

$$f: L \longrightarrow M, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen  $L$  und  $M$ , die Lipschitz-stetig sei. Zeige, dass  $f$  auch gleichmäßig stetig ist.

**Aufgabe 36.2.** Zeige, dass die Betragsfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto |x|,$$

Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1 ist.

**Aufgabe 36.3.** Zeige, dass eine lineare Abbildung  $\varphi: V \rightarrow W$  zwischen euklidischen Vektorräumen Lipschitz-stetig ist.

**Aufgabe 36.4.** Sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine wachsende Funktion, die zugleich eine starke Kontraktion sei. Zeige, dass dann die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) - x,$$

streng fallend ist.

**Aufgabe 36.5.** Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine wachsende differenzierbare Funktion mit

$$f'(x) \leq c$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  und ein  $c < 1$ . Zeige, dass  $f$  eine starke Kontraktion ist.

**Aufgabe 36.6.\***

Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}_{\leq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\leq 0}, x \longmapsto e^x - 1.$$

- (1) Zeige, dass 0 der einzige Fixpunkt von  $f$  ist.
- (2) Zeige, dass  $f$  Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1 ist.
- (3) Zeige, dass  $f$  keine starke Kontraktion ist.
- (4) Zeige, dass zu jedem Startwert  $x_0 \in \mathbb{R}_{\leq 0}$  die rekursiv definierte Folge  $x_{n+1} := f(x_n)$  gegen 0 konvergiert.

**Aufgabe 36.7.** Es seien  $L$  und  $M$  metrische Räume und es sei  $L \times M$  mit der Produktmetrik versehen. Zeige, dass eine Folge

$$z_n = (x_n, y_n) \in L \times M$$

genau dann eine Cauchy-Folge ist, wenn die beiden Komponentenfolgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy-Folgen sind.

**Aufgabe 36.8.** Zeige, dass der euklidische Raum  $\mathbb{R}^n$  vollständig ist.

**Aufgabe 36.9.** Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge in einem metrischen Raum  $M$  mit dem Grenzwert  $x$ . Zeige, dass die Teilmenge

$$T = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

(mit der induzierten Metrik) vollständig ist.

**Aufgabe 36.10.** Es sei  $M$  eine Menge und es sei

$$F: M \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zeige, dass  $F$  genau dann einen Fixpunkt besitzt, wenn der Durchschnitt des Graphen von  $F$  mit der Diagonalen  $\Delta = \{(x, x) \in M \times M \mid x \in M\}$  nicht leer ist.

**Aufgabe 36.11.\***

Die folgende Tabelle zeigt eine Auswahl der Gastgeberländer und der Weltmeister der Fußballweltmeisterschaften von 1970 bis 2014.

Jahr	Gastgeber	Weltmeister
1970	Mexiko	Brasilien
1974	Deutschland	Deutschland
1982	Spanien	Italien
1990	Italien	Deutschland
1994	USA	Brasilien
2002	Japan und Korea	Brasilien
2010	Südafrika	Spanien
2014	Brasilien	Deutschland

Es sei  $L = \{B, D, I, JuK, M, S, SA, U\}$  die Menge der Gastgeberländer und

$$\varphi: L \longrightarrow L$$

die Abbildung, die dem Gastgeberland den Weltmeister zuordnet. Gibt es auf  $L$  eine Metrik derart, dass  $L$  zu einem vollständigen metrischen Raum wird und dass  $\varphi$  eine starke Kontraktion ist?

**Aufgabe 36.12.** Es sei

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \|(x, y)\| \leq 1\}.$$

Man gebe ein Beispiel für eine starke Kontraktion

$$f: D \longrightarrow D,$$

die keinen Fixpunkt besitzt.

**Aufgabe 36.13.\***

Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  eine nichtleere Teilmenge,  $n \geq 1$ .

a)  $T$  sei nicht beschränkt. Zeige, dass es eine stetige Funktion

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt, deren Bild nicht beschränkt ist.

b)  $T$  sei nicht abgeschlossen. Zeige, dass es eine stetige Funktion

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt, deren Bild nicht beschränkt ist.

In der folgenden Aufgaben seien die Homomorphismenräume  $\text{Hom}(V, W)$  mit der Norm

$$\|\varphi\| := \sup(\|\varphi(v)\|, \|v\| = 1)$$

versehen.

**Aufgabe 36.14.** Zeige, dass eine lineare Abbildung

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

zwischen zwei euklidischen Vektorräumen  $V$  und  $W$  genau dann stark kontrahierend ist, wenn  $\|\varphi\| < 1$  ist.

**Aufgabe 36.15.** Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  abgeschlossen und beschränkt und sei  $M$  ein vollständiger metrischer Raum. Sei  $C$  die Menge der stetigen Abbildungen von  $T$  nach  $M$ . Definiere eine Metrik auf  $C$  derart, dass  $C$  selbst zu einem vollständigen metrischen Raum wird.

**Aufgabe 36.16.\***

Es sei  $M$  ein metrischer Raum und sei

$$f: M \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Mit  $f^{on}$  bezeichnen wir die  $n$ -fache Hintereinanderschaltung von  $f$  mit sich selbst.

a) Zeige, dass wenn  $f$  Lipschitz-stetig ist, dass dann auch  $f^{on}$  Lipschitz-stetig ist.

b) Man gebe ein Beispiel für eine Lipschitz-stetige Abbildung  $f$ , die keine starke Kontraktion, wo aber jedes  $f^{on}$  für  $n \geq 2$  eine starke Kontraktion ist.

c) Es sei  $f$  Lipschitz-stetig und es sei  $f^{ok}$  eine starke Kontraktion für ein gewisses  $k$ . Zeige, dass es ein  $n_0$  derart gibt, dass  $f^{on}$  für jedes  $n \geq n_0$  eine starke Kontraktion ist.

**Aufgabe 36.17.** Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}$  eine Teilmenge der reellen Zahlen. Zeige, dass  $T$  genau dann kompakt und zusammenhängend ist, wenn  $T$  ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall ist.

**Aufgabe 36.18.\***

Es seien  $T_1 \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $T_2 \subseteq \mathbb{R}^m$  Teilmengen und  $T_1 \times T_2 \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$  ihre Produktmenge.

a) Zeige, dass wenn  $T_1$  und  $T_2$  beschränkt sind, dass dann auch  $T_1 \times T_2$  beschränkt ist.

b) Zeige, dass wenn  $T_1$  und  $T_2$  kompakt sind, dass dann auch  $T_1 \times T_2$  kompakt ist.

**Aufgabe 36.19.** Es sei  $F \in \mathbb{C}[X]$  ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass  $F$  in Linearfaktoren zerfällt.

**Aufgabe 36.20.\***

Es sei  $P \in \mathbb{C}[X]$  ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto P(z),$$

surjektiv ist.

**36.2. Aufgaben zum Abgeben.****Aufgabe 36.21.** (2 Punkte)

Es sei  $M$  ein vollständiger metrischer Raum und  $T \subseteq M$  eine Teilmenge. Zeige, dass  $T$  genau dann vollständig ist, wenn  $T$  abgeschlossen ist.

**Aufgabe 36.22.** (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine starke Kontraktion

$$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},$$

die keinen Fixpunkt besitzt.

**Aufgabe 36.23.** (5 Punkte)

Zeige, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R}_{>1} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = 1 + \ln x,$$

folgende Eigenschaften besitzt: Es ist

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}_{>1}$ ,  $x \neq y$ , aber  $f$  ist nicht stark kontrahierend.

**Aufgabe 36.24.** (4 Punkte)

Es sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

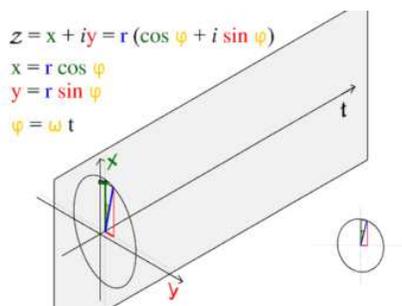
eine stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass  $f$  Lipschitz-stetig ist.

**Aufgabe 36.25.** (4 Punkte)

Es sei  $P \in \mathbb{R}[X]$  ein nichtkonstantes Polynom mit reellen Koeffizienten. Zeige, dass man  $P$  als ein Produkt von reellen Polynomen vom Grad 1 oder 2 schreiben kann.

## 37. VORLESUNG - DIFFERENZIERBARE KURVEN

## 37.1. Differenzierbare Kurven.



Eine Animation des Graphen der trigonometrischen Parametrisierung des Einheitskreises. Die grünen Punkte sind Punkte des Graphen.

Es sei  $I$  ein reelles Intervall,  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und

$$f: I \longrightarrow V$$

eine Abbildung. Eine solche Abbildung nennen wir auch eine *Kurve* oder einen *Weg* in  $V$ . Häufig stellt man sich dabei  $I$  als ein Zeitintervall und die Abbildung als einen Bewegungsprozess im Raum  $V$  vor. Jedem Zeitpunkt  $t \in I$  wird also ein Ortspunkt  $f(t) \in V$  zugeordnet. Es gibt mehrere Möglichkeiten, sich eine solche Abbildung zu veranschaulichen. Bei eindimensionalem  $V$ , also  $V \cong \mathbb{R}$ , ist der Graph die übliche Darstellungsweise. Einen Graphen gibt es bekanntlich zu jeder Abbildung. Bei  $V \cong \mathbb{R}^2$  ist der Graph eine Teilmenge von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3$ . Häufig skizziert man bei einer Kurve bei  $V = \mathbb{R}^2$  oder  $V = \mathbb{R}^3$  nur das Bild (man spricht auch von der *Bahn* oder der *Spur* der Kurve) der Kurve. Man beachte aber, dass das Bild nur eine Teilinformation der Abbildung aufzeigt.

Bei einem Bewegungsprozess interessiert man sich natürlich für die „Geschwindigkeit“ zu einem bestimmten Zeitpunkt. Dabei versteht man unter

Geschwindigkeit nicht nur deren Betrag (oder Norm), sondern auch deren Richtung (die Sprechweisen sind uneinheitlich).

Eine gleichmäßige Bewegung auf einem Kreis mit Mittelpunkt  $(0, 0)$  und Radius  $r$ , bei der eine volle Kreisumdrehung die Zeit  $a$  benötigt, die zum Zeitpunkt  $0$  im Punkt  $(r, 0)$  startet und gegen den Uhrzeigersinn verläuft, wird durch

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto \left( r \cos \frac{2\pi}{a}t, r \sin \frac{2\pi}{a}t \right),$$

beschrieben. Der Geschwindigkeitsvektor der Kreisbewegung ist zu jedem Zeitpunkt  $t$  *tangential* an den Ortspunkt auf dem Kreis (und steht senkrecht zum Ortsvektor). Die Norm der Geschwindigkeit ist bei einer Kreisbewegung konstant, aber die Richtung ändert sich kontinuierlich.

Die Vorstellung der *Momentangeschwindigkeit* wird durch den Begriff der *differenzierbaren Kurve* und ihrer Ableitung präzisiert, der eine direkte Verallgemeinerung von differenzierbaren Funktionen ist. Die Idee ist wieder, zu zwei Zeitpunkten  $t < t'$  den Durchschnittsgeschwindigkeitsvektor (die wir den *Differenzenquotienten* nennen)

$$\frac{f(t') - f(t)}{t' - t} \in V$$

zu betrachten und davon den Limes für  $t' \mapsto t$  zu bestimmen.

Um einen Limes bilden zu können, brauchen wir, wie schon im Eindimensionalen, eine Metrik (eine Abstandsfunktion) auf  $V$ . Wir werden daher euklidische Vektorräume betrachten, also reelle endlichdimensionale Vektorräume, für die ein Skalarprodukt erklärt ist. Für den Begriff des Skalarprodukt siehe die 32. Vorlesung. Ein Skalarprodukt auf  $V$  definiert über

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

eine Norm und über

$$d(u, v) := \|u - v\|$$

eine Metrik. Für einen Vektor  $v$ , der bezüglich einer Orthonormalbasis durch die Koordinaten

$$v = (v_1, \dots, v_n)$$

gegeben ist, lautet die Formel für die Norm

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}.$$

Da es auf jedem endlichdimensionalen Vektorraum  $V$  eine Basis  $v_1, \dots, v_n$  und damit eine dadurch induzierte bijektive lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow V, e_i \longmapsto v_i,$$

gibt, gibt es auch auf jedem reellen endlichdimensionalen Vektorraum ein Skalarprodukt und damit eine euklidische Metrik. Diese hängt jedoch von

der gewählten Basis ab. Allerdings hängen die offenen Mengen, der Konvergenzbegriff und Grenzwerteigenschaften nicht von einer solchen Wahl ab, wie das folgende Lemma zeigt.

**Lemma 37.1.** *Es sei  $V$  ein reeller endlichdimensionaler Vektorraum. Es seien zwei Skalarprodukte  $\langle -, - \rangle_1$  und  $\langle -, - \rangle_2$  auf  $V$  gegeben. Dann stimmen die über die zugehörigen Normen  $\|-\|_1$  und  $\|-\|_2$  definierten Topologien überein, d.h. eine Teilmenge  $U \subseteq V$  ist genau dann offen bezüglich der einen Metrik, wenn sie offen bezüglich der anderen Metrik ist.*

*Beweis.* Zu einem Skalarprodukt in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum gibt es nach dem Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren eine Orthonormalbasis  $u_1, \dots, u_n$ . Eine solche Orthonormalbasis definiert eine bijektive lineare Abbildung

$$\psi: \mathbb{R}^n \longrightarrow V, e_i \longmapsto u_i,$$

die eine Isometrie ist. Insbesondere ist eine Teilmenge  $U \subseteq V$  genau dann offen, wenn die entsprechende Menge  $\psi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  offen ist. Die beiden vorgegebenen Skalarprodukte entsprechen zwei bijektiven linearen Abbildungen  $\psi_1: \mathbb{R}^n \rightarrow V$  und  $\psi_2: \mathbb{R}^n \rightarrow V$ , wobei die Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$  jeweils auf eine Orthonormalbasis bezüglich des jeweiligen Skalarprodukts abgebildet wird. Diese Abbildungen sind Isometrien, so dass eine Teilmenge  $U \subseteq V$  genau dann bezüglich des Skalarproduktes  $\langle -, - \rangle_i$  offen ist, wenn das Urbild  $(\psi_i)^{-1}(U)$  offen im  $\mathbb{R}^n$  bezüglich der euklidischen Standardmetrik ist. Die Verknüpfungen

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

und

$$\psi_1 \circ \psi_2^{-1}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

sind lineare Abbildungen und nach Satz 34.10 stetig, so dass sich die offenen Mengen entsprechen: Ist nämlich  $U \subseteq V$  offen bezüglich der ersten Metrik, so ist  $\psi_1^{-1}(U)$  offen und damit ist wegen der Stetigkeit von  $\psi_1^{-1} \circ \psi_2$  auch

$$(\psi_1^{-1} \circ \psi_2)^{-1}(\psi_1^{-1}(U)) = \psi_2^{-1}(\psi_1(\psi_1^{-1}(U))) = \psi_2^{-1}(U)$$

offen, so dass  $U$  auch bezüglich der zweiten Metrik offen ist.  $\square$

Für uns bedeutet das, dass die im Folgenden zu entwickelnden Differenzierbarkeitsbegriffe nicht vom gewählten Skalarprodukt abhängt. Mit etwa mehr Aufwand kann man auch zeigen, dass eine beliebige (nicht notwendigerweise euklidische) Norm auf einem reellen endlichdimensionalen Vektorraum ebenfalls die gleiche Topologie definiert, und man genauso gut mit einer beliebigen Norm arbeiten könnte. Wenn wir es mit komplexen endlichdimensionalen Vektorräumen zu tun haben, so werden wir diese einfach als reelle Vektorräume (der doppelten Dimension) auffassen und ebenfalls mit einer euklidischen Norm versehen.

**Definition 37.2.** Es sei  $I$  ein reelles Intervall,  $V$  ein euklidischer Vektorraum und

$$f: I \longrightarrow V$$

eine Abbildung. Dann heißt  $f$  in  $t \in I$  *differenzierbar*, wenn der Limes

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

existiert. Dieser Limes heißt dann die *Ableitung* von  $f$  in  $t$  und wird mit

$$f'(t)$$

bezeichnet.

Die Ableitung ist selbst wieder ein Vektor in  $V$ . Statt Ableitung spricht man auch vom *Differentialquotienten* in einem (Zeit)-Punkt  $t$ .

**Definition 37.3.** Es sei  $I$  ein reelles Intervall,  $V$  ein euklidischer Vektorraum und

$$f: I \longrightarrow V$$

eine Abbildung. Dann heißt  $f$  *differenzierbar*, wenn  $f$  in jedem Punkt  $t \in I$  differenzierbar ist. Die Abbildung

$$I \longrightarrow V, t \longmapsto f'(t),$$

heißt dann die *Ableitung* von  $f$ .

Die Ableitung einer differenzierbaren Kurve ist damit selbst wieder eine Kurve. Wenn die Ableitung stetig ist, so nennt man die Kurve *stetig differenzierbar*. Wenn die Ableitung selbst differenzierbar ist, so nennt man die Ableitung der Ableitung die zweite Ableitung der Ausgangskurve.

Das folgende Lemma zeigt, dass dieser Differenzierbarkeitsbegriff nichts wesentlich neues ist, da er auf die Differenzierbarkeit von Funktionen in einer Variablen zurückgeführt werden kann.

**Lemma 37.4.** *Es sei  $I$  ein reelles Intervall,  $V$  ein euklidischer Vektorraum und*

$$f: I \longrightarrow V$$

*eine Abbildung. Es sei  $v_1, v_2, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$  und es seien*

$$f_j: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

*die zugehörigen Komponentenfunktionen von  $f$ . Es sei  $t \in I$ . Dann ist  $f$  genau dann differenzierbar in  $t$ , wenn sämtliche Funktionen  $f_j$  in  $t$  differenzierbar sind. In diesem Fall gilt*

$$f'(t) = f'_1(t) \cdot v_1 + f'_2(t) \cdot v_2 + \dots + f'_n(t) \cdot v_n.$$

*Beweis.* Sei  $t' \in I$ ,  $t' \neq t$ . Es ist

$$\begin{aligned} \frac{f(t') - f(t)}{t' - t} &= \frac{\sum_{j=1}^n f_j(t') \cdot v_j - \sum_{j=1}^n f_j(t) \cdot v_j}{t' - t} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{f_j(t') - f_j(t)}{t' - t} \cdot v_j. \end{aligned}$$

Nach Aufgabe 35.8 existiert der Limes links für  $t' \rightarrow t$  genau dann, wenn der entsprechende Limes rechts komponentenweise existiert.  $\square$

**Beispiel 37.5.** Die Kurve

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (t^2 - t^3, t \cdot \sin t, e^{-t})$$

ist in jedem Punkt  $t \in \mathbb{R}$  differenzierbar, und zwar ist

$$f'(t) = (2t - 3t^2, \sin t + t \cdot \cos t, -e^{-t}).$$

Bei der Formulierung von Rechenregeln für differenzierbare Wege (und allgemeiner differenzierbare Abbildungen in höherer Dimension) muss man etwas vorsichtiger sein als in der eindimensionalen Situation und insbesondere sicherstellen, dass die Verknüpfungen zusammenpassen.

**Lemma 37.6.** *Es sei  $I$  ein reelles Intervall und  $V$  ein euklidischer Vektorraum. Es seien*

$$f, g: I \rightarrow V$$

*zwei in  $t_0 \in I$  differenzierbare Kurven und es sei*

$$h: I \rightarrow \mathbb{R}$$

*eine in  $t_0$  differenzierbare Funktion. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Summe*

$$f + g: I \rightarrow V, t \mapsto f(t) + g(t),$$

*ist in  $t_0$  differenzierbar mit*

$$(f + g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0).$$

(2) *Das Produkt*

$$hf: I \rightarrow V, t \mapsto h(t) \cdot f(t),$$

*ist differenzierbar in  $t_0$  mit*

$$(hf)'(t_0) = h(t_0) \cdot f'(t_0) + h'(t_0) \cdot f(t_0).$$

*Insbesondere ist für  $c \in \mathbb{R}$  auch  $cf$  differenzierbar in  $t_0$  mit*

$$(cf)'(t_0) = cf'(t_0).$$

(3) Wenn  $h$  nullstellenfrei ist, so ist auch die Quotientenfunktion

$$\frac{f}{h}: I \longrightarrow V, t \longmapsto \frac{f(t)}{h(t)},$$

in  $t_0$  differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{h}\right)'(t_0) = \frac{h(t_0)f'(t_0) - h'(t_0)f(t_0)}{(h(t_0))^2}.$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 37.9. □

Man kann natürlich zwei Abbildungen  $f, g: I \rightarrow V$  nicht miteinander multiplizieren, so dass in der obigen Produktregel eine differenzierbare Kurve und eine differenzierbare Funktion auftreten. Ebenso muss die Kettenregel mit Bedacht formuliert werden. Später werden wir noch eine allgemeinere Kettenregel kennenlernen.

**Lemma 37.7.** *Es seien  $I$  und  $J$  zwei reelle Intervalle, es sei*

$$h: I \longrightarrow J, s \longmapsto h(s),$$

*eine in  $s_0 \in I$  differenzierbare Funktion und es sei*

$$f: J \longrightarrow V, t \longmapsto f(t),$$

*eine in  $t_0 = h(s_0)$  differenzierbare Kurve in einem euklidischen Vektorraum  $V$ . Dann ist auch die zusammengesetzte Kurve*

$$f \circ h: I \longrightarrow V, s \longmapsto f(h(s)),$$

*in  $s_0$  differenzierbar und es gilt*

$$(f \circ h)'(s_0) = h'(s_0) \cdot f'(h(s_0)).$$

*Beweis.* Es seien  $f_1, \dots, f_n$  die Komponentenfunktionen von  $f$  bezüglich einer Basis von  $V$ . Nach der Kettenregel in einer Variablen gilt

$$(f_i \circ h)'(s_0) = h'(s_0) \cdot f'_i(h(s_0))$$

für jedes  $i = 1, \dots, n$ . Dies ist wegen Lemma 37.4 die Behauptung. □

In der vorstehenden Situation sollte man sich  $h$  als eine Umparametrisierung der Zeit vorstellen. Die Bahn der Kurve bleibt erhalten, es ändert sich aber die Geschwindigkeit und eventuell die Orientierung, mit der die Bahn durchlaufen wird. Wenn  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Negation ist, so wird die Kurve mit umgekehrter Zeitrichtung durchlaufen. Die Aussage besagt in diesem Fall, dass die Ableitung der umgekehrten Kurve negiert werden muss.

**Lemma 37.8.** *Es sei  $I$  ein reelles Intervall,  $V$  und  $W$  seien euklidische Vektorräume und es sei*

$$f: I \longrightarrow V$$

*eine differenzierbare Kurve. Es sei*

$$L: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann ist auch die zusammengesetzte Abbildung

$$L \circ f: I \longrightarrow W, t \longmapsto L(f(t)),$$

differenzierbar und es gilt

$$(L \circ f)'(t) = L(f'(t)).$$

*Beweis.* Sei  $t_0 \in I$  fixiert und sei  $t \in I, t \neq t_0$ . Wegen der Linearität ist

$$L\left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}\right) = \frac{L(f(t)) - L(f(t_0))}{t - t_0}.$$

D.h. der Differenzenquotient zu  $L \circ f$  ist gleich dem Wert unter  $L$  des Differenzenquotienten zu  $f$ . Wegen der Voraussetzung und der Stetigkeit einer linearen Abbildung existiert der Limes links für  $t \rightarrow t_0$ , also existiert auch der Limes rechts, und das bedeutet, dass der Differentialquotient der zusammengesetzten Abbildung  $L \circ f$  existiert und mit dem Wert unter  $L$  des Differentialquotienten zu  $f$  übereinstimmt.  $\square$

## 37. ARBEITSBLATT

### 37.1. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 37.1.** Skizziere die Bilder und die Graphen der folgenden Kurven im  $\mathbb{R}^2$ .

- (1)  $t \longmapsto (t^2, t^2)$ ,
- (2)  $t \longmapsto (t^2, -t^2)$ ,
- (3)  $t \longmapsto (t^2, t)$ ,
- (4)  $t \longmapsto (2t, 3t)$ ,
- (5)  $t \longmapsto (t^2, t^3)$ .

**Aufgabe 37.2.** Man gebe ein Beispiel für verschiedene Kurven

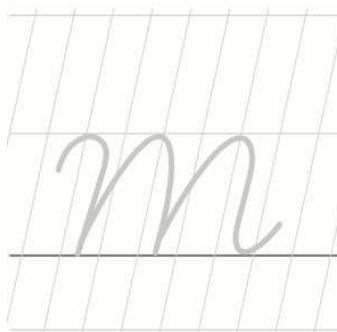
$$f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

deren Bilder (Bahnen) aber übereinstimmen.

**Aufgabe 37.3.** Wir fassen das Schreiben (Schreibschrift) eines Buchstabens (oder eines Wortes) als eine stetige Kurve im  $\mathbb{R}^2$  auf, die auf einem abgeschlossenen Intervall (oder auf einer disjunkten Vereinigung von solchen Intervallen) definiert ist.

- (1) In welcher Beziehung steht die Bahn eines Schreibweges und der Buchstabe?
- (2) Für welche Buchstaben ist das (zügige) Schreiben eine injektive Abbildung?

- (3) Für welche Buchstaben braucht man für das stetige Schreiben mehrere Definitionsintervalle?
- (4) Führe für verschiedene Buchstaben die zugehörigen Komponentenwege als zeitabhängigen Bewegungsvorgang auf  $\mathbb{R}$  durch. Skizziere die Graphen dieser Komponentenfunktionen.
- (5) Versuche, die Graphen des Schreibvorganges eines Buchstabens zu skizzieren.
- (6) Kann man das Schreiben von Buchstaben differenzierbar realisieren? In welchen Punkten besitzt der Weg die Geschwindigkeit 0?
- (7) Für welche Buchstaben gibt es eine einfache mathematische Beschreibung?



#### Aufgabe 37.4.\*

Beschreibe (ohne weitere Begründung) den Lauf des Sekundenzeigers einer Uhr als eine differenzierbare Kurve auf dem Einheitskreis (der Zeiger soll also im Zeitintervall  $[0, 60]$  eine Runde im Uhrzeigersinn drehen und zum Zeitpunkt 0 „oben“ starten).

**Aufgabe 37.5.** Bestimme die Ableitung der Kurve

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto f(t) = \left( t^2 - \sin t, e^{-t} + 2t^3, t \cdot \sinh t + \frac{1}{t^2 + 1} \right),$$

in jedem Punkt  $t \in \mathbb{R}$ .

#### Aufgabe 37.6.\*

Bestimme die Ableitung der Kurve

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto f(t) = (t \sin t, t^3 e^{-t}),$$

in jedem Punkt  $t \in \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 37.7.** Bestimme die Ableitung der Kurve

$$\varphi: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto \left( \frac{\sin t^2}{t^5}, 4t, \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \right),$$

für jeden Punkt  $t \in \mathbb{R}_+$ .

**Aufgabe 37.8.** Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum und  $v, w \in V$ . Zeige, dass die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow V, t \longmapsto tv + w,$$

differenzierbar ist mit der Ableitung  $f'(t) = v$ .

**Aufgabe 37.9.** Es sei  $I$  ein reelles Intervall und  $V$  ein euklidischer Vektorraum. Es seien

$$f, g: I \longrightarrow V$$

zwei in  $t_0 \in I$  differenzierbare Kurven und es sei

$$h: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in  $t_0$  differenzierbare Funktion. Zeige, dass folgende Aussagen gelten.

(1) Die Summe

$$f + g: I \longrightarrow V, t \longmapsto f(t) + g(t),$$

ist in  $t_0$  differenzierbar mit

$$(f + g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0).$$

(2) Das Produkt

$$hf: I \longrightarrow V, t \longmapsto h(t)f(t),$$

ist differenzierbar in  $t_0$  mit

$$(hf)'(t_0) = h(t_0)f'(t_0) + h'(t_0)f(t_0).$$

Insbesondere ist für  $c \in \mathbb{R}$  auch  $cf$  differenzierbar in  $t_0$  mit

$$(cf)'(t_0) = cf'(t_0).$$

(3) Wenn  $h$  nullstellenfrei ist, so ist auch die Quotientenfunktion

$$\frac{f}{h}: I \longrightarrow V, t \longmapsto \frac{f(t)}{h(t)},$$

in  $t_0$  differenzierbar mit

$$\left( \frac{f}{h} \right)'(t_0) = \frac{h(t_0)f'(t_0) - h'(t_0)f(t_0)}{(h(t_0))^2}.$$

**Aufgabe 37.10.\***

Es seien

$$f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

differenzierbare Kurven. Berechne die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \langle f(t), g(t) \rangle.$$

Formuliere das Ergebnis mit dem Skalarprodukt.

**Aufgabe 37.11.\***

Es sei  $h: I \rightarrow V$  eine zweimal differenzierbare Kurve in einem euklidischen Vektorraum  $V$ . Zeige, dass bei  $h'(t) \neq 0$  die Gleichheit

$$\|h'(t)\|' = \frac{\langle h'(t), h''(t) \rangle}{\langle h'(t), h'(t) \rangle} \|h'(t)\|$$

gilt.

**Aufgabe 37.12.\***

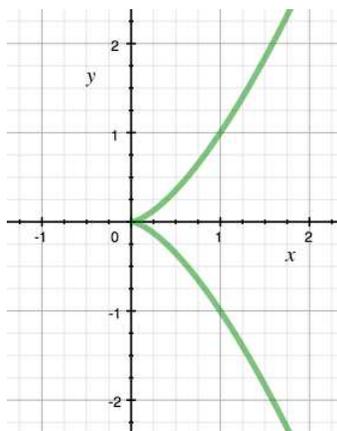
Wir betrachten die Funktionen

$$B_0(t) = (1-t)^2, \quad B_1(t) = 2t(1-t) \quad \text{und} \quad B_2(t) = t^2.$$

Es seien  $v_0, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$  drei Vektoren. Wir definieren die Kurve

$$f(t) := B_0(t)v_0 + B_1(t)v_1 + B_2(t)v_2.$$

- Berechne  $f(0)$  und  $f(1)$ .
- Berechne  $f'(t)$ .
- Zeige, dass  $f'(0)$  ein Vielfaches von  $v_1 - v_0$  und  $f'(1)$  ein Vielfaches von  $v_2 - v_1$  ist.
- Skizziere für  $v_0 = (0, 1)$ ,  $v_1 = (1, 1)$  und  $v_2 = (2, 0)$  das Bild der Kurve  $f(t)$  für  $0 \leq t \leq 1$ .



**Aufgabe 37.13.** Das Bild der durch

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t^2, t^3),$$

definierten Kurve heißt *Neilsche Parabel*. Zeige, dass ein Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  genau dann zu diesem Bild gehört, wenn er die Gleichung  $x^3 = y^2$  erfüllt.

**Aufgabe 37.14.** Sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t^2, t^3).$$

Bestimme die Punkte  $t_0 \in \mathbb{R}$ , für die der Abstand der zugehörigen Kurvenpunkte  $f(t) = (t^2, t^3)$  zum Punkt  $(1, 0)$  minimal wird.

**Aufgabe 37.15.** Wir betrachten die Kurve

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t^2 - 1, t^3 - t).$$

a) Zeige, dass die Bildpunkte  $(x, y)$  der Kurve die Gleichung

$$y^2 = x^2 + x^3$$

erfüllen.

b) Zeige, dass jeder Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  mit  $y^2 = x^2 + x^3$  zum Bild der Kurve gehört.

c) Zeige, dass es genau zwei Punkte  $t_1$  und  $t_2$  mit identischem Bildpunkt gibt, und dass ansonsten die Abbildung injektiv ist.

**Aufgabe 37.16.** Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine differenzierbare Kurve und  $P \in \mathbb{R}^n$  ein Punkt. Es sei  $t_0 \in \mathbb{R}$  derart, dass der Abstand  $d(P, f(t))$  (zwischen  $P$  und einem Kurvenpunkt) in  $t_0$  minimal werde. Zeige, dass  $P - f(t_0)$  senkrecht zu  $f'(t_0)$  ist.

**Aufgabe 37.17.** Betrachte die differenzierbare Kurve

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t^3, e^t).$$

Bestimme einen Kreis (mit Mittelpunkt und Radius) und eine Parametrisierung  $\psi$  dieses Kreises derart, dass  $\psi$  und  $\varphi$  für  $t = 1$  bis zur zweiten Ableitung übereinstimmen.

**Aufgabe 37.18.** Es sei  $G = \{(x, |x|) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$  der Graph der reellen Betragsfunktion. Man gebe eine differenzierbare Kurve

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

an, deren Bild genau  $G$  ist.

**Aufgabe 37.19.\***

Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum der Dimension  $\geq 2$  und  $v, w \in V$  Punkte mit

$$\|v\| = \|w\|.$$

Zeige, dass es eine stetig differenzierbare Kurve

$$\gamma: [0, 1] \longrightarrow V, t \longmapsto \gamma(t),$$

mit  $\gamma(0) = v$ ,  $\gamma(1) = w$  und  $\|\gamma(t)\| = \|v\|$  für alle  $t \in [0, 1]$  gibt.

**Aufgabe 37.20.** Es sei  $P \in \mathbb{R}^n$  ein Punkt und sei  $I = ]-1, 1[$ . Wir betrachten die Menge

$$M = \{f: I \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f \text{ differenzierbar, } f(0) = P\}.$$

Wir nennen zwei Kurven  $f, g \in M$  *tangential äquivalent*, wenn

$$f'(0) = g'(0)$$

ist.

- Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.
- Finde den einfachsten Vertreter für die Äquivalenzklassen.
- Man gebe für jede Klasse einen weiteren Vertreter an.
- Beschreibe die Menge der Äquivalenzklassen (also die Quotientenmenge).

**Aufgabe 37.21.** Es seien  $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^2$  endlich viele Punkte und sei  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\}$ . Zeige, dass es zu je zwei Punkten  $P, Q \in M$  eine differenzierbare Kurve

$$\varphi: [0, 1] \longrightarrow M$$

mit  $\varphi(0) = P$  und  $\varphi(1) = Q$  gibt.

### 37.2. Aufgaben zum Abgeben.

#### Aufgabe 37.22. (5 (1+2+2) Punkte)

Betrachte die Kurve

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, x \longmapsto (x^2 - x, x^3 + \sinh x, \sin(x^2)).$$

- a) Bestimme die Ableitung von  $f$  in jedem Punkt  $x$ .  
 b) Bestimme die Komponentenfunktionen von  $f$  bezüglich der neuen Basis

$$(1, 0, 3), (2, 4, 6), (1, -1, 0)$$

von  $\mathbb{R}^3$ .

- c) Berechne die Ableitung in der neuen Basis direkt und mit Hilfe von Lemma 37.8.

#### Aufgabe 37.23. (3 Punkte)

Für welche Punkte  $t \in \mathbb{R}$  ist der Abstand der Bildpunkte der Kurve

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (2 \sin t, 3 \cos t),$$

zum Nullpunkt  $(0, 0)$  maximal, für welche minimal?

#### Aufgabe 37.24. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \subseteq \mathbb{R}^2,$$

die einem Punkt  $t \in \mathbb{R}$  den eindeutigen Schnittpunkt  $\neq (0, -1)$  der durch die beiden Punkte  $(t, 1)$  und  $(0, -1)$  gegebenen Geraden  $G_t$  mit dem Einheitskreis

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

zuordnet. Zeige, dass diese Abbildung wohldefiniert ist und bestimme die funktionalen Ausdrücke, die diese Abbildung beschreiben. Zeige, dass  $f$  differenzierbar ist. Ist  $f$  injektiv, ist  $f$  surjektiv?

#### Aufgabe 37.25. (4 (2+1+1) Punkte)

Auf einem Jahrmarkt befindet sich ein „Doppel-Karussell“, bei dem sich ein Sitz alle 2 Sekunden um einen kleinen Kreis mit Radius 3 Meter dreht, wobei sich der Mittelpunkt dieses Kreises seinerseits alle 8 Sekunden um einen großen Kreis mit Radius 10 Meter dreht. Beide Drehungen sind im Uhrzeigersinn. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  besitzt der Sitz zum Mittelpunkt den Abstand 13 Meter.

- a) Beschreibe diesen Bewegungsvorgang (in einem geeigneten Koordinatensystem) als eine differenzierbare Kurve.<sup>2</sup>
- b) Berechne den Geschwindigkeitsvektor dieser Bewegung zu jedem Zeitpunkt.
- c) Berechne die Geschwindigkeit (den Betrag des Geschwindigkeitsvektors) dieser Bewegung zu jedem Zeitpunkt.

**Aufgabe 37.26.** (6 Punkte)

Bestimme in der Situation von Aufgabe 37.25 die Zeitpunkte, an denen die Geschwindigkeit maximal oder minimal wird.

**Aufgabe 37.27.** (5 Punkte)

Man gebe eine differenzierbare Kurve

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

an, deren Bild genau das Achsenkreuz ist.

### 38. VORLESUNG - KURVENLÄNGEN

#### 38.1. Die Mittelwertabschätzung für differenzierbare Kurven.

**Satz 38.1.** *Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum und*

$$f: [a, b] \longrightarrow V, t \longmapsto f(t),$$

*eine differenzierbare Kurve. Dann gibt es ein  $c \in [a, b]$  mit*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq (b - a) \cdot \|f'(c)\|.$$

*Beweis.* Wenn  $f(a) = f(b)$  ist, so ist die Aussage trivialerweise richtig. Sei also  $f(a) \neq f(b)$ . Dann ist  $u_1 = \frac{f(b) - f(a)}{\|f(b) - f(a)\|}$  nach dem Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren Teil einer Orthonormalbasis von  $V$ . Es seien  $f_1, \dots, f_n$  die Komponentenfunktionen von  $f$  bezüglich dieser Basis. Wir wenden den Mittelwertsatz für eine Variable auf die erste Komponentenfunktion  $f_1$  an. Es gibt also ein  $c \in ]a, b[$  mit der Eigenschaft

$$f_1(b) - f_1(a) = (b - a) \cdot f_1'(c)$$

und damit auch

$$|f_1(b) - f_1(a)| = |b - a| \cdot |f_1'(c)|.$$

---

<sup>2</sup>Gefragt ist hier nach der mathematischen Überlagerung der beiden Bewegungen, d.h. die große Bewegung verdreht nicht das Koordinatensystem der kleinen Bewegung. Eine volle Umdrehung des kleinen Kreises liegt vor, wenn der Verbindungspfeil aus dem äußeren Drehmittelpunkt und dem Sitz wieder in die gleiche Himmelsrichtung zeigt. Bei der mechanischen Überlagerung, die vorliegt, wenn die Umdrehungsgeschwindigkeit des äußeren montierten Motors feststeht, sieht dies anders aus.

Da man die Längenmessung mit jeder Orthonormalbasis durchführen kann, gilt

$$\begin{aligned}
 \|f(b) - f(a)\| &= \|(f_1(b) - f_1(a))u_1\| \\
 &= |f_1(b) - f_1(a)| \\
 &= |b - a| \cdot |f_1'(c)| \\
 &\leq |b - a| \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (f_i'(c))^2} \\
 &= |b - a| \cdot \|f'(c)\|.
 \end{aligned}$$

□

**Beispiel 38.2.** Wir betrachten die *trigonometrische Parametrisierung* des Einheitskreises, also die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (\cos t, \sin t).$$

Diese Abbildung ist für jedes  $t \in \mathbb{R}$  differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Die Norm dieser Ableitung ist zu jedem Zeitpunkt gleich

$$\|f'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1.$$

Wählen wir das Intervall  $[0, 2\pi]$ , so ist

$$f(0) = (1, 0) = f(2\pi).$$

Dies bedeutet, dass in der Mittelwertabschätzung nicht Gleichheit gelten kann.

### 38.2. Länge von Kurven.

Wir arbeiten im  $\mathbb{R}^n$ , versehen mit der euklidischen Metrik. Zu einer Kurve

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \longmapsto f(t),$$

die wir uns als einen von der Zeit abhängigen Bewegungsvorgang im Raum vorstellen, wollen wir die Länge der Kurve definieren. Die Länge soll dabei den insgesamt zurückgelegten Weg beschreiben, nicht die Länge der zurückgelassenen Spur oder den Abstand von Start- und Zielpunkt.

**Definition 38.3.** Es sei  $[a, b]$  ein kompaktes Intervall und

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Abbildung. Zu einer Unterteilung

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k-1} \leq t_k = b$$

nennt man

$$[P_0, P_1, \dots, P_k] = [f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_k)]$$

den zugehörigen *Streckenzug*.

Dabei sollte man sich die Unterteilung als eine Zeiteinteilung vorstellen und die Punkte  $P_i = f(t_i)$  als die zugehörigen Ortspunkte der durch  $f$  beschriebenen Bewegung im  $\mathbb{R}^n$ . Strenggenommen ist der Streckenzug einfach die geordnete Folge der Punkte, es ist aber suggestiver, sich darunter die stückweise lineare Verbindung dieser Punkte vorzustellen.

**Definition 38.4.** Zu einer Punktfolge

$$P_0, P_1, \dots, P_k \in \mathbb{R}^n$$

nennt man

$$L(P_0, \dots, P_k) = \sum_{i=1}^k d(P_i, P_{i-1})$$

die *Gesamtlänge* des *Streckenzugs*  $[P_0, P_1, \dots, P_k]$ .

**Definition 38.5.** Es sei  $[a, b]$  ein kompaktes Intervall und

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Abbildung. Dann nennt man

$$L(f) = \sup (L(f(t_0), \dots, f(t_k))),$$

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k-1} \leq t_k = b \text{ Unterteilung, } k \in \mathbb{N}$$

die *Kurvenlänge* von  $f$ . Wenn  $L(f)$  endlich ist, so heißt die Kurve  $f$  *rektifizierbar*.

Man nimmt hier also das Supremum über alle möglichen Unterteilungen des Definitionsintervalls. Ohne zusätzliche Eigenschaften der Kurve kann man nicht erwarten, dass man die Kurvenlänge effektiv bestimmen kann. Wenn die Kurve aber stetig differenzierbar ist, so lässt sich die Länge über ein Integral berechnen, wie die folgende Aussage zeigt. Inhaltlich gesprochen bedeutet sie, dass wenn sich beispielsweise ein Fahrzeug in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  bewegt, man die Gesamtlänge der zurückgelegten Strecke kennt, sobald man nur zu jedem Zeitpunkt die momentane Geschwindigkeit (und zwar lediglich ihre Norm, die Richtung muss man nicht kennen) kennt. Die Länge ist dann das Integral über die Norm der Geschwindigkeit.

**Satz 38.6.** *Es sei  $[a, b]$  ein kompaktes Intervall und*

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

*eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann ist  $f$  rektifizierbar und für die Kurvenlänge gilt*

$$L(f) = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

*Beweis.* Da die Norm stetig ist, existiert nach Satz 24.3 das rechte Integral, und zwar ist es gleich dem Infimum über alle Treppenintegrale zu oberen Treppenfunktionen der Funktion  $t \mapsto \|f'(t)\|$ . Diese Treppenintegrale werden

zu einer Unterteilung  $a = t_0 \leq \dots \leq t_k = b$  durch  $\sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1})w_i$  mit  $w_i = \sup(\|f'(t)\|, t_{i-1} \leq t \leq t_i)$  gegeben. Andererseits steht nach der Definition der Kurvenlänge links das Supremum über die zu einer solchen Unterteilung gehörigen Summen

$$\sum_{i=1}^k \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|.$$

Aufgrund der Mittelwertabschätzung gilt

$$\|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \leq (t_i - t_{i-1}) \cdot \sup(\|f'(t)\|, t_{i-1} \leq t \leq t_i).$$

Durch Aufsummieren ergibt sich daher die Abschätzung

$$\sum_{i=1}^k \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \leq \sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1}) \cdot \sup(\|f'(t)\|, t_{i-1} \leq t \leq t_i).$$

Hierbei müssen wir links das Supremum und rechts das Infimum über alle Unterteilungen nehmen. Nehmen wir an, dass das Supremum  $u$  der linken Seite größer als das Infimum  $v$  der rechten Seite ist. Dann gibt es eine Unterteilung derart, dass die Längensumme links zu dieser Unterteilung mindestens gleich  $u - \frac{1}{3}(u - v)$ , und eine Unterteilung derart, dass das Treppenintegral rechts höchstens gleich  $v + \frac{1}{3}(u - v)$  ist. Wir können zur gemeinsamen Verfeinerung übergehen und annehmen, dass es sich um die gleiche Unterteilung handelt, und erhalten einen Widerspruch. Das Supremum der linken Seite ist also durch das Infimum der rechten Seite beschränkt. D.h. die Kurve ist rektifizierbar und es gilt

$$L(f) \leq \int_a^b \|f'(t)\| dt \leq (b - a) \cdot \sup(\|f'(t)\|, t \in [a, b]).$$

Diese Beziehung gilt auch für jedes beliebige Teilintervall  $[s, s'] \subseteq [a, b]$ . Es sei  $L_a^s(f)$  die Länge der auf  $[a, s]$  definierten Kurve. Es genügt dann zu zeigen, dass diese Funktion nach  $s$  ableitbar und eine Stammfunktion zu  $t \mapsto \|f'(t)\|$  ist. Für den zugehörigen Differenzenquotienten  $\frac{L_a^{s'}(f) - L_a^s(f)}{s' - s} = \frac{L_s^{s'}(f)}{s' - s}$  in einem Punkt  $s \in [a, b]$  gelten die Abschätzungen ( $s' > s$ )

$$\begin{aligned} \frac{\|f(s') - f(s)\|}{s' - s} &\leq \frac{L_s^{s'}(f)}{s' - s} \\ &\leq \frac{(s' - s) \cdot \sup(\|f'(t)\|, t \in [s, s'])}{s' - s} \\ &= \sup(\|f'(t)\|, t \in [s, s']). \end{aligned}$$

Für  $s' \rightarrow s$  konvergieren die beiden äußeren Seiten gegen  $\|f'(s)\|$ , so dass auch der Differenzenquotient dagegen konvergieren muss.  $\square$

Die Rektifizierbarkeit ist schon in einer Variablen ein interessanter Begriff. Es lässt sich sogar die Rektifizierbarkeit darauf zurückführen. Dies bedeutet aber nicht, dass man die Berechnung der Kurvenlänge auf die Berechnung der Kurvenlängen der einzelnen Komponenten zurückführen könnte.

**Lemma 38.7.** *Es sei  $[a, b]$  ein kompaktes Intervall und*

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

*eine Abbildung. Dann ist  $f$  genau dann rektifizierbar, wenn sämtliche Komponentenfunktionen rektifizierbar sind.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 38.12. □

**Beispiel 38.8.** Die Rektifizierbarkeit ist schon für Funktionen

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto f(t),$$

ein nicht-trivialer Begriff, siehe Beispiel 38.9. Wenn allerdings  $f$  wachsend (oder fallend) ist, so lässt sich die Länge einfach ausrechnen. Zu einer beliebigen Unterteilung  $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = b$  ist dann nämlich

$$\sum_{i=1}^k |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^k (f(t_i) - f(t_{i-1})) = f(b) - f(a),$$

d.h. die Länge ist einfach die Differenz der Werte an den Randpunkten des Intervalls. Insbesondere existiert die Länge, d.h. monotone Funktionen sind rektifizierbar. Wenn  $f$  wachsend ist und stetig differenzierbar, so ergibt sich dies natürlich auch aus Satz 38.6 und aus Korollar 24.7. Wenn  $f$  allerdings nicht monoton ist, so müssen bei der Längenberechnung auch die Richtungsänderungen mitberücksichtigt werden. Für das Integral  $\int_a^b |f'(t)| dt$  gibt es dann keine direkte Berechnung, da  $f'(t)$  das Vorzeichen ändert. Man kann aber das Intervall in (eventuell unendlich viele) Abschnitte unterteilen, wo die Funktion wachsend oder fallend, bzw. wo die Ableitung positiv oder negativ ist, und dann abschnittsweise die Länge berechnen.

**Beispiel 38.9.** Die Funktion

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{bei } x > 0, \\ 0 & \text{bei } x = 0, \end{cases}$$

ist stetig nach Aufgabe 12.16, aber nicht rektifizierbar. Für jedes  $x_n = \frac{1}{n\pi + \frac{1}{2}\pi}$  ist  $f(x_n) = \pm x_n$ , wobei das Vorzeichen davon abhängt, ob  $n$  gerade oder ungerade ist. Für jedes  $n$  ist daher  $|f(x_n) - f(x_{n-1})| \geq 2x_n$ . Wählt man dann die Unterteilungspunkte

$$0 < x_k < x_{k-1} < \dots < x_1 < x_0 = \frac{2}{\pi} < 1,$$

so ist die Länge des zugehörigen Streckenzugs mindestens gleich

$$\sum_{n=1}^k 2x_n = 2 \cdot \sum_{n=1}^k \frac{1}{n\pi + \frac{1}{2}\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^k \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \geq \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^k \frac{1}{n+1}.$$

Wegen der Divergenz der harmonischen Reihe ist dieser Ausdruck für  $k \rightarrow \infty$  nicht beschränkt. Daher kann das Supremum über alle Streckenzüge nicht existieren und die Kurve ist nicht rektifizierbar.

**Korollar 38.10.** *Es sei  $[a, b]$  ein kompaktes Intervall und es sei*

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine stetig differenzierbare Funktion. Dann ist die Länge des Graphen von  $f$  gleich*

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

*Beweis.* Mit der Länge des Graphen ist die Länge der durch  $x \mapsto g(x) = (x, f(x))$  definierten Kurve gemeint. Die Ableitung dieser Kurve ist  $g'(x) = (1, f'(x))$ . Daher ist die Länge dieser Kurve nach Satz 38.6 gleich

$$L = \int_a^b \|g'(x)\| dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dt.$$

□

**Beispiel 38.11.** Wir wollen die Länge der *Standardparabel* berechnen, also die Länge der durch

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t, t^2),$$

gegebenen Kurve. Nach Korollar 38.10 ist die Länge von 0 nach  $b$  unter Verwendung von Lemma 27.8 gleich

$$\begin{aligned} \int_0^b \sqrt{1 + 4x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2b} \sqrt{1 + u^2} du \\ &= \frac{1}{4} \left( u\sqrt{1 + u^2} + \operatorname{arsinh} u \right) \Big|_0^{2b} \\ &= \frac{1}{2} b\sqrt{1 + 4b^2} + \frac{1}{4} \operatorname{arsinh}(2b). \end{aligned}$$

Wir berechnen nun die Länge des Kreisbogens auf zwei verschiedene Arten.

**Beispiel 38.12.** Wir betrachten die Funktion

$$f: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

die die obere Kreislinie des Einheitskreises beschreibt. Wir wollen die Länge dieses Graphen bestimmen. Es ist

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

wobei diese Gleichheit nur im Innern  $] -1, 1[$  Sinn ergibt, in den Randpunkten ist die Funktion nicht differenzierbar. Dennoch kann man hier Satz 38.6 zunächst im Innern anwenden und anschließend einen Grenzübergang durchführen. Es geht somit um das Integral von

$$\sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} = \sqrt{\frac{1 - x^2 + x^2}{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Die Stammfunktion davon ist  $\arcsin x$  gemäß Lemma 27.8. Daher ist

$$L = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

**Beispiel 38.13.** Wir betrachten die *trigonometrische Parametrisierung des Einheitskreises*, also die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto f(t) = (\cos t, \sin t).$$

Die Ableitung davon ist

$$f'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Daher ist die Kurvenlänge eines von  $a$  bis  $b$  durchlaufenen Teilstückes nach Satz 38.6 gleich

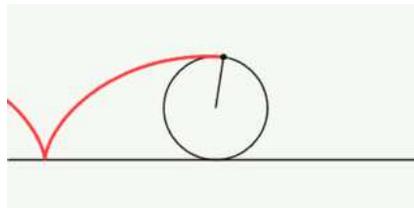
$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \int_a^b 1 dt = b - a.$$

Aufgrund der Periodizität der trigonometrischen Funktionen wird der Einheitskreis von 0 bis  $2\pi$  genau einmal durchlaufen. Die Länge des Kreisbogens ist daher  $2\pi$ .

**Beispiel 38.14.** Es sei ein Punkt  $V$  auf der Peripherie eines Kreises mit Radius 1 fixiert (beispielsweise ein Ventil). Die *Zykloide* ist diejenige Kurve, die der Punkt beschreibt, wenn der Kreis sich gleichmäßig auf einer Geraden (der  $x$ -Achse) abrollt, wie wenn ein Rad auf der Straße fährt. Wenn  $t$  den Winkel bzw. die abgerollte Strecke repräsentiert, und der Punkt  $V$  sich zum Zeitpunkt  $t = 0$  in  $(0, 0)$  befindet, so wird die Bewegung des Ventils durch

$$W: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto W(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t).$$

beschrieben.



Nach einer Voldrehung befindet sich das Ventil wieder in seiner Ausgangsposition am Rad, aber verschoben um  $2\pi$ . Die Ableitung dieser Kurve ist

$$W'(t) = (1 - \cos t, \sin t).$$

Die Länge der Zykloide (also die Länge des vom Ventil beschriebenen Weges) ist nach Satz 38.6 im Zeitintervall von 0 nach  $s$  gleich

$$\int_0^s \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \int_0^s \sqrt{2 - 2 \cos t} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2} \int_0^s \sqrt{1 - \cos t} \, dt \\
&= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{s}{2}} \sqrt{1 - \cos 2u} \, du \\
&= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{s}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 u + \sin^2 u} \, du \\
&= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{s}{2}} \sqrt{2 \sin^2 u} \, du \\
&= 4 \int_0^{\frac{s}{2}} \sqrt{\sin^2 u} \, du \\
&= 4 \int_0^{\frac{s}{2}} |\sin u| \, du \\
&= 4 \int_0^{\frac{s}{2}} \sin u \, du \\
&= 4 \left( -\cos u \Big|_0^{\frac{s}{2}} \right),
\end{aligned}$$

wobei die letzte Umformung für  $s \leq 2\pi$  gilt. Für  $s = 2\pi$  ist dies gleich  $4 \cdot 2 = 8$ .

### 38. ARBEITSBLATT

#### 38.1. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 38.1.** Es seien  $v, w \in \mathbb{R}^n$ . Bestimme die Länge der affin-linearen Kurve

$$[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \longmapsto tv + w.$$

**Aufgabe 38.2.** Es sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Kurve und  $c \in [a, b]$ . Zeige, dass  $f$  genau dann rektifizierbar ist, wenn die beiden Einschränkungen von  $f$  auf  $[a, c]$  und auf  $[c, b]$  rektifizierbar sind, und dass in diesem Fall

$$L_a^b(f) = L_a^c(f) + L_c^b(f)$$

gilt.

**Aufgabe 38.3.** Bestimme die Länge der differenzierbaren Kurve

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^3 - 5x^2 + 3x - 2,$$

von  $-5$  nach  $5$ .

**Aufgabe 38.4.\***

Bestimme die Länge der durch

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (\cos t, \sin t, t),$$

gegebenen *Schraubenlinie* für  $t$  zwischen 0 und  $b$ , wobei  $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

**Aufgabe 38.5.\***

Berechne die Länge der archimedischen Spirale

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t \cos t, t \sin t),$$

für die Umdrehung zwischen  $t = 0$  und  $t = 2\pi$ .

**Aufgabe 38.6.** Bestimme die Länge der Neilschen Parabel

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t^2, t^3),$$

von 0 bis  $b$ , wobei  $b \in \mathbb{R}_{> 0}$ .

**Aufgabe 38.7.** Bestimme die Länge des Graphen des cosinus hyperbolicus  $\cosh t$  von  $a$  nach  $b$ .**Aufgabe 38.8.\***

Berechne die Länge des Graphen der Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 - x + 13,$$

zwischen 4 und 8.

**Aufgabe 38.9.\***

Wir betrachten die differenzierbare Kurve

$$f: [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t, \sin t).$$

- Skizziere das Bild dieser Kurve und den Streckenzug, der sich ergibt, wenn man das Definitionsintervall in vier gleichlange Teilintervalle unterteilt.
- Berechne die Gesamtlänge des in a) beschriebenen Streckenzugs.
- Zeige, dass für die Länge  $L$  dieser Kurve die Abschätzung

$$L \leq \sqrt{2}\pi$$

gilt.

**Aufgabe 38.10.\***

Wir betrachten die reelle Ebene  $\mathbb{R}^2$  ohne den offenen Kreis mit Mittelpunkt  $M = (0, 0)$  und Radius 3, also

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \geq 3 \right\}.$$

Eine Person befindet sich im Punkt  $A = (5, 0)$  und möchte zum Punkt  $B = (-5, 0)$ , wobei sie sich nur in  $T$  bewegen darf.

- Zeige, dass die Person von  $A$  nach  $B$  entlang von zwei geraden Strecken kommen kann, deren Gesamtlänge 12,5 ist.
- Zeige, dass die Person von  $A$  nach  $B$  entlang eines stetigen Weges kommen kann, dessen Gesamtlänge maximal 11,9 ist.

Eine lineare Abbildung

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

auf einem euklidischen Vektorraum  $V$  heißt *Isometrie*, wenn für alle  $v, w \in V$  die Gleichheit

$$\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

gilt.

**Aufgabe 38.11.\***

Es sei

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Kurve und sei

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine lineare Isometrie. Beweise die Längengleichheit

$$L(\gamma) = L(\varphi \circ \gamma).$$

**Aufgabe 38.12.** Es sei  $[a, b]$  ein kompaktes Intervall und

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Abbildung. Zeige, dass  $f$  genau dann rektifizierbar ist, wenn sämtliche Komponentenfunktionen rektifizierbar sind.

**Aufgabe 38.13.\***

Man gebe ein Beispiel einer bijektiven Abbildung

$$\varphi: [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \subseteq \mathbb{R},$$

die rektifizierbar ist, deren Länge aber  $> 1$  ist.

**Aufgabe 38.14.\***

Man gebe ein Beispiel einer bijektiven Abbildung

$$\varphi: [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \subseteq \mathbb{R},$$

die nicht rektifizierbar ist.

Die folgenden Aufgaben diskutieren, inwiefern höherdimensional ein „Mittelwertsatz“ gelten kann.

**Aufgabe 38.15.** Es sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

eine stetig differenzierbare Kurve mit  $f(a) \neq f(b)$ . Zeige, dass es kein  $c \in [a, b]$  derart geben muss, dass

$$f'(c) = s \cdot (f(b) - f(a))$$

mit einem  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s \neq 0$ , gilt.

**Aufgabe 38.16.** Es sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

eine stetig differenzierbare Kurve mit  $f'(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$  und mit  $f(a) \neq f(b)$ . Zeige, dass es kein  $c \in [a, b]$  derart geben muss, dass

$$f'(c) = s \cdot (f(b) - f(a))$$

mit einem  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s > 0$ , gilt.

**Aufgabe 38.17.** Es sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

eine stetig differenzierbare Kurve mit  $f'(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$  und mit  $f(a) \neq f(b)$ . Zeige, dass es kein  $c \in [a, b]$  derart geben muss, dass  $f'(c)$  und  $f(b) - f(a)$  linear abhängig sind.

**Aufgabe 38.18.** Wir betrachten die Zykloide aus Beispiel 38.14, also die differenzierbare Kurve

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (x(t), y(t)) = (t - \sin t, 1 - \cos t).$$

- (1) Zeige, dass  $x(t)$  streng wachsend ist.
- (2) Zeige, dass

$$x: [0, 2\pi] \longrightarrow [0, 2\pi], t \longmapsto x(t),$$

bijektiv ist.

- (3) Es sei  $h(x)$  die Umkehrfunktion zu  $x(t)$  aus Teil (2). Zeige, dass  $h$  in 0 und in  $2\pi$  nicht differenzierbar ist.
- (4) Drücke  $y(t)$  als Funktion von  $x$  aus. Wie verhält sich der Graph zu dieser Funktion zu der Zykloide? Ist diese Funktion differenzierbar?

### 38.2. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 38.19.** (4 Punkte)

Ein Massenteil werde zum Zeitpunkt 0 von einem Berggipfel (der als Nullpunkt der Ebene angesetzt wird) mit konstanter horizontaler Geschwindigkeit  $v$  abgeschossen und bewege sich danach luftwiderstandsfrei unter der (konstanten) Schwerkraft der Erde. Berechne die Bahnkurve  $f(t)$  des Körpers und die zurückgelegte Strecke  $s(t)$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$ .

**Aufgabe 38.20.** (4 Punkte)

Berechne die Länge des Graphen der Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{3}x^2 - 4x + 11,$$

zwischen 2 und 9.

**Aufgabe 38.21.** (3 Punkte)

Bestimme die Länge der differenzierbaren Kurve

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto \left( \frac{t^3}{3}, \frac{4t^5}{5}, \frac{8t^7}{7} \right),$$

von  $a$  nach  $b$ .

**Aufgabe 38.22.** (5 Punkte)

Bestimme die Länge des Graphen der Exponentialfunktion  $\exp t$  von  $a$  nach  $b$ .

**Aufgabe 38.23.** (5 (3+2) Punkte)

Person  $A$  befindet sich im Punkt  $(0, -5)$  und will nach  $(0, 5)$ . Im Punkt  $(0, 0)$  befindet sich eine weitere unbewegliche Person  $B$ . Da die Abstandsregel von 2 einzuhalten ist, muss  $A$  um  $B$  herumlaufen.

- (1) Was ist die minimale Länge eines Weges, mit dem  $A$  an ihr Ziel gelangt?
- (2) Man gebe eine Parametrisierung dieses kürzesten Weges an, wobei die Geschwindigkeit konstant gleich 1 sein soll.

**Aufgabe 38.24.** (8 Punkte)

Es sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

eine stetig differenzierbare Kurve mit  $f'(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$ . Zeige, dass es ein  $c \in [a, b]$  derart gibt, dass  $f'(c)$  und  $f(b) - f(a)$  linear abhängig sind.

## 39. VORLESUNG - WEGINTEGRALE

## 39.1. Integration von stetigen Wegen.

Für eine stetige Kurve

$$g: I \longrightarrow V$$

in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum definieren wir für  $a, b \in I$  das *Integral*  $\int_a^b g(s) ds$  komponentenweise, d.h. man wählt eine Basis  $v_1, \dots, v_n$  von  $V$  und drückt die stetige Kurve durch ihre Komponentenfunktionen  $g_1, \dots, g_n$  aus. Dann setzt man

$$\int_a^b g(s) ds := \left( \int_a^b g_1(s) ds \right) v_1 + \dots + \left( \int_a^b g_n(s) ds \right) v_n.$$

Das Ergebnis ist ein Vektor in  $V$ , der unabhängig von der gewählten Basis ist, siehe Aufgabe 39.2. Wenn man die untere Intervallgrenze  $a$  fixiert und die obere Intervallgrenze  $b = t$ , so bekommt man eine *Integralkurve*

$$I \longrightarrow V, t \longmapsto \int_a^t g(s) ds.$$

Diese Integralkurve (oder *Stammkurve*) kann man wieder ableiten und erhält die Ausgangskurve zurück, d.h. es gilt wieder der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung.

Es gilt die folgende Integralabschätzung.

**Satz 39.1.** *Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum und*

$$g: [a, b] \longrightarrow V$$

eine stetige Abbildung. Dann gilt

$$\left\| \int_a^b g(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|g(t)\| dt.$$

*Beweis.* Wenn  $\int_a^b g(t) dt = 0$  ist, so ist nichts zu zeigen. Sei also

$$\int_a^b g(t) dt = v \neq 0.$$

Es sei  $u_1 := \frac{v}{\|v\|}$ . Das ergänzen wir zu einer Orthonormalbasis  $u_1, u_2, \dots, u_n$  von  $V$ . Es seien  $g_1, g_2, \dots, g_n$  die Koordinatenfunktionen von  $g$  bezüglich dieser Basis. Dann besteht aufgrund unserer Basiswahl die Beziehung

$$\begin{aligned} v &= \int_a^b g(t) dt \\ &= \left( \int_a^b g_1(t) dt \right) u_1 + \dots + \left( \int_a^b g_n(t) dt \right) u_n \\ &= \left( \int_a^b g_1(t) dt \right) u_1, \end{aligned}$$

da ja  $v$  ein Vielfaches von  $u_1$  ist und somit die anderen Koeffizienten gleich 0 sind. Daher ist

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b g(t) dt \right\| &= \left| \int_a^b g_1(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |g_1(t)| dt \\ &\leq \int_a^b \sqrt{(g_1(t))^2 + \dots + (g_n(t))^2} dt \\ &= \int_a^b \|g_1(t)u_1 + \dots + g_n(t)u_n\| dt \\ &= \int_a^b \|g(t)\| dt. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 39.2.** Die Abschätzung aus Satz 39.1 ist im Allgemeinen recht grob. Wenn beispielsweise  $g = f'$  die Ableitung einer stetig differenzierbaren Kurve

$$f: [a, b] \longrightarrow V$$

ist, so ist die rechte Seite nach Satz 38.6 gleich

$$\int_a^b \|g(t)\| dt = \int_a^b \|f'(t)\| dt = L_a^b(f),$$

also die Kurvenlänge von  $f$ . Die linke Seite ist hingegen

$$\left\| \int_a^b g(t) dt \right\| = \|f(b) - f(a)\|.$$

Die Abschätzung ist also in diesem Fall trivial, da ja die Kurvenlänge nach Definition 38.5 das Supremum der Längen der interpolierenden Streckenzüge ist, und  $\|f(b) - f(a)\|$  ist die Länge der direkten Strecke.

**Bemerkung 39.3.** Aus Satz 39.1 kann man Satz 38.1 für eine stetig differenzierbare Kurve

$$f: I \longrightarrow V$$

gewinnen. Mit  $g = f'$  ist nämlich

$$\|f(b) - f(a)\| = \left\| \int_a^b g(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|g(t)\| dt = (b-a)\|g(c)\| = (b-a)\|f'(c)\|$$

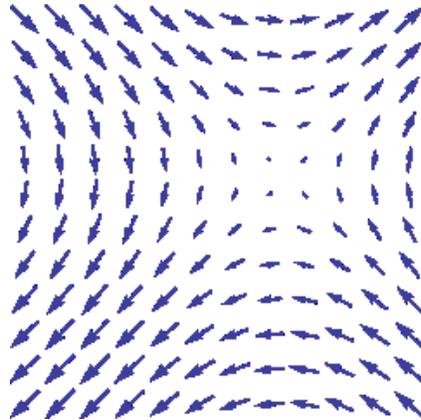
für ein gewisses  $c \in [a, b]$ , dessen Existenz aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (in einer Variablen) folgt.

### 39.2. Vektorfelder.

**Definition 39.4.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein reelles Intervall und  $U \subseteq V$  eine offene Menge. Dann nennt man eine Abbildung

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, x) \longmapsto f(t, x),$$

ein *Vektorfeld* (auf  $U$ ).



Die übliche physikalische Interpretation ist hierbei, dass  $t \in I$  die Zeit repräsentiert,  $x \in U$  den Ort und  $f(t, x) \in V$  einen Vektor, der zum Zeitpunkt  $t$  an den Ortspunkt  $v$  angeheftet ist und dort eine Richtung vorgibt. Manchmal spricht man auch von einem *Richtungsfeld*. Im physikalischen Kontext werden die Vektoren als Geschwindigkeitsvektoren, als Kraftvektoren oder als Beschleunigungsvektoren interpretiert.

Wenn das Vektorfeld nicht von  $t$  abhängt, so spricht man von einem *zeitunabhängigen* oder *autonomen Vektorfeld*.

Wir werden im Rahmen der Differentialgleichungen auf zeitabhängige Vektorfelder zurückkommen. Zuerst untersuchen wir zeitunabhängige Vektorfelder und Wegintegrale.

### 39.3. Wegintegrale.

**Definition 39.5.** Es sei  $U \subseteq V$  eine offene Teilmenge in einem euklidischen Vektorraum,

$$F: U \longrightarrow V$$

ein stetiges Vektorfeld und

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow U$$

eine stetig differenzierbare Kurve. Dann heißt

$$\int_{\gamma} F := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

das *Wegintegral* zum Vektorfeld  $F$  längs des Weges  $\gamma$ .

Statt Wegintegral sagt man auch *Kurvenintegral*. Die stetige Differenzierbarkeit sichert dabei, dass die Ableitung  $\gamma'$  und damit auch der Integrand  $t \mapsto \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$  stetig sind, so dass das Integral existiert.

Wenn der Weg  $\gamma$  nur (stetig und) stückweise stetig differenzierbar ist, wenn es also eine Unterteilung  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$  derart gibt, dass die Einschränkungen<sup>3</sup>

$$\gamma_i := \gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$$

stetig differenzierbar sind, so setzt man

$$\int_{\gamma} F := \int_{\gamma_1} F + \int_{\gamma_2} F + \dots + \int_{\gamma_n} F.$$

**Bemerkung 39.6.** Bei der üblichen physikalischen Interpretation eines Wegintegrals stellt man sich das Vektorfeld  $F$  als ein Kraftfeld und den Weg als die Bewegung eines Massepunktes vor. Dabei ist die Bewegung erzwungen, d.h. es handelt sich nicht um die natürliche Bewegung, die das Kraftfeld bewirkt, sondern um eine geführte Bewegung. Eine solche Bewegung erfordert einen Arbeitsaufwand, wenn sie gegen das Kraftfeld durchgeführt wird, und setzt Energie frei, wenn sie mit der Kraft geführt wird. Entscheidend ist dabei der Winkel zwischen der momentanen Bewegungsrichtung zu einem Zeitpunkt  $t$  und dem Kraftfeld zum Ortspunkt  $\gamma(t)$ . Daher taucht in der Definition des Wegintegrals das Skalarprodukt zwischen Vektorfeld und Bewegungsrichtung auf. Das gesamte Wegintegral ist die Arbeit, die man längs des Weges in dem Kraftfeld verrichtet. Das Skalarprodukt  $\langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$  bedeutet zu einem fixierten Zeitpunkt  $t$  die momentane Leistung.

<sup>3</sup>Hier haben die  $\gamma_i$  eine andere Bedeutung wie in der folgenden Bemerkung, wo sie die Komponentenfunktionen bezeichnen.

**Bemerkung 39.7.** Das Vektorfeld

$$F: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

sei durch die Komponentenfunktionen

$$F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n)$$

und die Kurve durch die Komponentenfunktionen

$$(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

mit der Ableitung

$$(\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$$

gegeben. Dann wird das Wegintegral durch

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F &= \int_a^b F_1(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \cdot \gamma'_1(t) + \dots + F_n(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \cdot \gamma'_n(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_a^b F_i(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \cdot \gamma'_i(t) dt \end{aligned}$$

berechnet.

**Beispiel 39.8.** Zu einem konstanten Vektorfeld

$$F: V \longrightarrow V, x \longmapsto v,$$

auf einem euklidischen Vektorraum  $V$  mit einem Vektor  $v \in V$  und einem affin-linearen Weg

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow V, t \longmapsto w + tu,$$

ist

$$\int_{\gamma} F = \int_a^b \langle v, u \rangle dt = (b - a) \langle v, u \rangle.$$

**Beispiel 39.9.** Wir betrachten das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^2 - y^3, xy)$$

und den Weg

$$\gamma: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t^2, t^3 - 5t).$$

Die Ableitung von  $\gamma$  ist

$$\gamma'(t) = (2t, 3t^2 - 5).$$

Daher ist das Wegintegral zu diesem Vektorfeld längs dieser Kurve gleich

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F &= \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^1 (\gamma_1(t)^2 - \gamma_2(t)^3) \cdot \gamma'_1(t) + \gamma_1(t)\gamma_2(t) \cdot \gamma'_2(t) dt \\ &= \int_0^1 (t^4 - (t^3 - 5t)^3) \cdot 2t + t^2(t^3 - 5t) \cdot (3t^2 - 5) dt \\ &= \int_0^1 (t^4 - t^9 + 15t^7 - 75t^5 + 125t^3)2t + t^2(3t^5 - 5t^3 - 15t^3 + 25t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 2t^5 - 2t^{10} + 30t^8 - 150t^6 + 250t^4 + 3t^7 - 20t^5 + 25t^3 dt \\
&= \int_0^1 -2t^{10} + 30t^8 + 3t^7 - 150t^6 - 18t^5 + 250t^4 + 25t^3 dt \\
&= \left( -\frac{2}{11}t^{11} + \frac{10}{3}t^9 + \frac{3}{8}t^8 - \frac{150}{7}t^7 - 3t^6 + 50t^5 + \frac{25}{4}t^4 \right) \Big|_0^1 \\
&= 47 + \frac{-336 + 6160 + 693 - 39600 + 11550}{1848} \\
&= 47 - \frac{21533}{1848} \\
&= \frac{65323}{1848}.
\end{aligned}$$

**Beispiel 39.10.** Wir betrachten das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (-3x, 5y).$$

Für einen stetig differenzierbaren Weg

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto \gamma(t),$$

ist das Wegintegral zu diesem Vektorfeld gleich

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} F &= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\
&= \int_a^b -3\gamma_1(t) \cdot \gamma'_1(t) + 5\gamma_2(t) \cdot \gamma'_2(t) dt \\
&= \left( -\frac{3}{2}(\gamma_1(t))^2 + \frac{5}{2}(\gamma_2(t))^2 \right) \Big|_a^b \\
&= -\frac{3}{2}(\gamma_1(b))^2 + \frac{5}{2}(\gamma_2(b))^2 + \frac{3}{2}(\gamma_1(a))^2 - \frac{5}{2}(\gamma_2(a))^2.
\end{aligned}$$

Insbesondere hängt dieser Wert nur von  $\gamma(a)$  und  $\gamma(b)$  ab, also dem Anfangspunkt und dem Endpunkt der Bewegung, nicht aber vom Verlauf des Weges.

Im vorstehenden Beispiel besitzt insbesondere bei  $\gamma(a) = \gamma(b)$  das Wegintegral den Wert 0. Wir werden später sehen, dass die sogenannten *Gradientenfelder* (*Potentialfelder*) die Eigenschaft besitzen, dass die Wegintegrale nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängen. Das folgende Beispiel zeigt, dass für einen *geschlossenen Weg*  $\gamma$ , wo also  $\gamma(a) = \gamma(b)$  ist, das Wegintegral im Allgemeinen nicht 0 sein muss.

**Beispiel 39.11.** Wir betrachten das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (-y, x)$$

und den Weg

$$\gamma: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (\cos t, \sin t).$$

Die Ableitung von  $\gamma$  ist

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Daher ist das Wegintegral zu diesem Vektorfeld längs dieser Kurve gleich

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} F &= \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt \\
 &= \int_0^{2\pi} 1 dt \\
 &= 2\pi.
 \end{aligned}$$

**Lemma 39.12.** *Es sei  $U \subseteq V$  eine offene Teilmenge in einem euklidischen Vektorraum,*

$$F, G: U \longrightarrow V$$

*stetige Vektorfelder und*

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow U$$

*eine (stückweise) stetig differenzierbare Kurve. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Für  $r, s \in \mathbb{R}$  ist*

$$\int_{\gamma} rF + sG = r \int_{\gamma} F + s \int_{\gamma} G.$$

(2) *Es ist*

$$\int_{-\gamma} F = - \int_{\gamma} F,$$

*wobei  $-\gamma$  den umgekehrt durchlaufenen Weg bezeichnet.*

(3) *Wenn*

$$\delta: [b, c] \longrightarrow U$$

*ein weiterer (stückweise) stetig differenzierbarer Weg mit  $\delta(b) = \gamma(b)$  ist, so ist*

$$\int_{\gamma * \delta} F = \int_{\gamma} F + \int_{\delta} F,$$

*wobei  $\gamma * \delta$  den aneinander gelegten Weg bezeichnet.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 39.19. □

**Satz 39.13.** *Es sei  $U \subseteq V$  eine offene Teilmenge in einem euklidischen Vektorraum,*

$$F: U \longrightarrow V$$

*ein stetiges Vektorfeld und*

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow U$$

*eine stetig differenzierbare Kurve. Es sei*

$$g: [c, d] \longrightarrow [a, b]$$

eine bijektive, monoton wachsende, stetig differenzierbare Funktion und sei  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ g$ . Dann gilt

$$\int_{\gamma} F = \int_{\tilde{\gamma}} F.$$

*Beweis.* Es seien  $F_1, \dots, F_n$  die Komponentenfunktionen von  $F$  und  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  die Komponentenfunktionen von  $\gamma$  bezüglich einer fixierten Orthonormalbasis von  $V$ . Dann gilt mit der Substitution  $t = g(s)$  unter Verwendung von Korollar 25.9

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F &= \sum_{i=1}^n \int_a^b F_i(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \cdot \gamma'_i(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_c^d F_i(\gamma_1(g(s)), \dots, \gamma_n(g(s))) \cdot \gamma'_i(g(s)) \cdot g'(s) ds \\ &= \sum_{i=1}^n \int_c^d F_i(\tilde{\gamma}_1(s), \dots, \tilde{\gamma}_n(s)) \cdot \tilde{\gamma}'_i(s) ds \\ &= \int_{\tilde{\gamma}} F. \end{aligned}$$

□

Die Funktion  $g: [c, d] \rightarrow [a, b]$  nennt man in diesem Zusammenhang eine (orientierungserhaltende) *Umparametrisierung* der Zeit. Der Satz besagt, dass das Wegintegral nur von dem durchlaufenen Weg (einschließlich der Richtung) abhängt, nicht aber von der Geschwindigkeit, mit der das passiert. Wenn die Funktion  $g$  monoton fallend ist, so vertauschen sich bei der Substitution die Integrationsgrenzen und man erhält

$$\int_{\gamma} F = - \int_{\tilde{\gamma}} F.$$

Diese Beziehung gilt insbesondere, wenn der Weg  $\gamma$  in umgekehrter Richtung durchlaufen wird, was schon in Lemma 39.12 (2) formuliert wurde.

## 39. ARBEITSBLATT

### 39.1. Übungsaufgaben.

#### Aufgabe 39.1.\*

Von einer Bewegung

$$\varphi: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

sei der Geschwindigkeitsverlauf

$$\varphi'(t) = \left( \frac{t^2 - 1}{t}, t \sin(t^2), te^t \right)$$

bekannt. Ferner sei

$$\varphi(1) = (1, 2, 3)$$

bekannt. Bestimme  $\varphi(t)$ .

**Aufgabe 39.2.** Zeige, dass das Integral zu einer stetigen Kurve

$$[a, b] \longrightarrow V$$

in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$  unabhängig von der gewählten Basis ist.

**Aufgabe 39.3.** Formuliere und beweise den *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung* für stetige Kurven

$$g: I \longrightarrow V,$$

wobei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum sei.

**Aufgabe 39.4.** Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (t^2, t^5 - 1, t + \sin t).$$

Bestimme die Komponenten dieser Abbildung bezüglich der Basis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme mit beiden Basen das Integral dieser Kurve über  $[a, b]$ , und bestätige, dass die Ergebnisse übereinstimmen.

**Aufgabe 39.5.** Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, die wir als ein (eindimensionales) Vektorfeld auf  $\mathbb{R}$  auffassen. Es sei  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  der identische Weg. Zeige, dass das Wegintegral  $\int_{\gamma} f$  mit dem Integral  $\int_a^b f(t) dt$  übereinstimmt.

**Aufgabe 39.6.** Bestimme das Wegintegral zum eindimensionalen Vektorfeld

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^3 - 4x + 2,$$

und zum Weg

$$\gamma: [-3, 2] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto t^2 + t - 1.$$

**Aufgabe 39.7.** Es sei

$$\gamma: [2, 7] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t^2 - 1, t + 3),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y) = (y^2 - x, -3xy - y^3).$$

**Aufgabe 39.8.** Es sei

$$\gamma: [1, 6] \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (t^2, t^3, t),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y, z) = (y^2 - xz^2, xy, -3xz - y^3z).$$

**Aufgabe 39.9.\***

Berechne das Wegintegral  $\int_{\gamma} F$  zum Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (y, x),$$

längs des Weges

$$\gamma: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t, e^t).$$

**Aufgabe 39.10.\***

Es sei

$$\gamma: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (t^2, -t^2 + 1, t),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y, z) = (y^2 - xz, xyz, 5x^2z - yz).$$

**Aufgabe 39.11.** Es sei

$$\gamma: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (\cos t, \sin t, t),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y, z) = (y - z^3, x^2, -xz).$$

**Aufgabe 39.12.\***

Berechne das Wegintegral zur archimedischen Spirale

$$[0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t \cos t, t \sin t),$$

im Vektorfeld

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (y, -x).$$

**Aufgabe 39.13.** Seien  $a, b, c, d, r, s \geq 1$  natürliche Zahlen. Wir betrachten die stetig differenzierbare Kurve

$$[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t^r, t^s).$$

Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y) = (x^a y^b, x^c y^d).$$

**Aufgabe 39.14.** Es sei

$$\gamma: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (\cos t, \sin t),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zu den folgenden Vektorfeldern.

- a)  $F(x, y) = (x, y),$
- b)  $F(x, y) = (x, -y),$
- c)  $F(x, y) = (y, x),$
- d)  $F(x, y) = (y, -x).$

**Aufgabe 39.15.** Es sei

$$F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ein stetiges Vektorfeld und

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

ein stetig differenzierbarer Weg. Es sei  $G$  eine Stammfunktion zu  $F$ . Zeige

$$\int_{\gamma} F = G(\gamma(b)) - G(\gamma(a)).$$

**Aufgabe 39.16.\***

Es sei

$$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetiges Vektorfeld, wobei die  $i$ -te Komponente nur von der  $i$ -ten Variablen abhängen möge. Es sei

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow U$$

ein stetig differenzierbarer Weg. Zeige, dass das Wegintegral  $\int_{\gamma} F$  nur von  $\gamma(a)$  und  $\gamma(b)$  abhängt.

**Aufgabe 39.17.** Wir betrachten das identische Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, P \longmapsto P.$$

Zeige, dass für je zwei Punkte  $P, Q \in \mathbb{R}^n$  und für jeden stetig differenzierbaren Weg

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

mit  $\gamma(a) = P$  und  $\gamma(b) = Q$  das Wegintegral  $\int_{\gamma} F$  gleich  $\frac{1}{2}(\|Q\|^2 - \|P\|^2)$  ist.

**Aufgabe 39.18.\***

Es sei  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine lineare Abbildung, aufgefasst als lineares Vektorfeld.

- (1) Man gebe ein Beispiel für ein diagonalisierbares  $F$  (mit  $n = 2$ ) und eine stetig differenzierbare Kurve

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit  $\gamma(a) = \gamma(b)$  derart an, dass das Wegintegral  $\int_{\gamma} F$  nicht 0 ist.

- (2) Es sei nun  $F$  diagonalisierbar bezüglich einer Orthonormalbasis. Zeige, dass

$$\int_{\gamma} F = 0$$

für jede stetig differenzierbare Kurve  $\gamma$  mit  $\gamma(a) = \gamma(b)$  ist.

**Aufgabe 39.19.** Es sei  $U \subseteq V$  eine offene Teilmenge in einem euklidischen Vektorraum,

$$F, G: U \longrightarrow V$$

stetige Vektorfelder und

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow U$$

eine (stückweise) stetig differenzierbare Kurve. Zeige die folgenden Aussagen.

- (1) Für  $r, s \in \mathbb{R}$  ist

$$\int_{\gamma} rF + sG = r \int_{\gamma} F + s \int_{\gamma} G.$$

- (2) Es ist

$$\int_{-\gamma} F = - \int_{\gamma} F,$$

wobei  $-\gamma$  den umgekehrt durchlaufenen Weg bezeichnet.

- (3) Wenn

$$\delta: [b, c] \longrightarrow U$$

ein weiterer (stückweise) stetig differenzierbarer Weg mit  $\delta(b) = \gamma(b)$  ist, so ist

$$\int_{\gamma * \delta} F = \int_{\gamma} F + \int_{\delta} F,$$

wobei  $\gamma * \delta$  den aneinander gelegten Weg bezeichnet.

### 39.2. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 39.20.** (3 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (t^2, t^5 - 1, t + \sin t).$$

Bestimme die Komponenten dieser Abbildung bezüglich der Basis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme mit beiden Basen das Integral dieser Kurve über  $[a, b]$ , und bestätige, dass die Ergebnisse übereinstimmen.

**Aufgabe 39.21.** (4 Punkte)

Bestimme das Wegintegral zum eindimensionalen Vektorfeld

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^3 + 5x^2 - 6,$$

und zum Weg

$$\gamma: [-1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto t^3 + 2t.$$

**Aufgabe 39.22.** (5 Punkte)

Es sei

$$\gamma: [-2, 5] \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (t^2, -t^3, t^2 - t + 4),$$

gegeben. Berechne das Wegintegral längs dieses Weges zum Vektorfeld

$$F(x, y, z) = (y^3 - x^2z^2, x^2y, 5x^3z - y^2z).$$

**Aufgabe 39.23.** (5 Punkte)

Wir betrachten die differenzierbare Kurve

$$\gamma: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (t, -t, t^2),$$

und das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (x^2, xz, y^2).$$

a) Berechne das Wegintegral  $\int_{\gamma} F$ .

b) Es sei

$$g: [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [0, 1], s \longmapsto \sin s,$$

und  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ g$ . Berechne (unabhängig von a))  $\int_{\tilde{\gamma}} F$

**Aufgabe 39.24.** (4 Punkte)

Wir betrachten das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^2 - e^y, xy + \cos x).$$

Bestimme das Wegintegral längs des gegen den Uhrzeigersinn einmal durchlaufenen Einheitsquadrates.

**Aufgabe 39.25.** (6 Punkte)

Wir betrachten das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto \left( \frac{x^3 - xy + 2y^2}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Bestimme das Wegintegral zu diesem Vektorfeld längs des linearen Weges von  $(0, -2)$  nach  $(3, 4)$ .

**Aufgabe 39.26.** (5 Punkte)

Wir betrachten das konstante Vektorfeld

$$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, P \longmapsto v.$$

Zeige, dass für zwei Punkte  $P, Q \in \mathbb{R}^n$  und jeden stetig differenzierbaren Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\gamma(a) = P$  und  $\gamma(b) = Q$  das Wegintegral  $\int_{\gamma} F$  gleich  $\langle Q - P, v \rangle$  ist.

## 40. VORLESUNG - GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Wir haben schon im ersten Semester gewöhnliche Differentialgleichungen samt einiger Lösungsverfahren besprochen. Dort ging es um die Bewegungen auf einer Geraden, die durch ein von der Zeit und dem Ort (der Lage auf der Geraden) abhängiges Vektorfeld bestimmt wurden. Eine physikalische Bewegung spielt sich aber häufig höherdimensional (im  $\mathbb{R}^2$  oder im  $\mathbb{R}^3$ ) ab, so dass wir jetzt gewöhnliche Differentialgleichungen allgemein besprechen. Die Zeitkomponente wird sich nach wie vor in einem reellen Intervall bewegen, die Orts- und die Richtungskomponente wird ein Element in einem beliebigen endlichdimensionalen reellen Vektorraum sein. Diesen statten wir mit einem Skalarprodukt aus, so dass wir eine Norm, eine Metrik, offene Mengen, stetige Abbildungen, Limiten, etc. zur Verfügung haben.

## 40.1. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

**Definition 40.1.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein reelles Intervall,  $U \subseteq V$  eine offene Menge und

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf  $U$ . Dann nennt man  $v' = f(t, v)$  die *gewöhnliche Differentialgleichung* (oder *gewöhnliches Differentialgleichungssystem*) zum Vektorfeld  $f$ .

(Zeitabhängige) Vektorfelder und gewöhnliche Differentialgleichungssysteme sind im Wesentlichen äquivalente Objekte. Man spricht auch von einem *dynamischen System*. Von Differentialgleichungen spricht man insbesondere dann, wenn man sich für die Lösungen im Sinne der folgenden Definition interessiert.

**Definition 40.2.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein reelles Intervall,  $U \subseteq V$  eine offene Menge und

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf  $U$ . Zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$v' = f(t, v)$$

heißt eine Abbildung

$$v: J \longrightarrow V, t \longmapsto v(t),$$

auf einem offenen (Teil)Intervall<sup>4</sup>  $J \subseteq I$  eine *Lösung der Differentialgleichung*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind.

- (1) Es ist  $v(t) \in U$  für alle  $t \in J$ .
- (2) Die Abbildung  $v$  ist differenzierbar.
- (3) Es ist  $v'(t) = f(t, v(t))$  für alle  $t \in J$ .

Eine Lösung ist also eine differenzierbare Kurve, d.h. eine (orts-)vektorwertige Abbildung

$$v: J \longrightarrow V.$$

Wenn  $V = \mathbb{R}^n$  ist, so wird eine solche Abbildung durch ihre Komponenten

$$(v_1(t), \dots, v_n(t))$$

beschrieben. Ebenso wird das Vektorfeld durch  $n$ , von  $t$  und  $v = (v_1, \dots, v_n)$  abhängige Funktionen  $(f_1, \dots, f_n)$  beschrieben. Die Differentialgleichung lautet dann ausgeschrieben

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, v_1, \dots, v_n) \\ \vdots \\ f_n(t, v_1, \dots, v_n) \end{pmatrix}.$$

Daher spricht man auch von einem *Differentialgleichungssystem*.

Häufig soll eine Kurve nicht nur eine Differentialgleichung erfüllen, sondern sich zusätzlich zu einem bestimmten Zeitpunkt an einem bestimmten Ort befinden. Dies führt zum Begriff des Anfangswertproblems.

**Definition 40.3.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein reelles Intervall,  $U \subseteq V$  eine offene Menge und

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf  $U$ . Es sei  $(t_0, w) \in I \times U$  gegeben. Dann nennt man

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w$$

das *Anfangswertproblem* zur gewöhnlichen Differentialgleichung  $v' = f(t, v)$  mit der *Anfangsbedingung*  $v(t_0) = w$ .

<sup>4</sup>Rein formal gesehen ist hier auch das leere Intervall zugelassen, wobei diese „leere Lösung“ natürlich uninteressant ist. Bei einem Anfangswertproblem sichert bereits die Anfangsbedingung, dass die Lösung nicht leer ist.

**Definition 40.4.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein reelles Intervall,  $U \subseteq V$  eine offene Menge und

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf  $U$ . Es sei  $(t_0, w) \in I \times U$  vorgegeben. Dann nennt man eine Abbildung

$$v: J \longrightarrow V, t \longmapsto v(t),$$

auf einem Intervall  $J \subseteq I$  mit  $t_0 \in J$  eine *Lösung des Anfangswertproblems*

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w,$$

wenn  $v$  eine Lösung der Differentialgleichung  $v' = f(t, v)$  ist und wenn zusätzlich

$$v(t_0) = w$$

gilt.

Eine zu einem Vektorfeld, einer gewöhnlichen Differentialgleichung und einem Anfangswertproblem passende Vorstellung ist das *Windmodell*. Das Vektorfeld

$$F: I \times U \longrightarrow V$$

beschreibt zu einem jeden Zeitpunkt  $t \in I$  und einem Ortspunkt  $P \in U$  die in diesem Punkt herrschende Windrichtung (oder Windgeschwindigkeit). Die Lösung einer Differentialgleichung ist die Bewegung eines Teilchens, das (beschleunigungsfrei und verzögerungsfrei) vom Wind getragen wird, dessen Momentangeschwindigkeit also zu jedem Zeitpunkt gleich der Windgeschwindigkeit an dem Ort ist, an dem sich das Teilchen gerade befindet. Die Lösung eines Anfangswertproblems beschreibt die Bewegung, wenn das Teilchen an einem bestimmten Punkt losgelassen wird.

Die Vorstellung, dass eine Differentialgleichung die Bewegung in einem Kraftfeld<sup>5</sup> beschreibt, kann irreführend sein. Ein Kraftfeld ist ein Beschleunigungsfeld und kein Geschwindigkeitsfeld. Allerdings führt ein Kraftfeld zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, die in eine Differentialgleichung erster Ordnung (unter Hinzunahme neuer Variablen) übersetzt werden kann.

## 40.2. Erste Beispiele.

**Beispiel 40.5.** Wir betrachten ein konstantes Vektorfeld auf dem  $\mathbb{R}^n$ , also eine Abbildung

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (t, x_1, \dots, x_n) \longmapsto w,$$

wobei  $w \in \mathbb{R}^n$  ein fixierter Vektor ist. Im „Windmodell“ bedeutet dies, dass überall und zu jeder Zeit eine konstante Windgeschwindigkeit herrscht. Die Bewegung eines (durch den Wind getragenen) Teilchens muss sich also auf

<sup>5</sup>Die physikalische Interpretation eines Vektorfeldes als Kraftfeld ist hingegen bei Wegintegralen (nämlich als Arbeitsintegral) richtig.

der durch einen Startpunkt und den Richtungsvektor  $w$  gegebenen Geraden vollziehen. In der Tat besitzt das Anfangswertproblem

$$v' = w \text{ und } v(t_0) = P$$

die eindeutige<sup>6</sup> (affin-lineare) Lösung

$$v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \longmapsto v(t) = P + (t - t_0)w,$$

wie man durch Ableiten bestätigt.

**Beispiel 40.6.** Wir betrachten ein stetiges ortsunabhängiges Vektorfeld auf dem  $\mathbb{R}^n$ , d.h. es sei eine stetige Abbildung

$$g: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

auf einem reellen Intervall  $I$  gegeben, die wir als Vektorfeld

$$F: I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (t, x_1, \dots, x_n) \longmapsto g(t),$$

auffassen. Im „Windmodell“ bedeutet dies, dass zu einem festen Zeitpunkt überall die gleiche Windgeschwindigkeit herrscht, diese sich aber mit der Zeit ändert. Die Bewegungskurven der (durch den Wind getragenen) Teilchen müssen also parallel zueinander sein, also durch eine Ortsverschiebung auseinander hervorgehen. Der Differenzvektor zwischen den Positionen von zwei Teilchen bleibt während des Bewegungsvorgangs erhalten. Die Lösungskurven zu einem Anfangswertproblem

$$v' = F(t, v) = g(t) \text{ und } v(t_0) = P$$

lassen sich einfach berechnen: Die eindeutige Lösung ist die Integralkurve

$$v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \longmapsto v(t) = P + \left( \int_{t_0}^t g_1(s) ds, \int_{t_0}^t g_2(s) ds, \dots, \int_{t_0}^t g_n(s) ds \right),$$

wobei die  $g_i$  die Komponentenfunktionen von  $g$  sind.

**Beispiel 40.7.** Es seien  $n$  reellwertige Funktionen  $f_i(t, x)$  in zwei Variablen gegeben. Diese kann man zu einem Vektorfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (t, x_1, \dots, x_n) \longmapsto (f_1(t, x_1), f_2(t, x_2), \dots, f_n(t, x_n))$$

zusammenfassen. Dabei hängt die  $i$ -te Koordinatenfunktion des Vektorfeldes nur von  $t$  und der  $i$ -ten Ortskoordinaten  $x_i$  ab. Eine Lösungskurve  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  muss die Bedingungen

$$x'_i(t) = F_i(t, x_1, \dots, x_n) = f_i(t, x_i)$$

(für  $i = 1, \dots, n$ ) erfüllen. Diese  $n$  Bedingungen sind unabhängig voneinander, d.h. man kann die  $n$  Komponentenfunktionen  $x_i(t)$  getrennt mit einem

---

<sup>6</sup>Ob die Lösung einer Differentialgleichung (existiert und) eindeutig ist, ist ein wichtiges Problem. Der wichtigste Satz zu dieser Fragestellung ist der Satz von Picard-Lindelöf, den wir später besprechen werden. In vielen der hier besprochenen Beispiele ist die Eindeutigkeit der Lösung direkt klar oder folgt aus den Eindeutigkeitsaussagen aus dem ersten Semester.

eindimensionalen Ansatz bestimmen. Daher spricht man von einem *entkoppelten Differentialgleichungssystem*.

Manchmal ist ein Differentialgleichungssystem in den ursprünglich gegebenen Koordinaten nicht entkoppelt, lässt sich aber durch einen Koordinatenwechsel entkoppeln und dann lösen. Dies ist vor allem für lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten wichtig, die mit Mitteln der linearen Algebra entkoppelt werden können.

**Beispiel 40.8.** Wir betrachten das (zeitunabhängige) Vektorfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, x, y) \longmapsto (-y, x).$$

Hier steht also der Richtungsvektor  $F(t, x, y) = (-y, x)$  stets senkrecht auf dem Ortsvektor  $(x, y)$ , und ihre Normen stimmen überein. Man erwartet kreisförmige Bewegungen. In der Tat ist zur Anfangsbedingung  $v(0) = (r, 0)$  die Kurve

$$v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (r \cos t, r \sin t),$$

die eindeutige Lösung.

### 40.3. Zentralfelder.

**Definition 40.9.** Es sei  $U \subseteq V$  eine offene Teilmenge in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und es sei

$$g: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}, (t, v) \longmapsto g(t, v)$$

eine Funktion. Dann heißt das Vektorfeld

$$F: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto F(t, v) = g(t, v) \cdot v,$$

ein *Zentralfeld*.

Bei einem Zentralfeld sind also der Ortsvektor und der Richtungsvektor linear abhängig, d.h. der Richtungsvektor weist in Richtung des Ortsvektors. Daher findet die durch ein Zentralfeld definierte Bewegung allein auf der durch einen Ortspunkt und den Nullpunkt (dem Zentrum) festgelegten Geraden statt. Es handelt sich also im Grunde um einen eindimensional festgelegten Bewegungsvorgang, was auch im folgenden Lemma zum Ausdruck kommt.

**Lemma 40.10.** *Es sei  $U \subseteq V$  eine offene Teilmenge in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$ . Es sei*

$$F: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto F(t, v) = g(t, v) \cdot v,$$

*ein stetiges Zentralfeld zur stetigen Funktion*

$$g: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}, (t, v) \longmapsto g(t, v).$$

*Es sei  $w \in U$  und es sei*

$$\alpha: J \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine Lösung der eindimensionalen Differentialgleichung*

$$z' = h(t, z) := g(t, zw) \cdot z \text{ mit } \alpha(t_0) = 1.$$

Dann ist

$$v(t) = \alpha(t) \cdot w$$

eine Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = F(t, v) \text{ mit } v(t_0) = w.$$

*Beweis.* Es ist

$$\begin{aligned} v'(t) &= (\alpha(t) \cdot w)' \\ &= \alpha'(t) \cdot w \\ &= g(t, \alpha(t) \cdot w) \cdot \alpha(t) \cdot w \\ &= F(t, \alpha(t) \cdot w) \\ &= F(t, v(t)) \end{aligned}$$

und

$$v(t_0) = \alpha(t_0) \cdot w = w,$$

so dass eine Lösung des Anfangswertproblems vorliegt.  $\square$

**Beispiel 40.11.** Wir betrachten das Zentralfeld zum zeitunabhängigen identischen Vektorfeld

$$f: \mathbb{R} \times V \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto v,$$

die beschreibende Hilfsfunktion ist also durch

$$g(t, v) = 1$$

gegeben. Sei  $t_0$  und  $w \in V$  vorgegeben. Nach Lemma 40.10 müssen wir die eindimensionale gewöhnliche Differentialgleichung  $z' = z$  betrachten, die gesuchte Lösung ist

$$z(t) = e^{t-t_0}.$$

Daher ist

$$v(t) = e^{t-t_0} w$$

die Lösung des Anfangswertproblems zum Zentralfeld.

**Beispiel 40.12.** Wir betrachten das Zentralfeld zur Funktion

$$g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, (t, x, y) \longmapsto g(t, x, y) = \frac{t^2 x^2}{y},$$

also das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, x, y) \longmapsto \frac{t^2 x^2}{y} \cdot (x, y) = \left( \frac{t^2 x^3}{y}, t^2 x^2 \right),$$

und die Anfangsbedingung  $\varphi(0) = (4, -3)$ . Um dieses Anfangswertproblem zu lösen, müssen wir gemäß Lemma 40.10 die eindimensionale gewöhnliche Differentialgleichung

$$z' = g(t, 4z, -3z) \cdot z = \frac{t^2 16z^2}{-3z} \cdot z = -\frac{16}{3} t^2 z^2$$

mit der Anfangsbedingung  $z(0) = 1$  lösen. Dies ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen, nach Korollar 30.6 ist

$$z(t) = \frac{1}{\frac{16}{9}t^3 + 1}$$

die Lösung mit  $z(0) = 1$ . Daher ist

$$v(t) = \frac{1}{\frac{16}{9}t^3 + 1} (4, -3)$$

die Lösung des Anfangswertproblems zum Zentralfeld.

#### 40.4. Differentialgleichungen höherer Ordnung.

**Definition 40.13.** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und

$$h: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann nennt man den Ausdruck

$$y^{(n)} = h(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

eine *Differentialgleichung der Ordnung  $n$* .

Unter einer *Lösung einer Differentialgleichung höherer Ordnung* versteht man eine  $n$ -mal differenzierbare Funktion

$$y: J \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto y(t)$$

(wobei  $J \subseteq I$  ein offenes Teilintervall ist) derart, dass

$$y^{(n)}(t) = h(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

für alle  $t \in J$  gilt.

Differentialgleichungen beliebiger Ordnung können unter Inkaufnahme von neuen Variablen auf ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung zurückgeführt werden.

**Lemma 40.14.** *Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und*

$$h: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine Funktion. Dann ist die Differentialgleichung höherer Ordnung*

$$y^{(n)} = h(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

*über die Beziehung*

$$v_i := y^{(i)}$$

*äquivalent zum Differentialgleichungssystem*

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ h(t, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

*Beweis.* Wenn

$$y: J \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Lösung der Differentialgleichung höherer Ordnung

$$y^{(n)} = h(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

ist, so sind alle Funktionen  $v_i = y^{(i)}$  für  $i = 0, \dots, n-1$  differenzierbar, und es gilt  $v'_i = v_{i+1}$  für  $i = 0, \dots, n-2$  nach Definition und schließlich

$$\begin{aligned} v'_{n-1}(t) &= (y^{(n-1)})'(t) \\ &= y^{(n)}(t) \\ &= h(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \\ &= h(t, v_0(t), v_1(t), v_2(t), \dots, v_{n-1}(t)). \end{aligned}$$

Wenn umgekehrt

$$v: J \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Lösung des Differentialgleichungssystems zum Vektorfeld

$$F: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$(t, v_0, \dots, v_{n-1}) \longmapsto F(t, v_0, \dots, v_{n-1}) = (v_1, \dots, v_{n-1}, h(t, v_0, v_1, \dots, v_{n-1})),$$

ist, so ergibt sich sukzessive aus den ersten  $n-1$  Gleichungen, dass  $y = v_0$   $n$ -mal differenzierbar ist, und die letzte Gleichung des Differentialgleichungssystems besagt gerade

$$y^{(n)}(t) = h(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)).$$

□

Mit dieser Umformung ist auch klar, wie sinnvolle Anfangsbedingungen für eine Differentialgleichung höherer Ordnung aussehen. Man muss nicht nur einen Startwert  $y(t_0) = w_0$ , sondern auch die höheren Ableitungen  $y'(t_0) = w_1$ ,  $y''(t_0) = w_2$ , usw. festlegen.

## 40. ARBEITSBLATT

### 40.1. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 40.1.** Bestimme die<sup>7</sup> Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ mit } v(2) = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

<sup>7</sup>Mit dieser Formulierung wird hier und im Folgenden implizit benutzt, dass die Lösung eindeutig ist. In den meisten der hier gestellten Aufgaben ergibt sich die Eindeutigkeit direkt, sie ist aber nicht Teil der Aufgabenstellung.

**Aufgabe 40.2.** Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = \begin{pmatrix} t^2 - \sin t \\ \cos^2 t \end{pmatrix} \text{ mit } v(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 40.3.** Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems zum Vektorfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, x, y) \longmapsto (-ay, ax),$$

und zur Anfangsbedingung  $v(s) = (b, c)$  (dabei seien  $a, b, c, s \in \mathbb{R}$  fixierte reelle Zahlen).

**Aufgabe 40.4.** Wie löst man eine gewöhnliche Differentialgleichung zu einem stetigen ortsunabhängigen Vektorfeld

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v) = g(t)?$$

**Aufgabe 40.5.** Es sei

$$F: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto F(t, v),$$

ein Vektorfeld. Zeige, dass eine konstante Abbildung

$$\varphi: I \longrightarrow U, t \longmapsto \varphi(t) = c,$$

genau dann eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung  $v' = F(t, v)$  ist, wenn  $F(t, c) = 0$  für alle  $t \in I$  ist.

Die beiden folgenden Aufgaben beziehen sich auf Vektorfelder mit konstanter Richtung, siehe den Anhang.

**Aufgabe 40.6.** Löse das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = txy \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

zum Zeitpunkt 0.

**Aufgabe 40.7.** Löse das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = txy^2 \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zum Zeitpunkt 0.

**Aufgabe 40.8.\***

Es sei

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow V, t \longmapsto \varphi(t),$$

eine Lösung der zeitunabhängigen Differentialgleichung

$$v' = F(t, v) = F(v)$$

zum Vektorfeld

$$F: V \longrightarrow V.$$

Zeige, dass auch

$$\psi(t) := \varphi(t + c)$$

zu jedem  $c \in \mathbb{R}$  eine Lösung ist.

**Aufgabe 40.9.** Es sei  $W \subseteq V$  ein Untervektorraum in einem reellen endlichdimensionalen Vektorraum  $V$ . Es sei

$$F: I \times V \longrightarrow V$$

ein Vektorfeld auf  $V$  mit der Eigenschaft, dass  $F(t, v) \in W$  für alle  $(t, v) \in I \times V$  gilt. Zeige, dass jede Lösung zur Differentialgleichung

$$v' = F(t, v)$$

ganz in einer Teilmenge der Form  $P + W$  (einem affinen Unterraum von  $V$ ) verläuft.

**Aufgabe 40.10.\***

Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum,  $u \in V$  ein fixierter Vektor und

$$F: \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

ein stetiges Vektorfeld mit der Eigenschaft

$$F(t, v) = F(t, v + u)$$

für alle  $v \in V$ . Es sei

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow V$$

eine Lösung zur Differentialgleichung

$$v' = F(t, v).$$

Zeige, dass auch

$$\psi(t) := \varphi(t) + u$$

eine Lösung dieser Differentialgleichung ist.

**Aufgabe 40.11.** Es sei ein entkoppeltes Differentialgleichungssystem zum Vektorfeld

$$F(t, x_1, \dots, x_n) = (f_1(t, x_1), \dots, f_n(t, x_n))$$

gegeben. Erläutere, wie sich die Lösungen der einzelnen Differentialgleichungen  $x'_i = f_i(t, x_i)$  zur Gesamtlösung verhalten, wie dabei die Definitionintervalle der Lösungen zusammenhängen und was man über die Eindeutigkeit von Lösungen aussagen kann.

**Aufgabe 40.12.** Finde alle Lösungen des Differentialgleichungssystems zum Vektorfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, x, y) \longmapsto (t^2x, yt + \sin t).$$

**Aufgabe 40.13.\***

a) Zeige, dass die archimedischen Spiralen

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (at \cos(t + t_0), at \sin(t + t_0)),$$

(zu fixierten  $a, t_0 \in \mathbb{R}$ ) Lösungskurven für die Differentialgleichung (bei  $t > 0$ )

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -y + \frac{x}{t} \\ x + \frac{y}{t} \end{pmatrix}$$

sind.

b) Man gebe eine Lösung für das Anfangswertproblem

$$v\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

zu dieser Differentialgleichung an.

**Aufgabe 40.14.** Finde die Lösung  $\varphi$  des Anfangswertproblems für das Zentralfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, v, w) \longmapsto (t^2 - t)(v, w) = ((t^2 - t)v, (t^2 - t)w),$$

mit  $\varphi(0) = (1, 1)$ .

**Aufgabe 40.15.\***

Bestimme die Lösung  $\varphi$  des Anfangswertproblems für das Zentralfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, x, y) \longmapsto e^t x \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

mit  $\varphi(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 40.16.\***

Es sei ein Vektorfeld der Form

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, x, y) \longmapsto h(t, x, y) \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix},$$

mit einer stetigen Funktion

$$h: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (t, x, y) \longmapsto h(t, x, y),$$

gegeben. Die Richtungsvektoren stehen also stets senkrecht zu den Ortsvektoren. Es sei  $r \in \mathbb{R}$  und es sei

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Lösung zur eindimensionalen Differentialgleichung

$$y' = -h(t, r \cos y(t), r \sin y(t)).$$

Zeige, dass

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto \begin{pmatrix} r \cos(g(t)) \\ r \sin(g(t)) \end{pmatrix},$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$v' = F(t, v)$$

ist.

**Aufgabe 40.17.\***

Ein Sprinter übt bei einem Hundert-Meter-Lauf eine konstante Kraft

auf, die zu Beginn zu einer Beschleunigung  $b$  führt, die allerdings bei zunehmender Geschwindigkeit gegen den Luftwiderstand aufgebracht werden muss. Der Bewegungsvorgang wird beschrieben durch die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = ay' + b$$

mit  $a < 0$  und  $b > 0$ .

- (1) Erstelle eine Differentialgleichung erster Ordnung für den Geschwindigkeitsverlauf  $v(t) = y'(t)$  und löse das Anfangswertproblem für  $v(t)$  mit  $v(0) = 0$ .
- (2) Löse das Anfangswertproblem für  $y(t)$  mit  $y(0) = y'(0) = 0$ .
- (3) Bestimme  $y(t)$  für die (realistischen) Werte  $b = 4$  (in  $m/s^2$ ) und  $a = -\frac{1}{3}$ . Wo befindet sich der Sprinter nach einer Sekunde, wo nach zehn Sekunden, welche Geschwindigkeit hat er zu diesen Zeitpunkten?

**Aufgabe 40.18.\***

Professor Knopfloch würde gerne einen Weltrekord über 100 Meter aufstellen. Seine Grundbeschleunigung ist  $b = 2,5$  und es ist  $a = -\frac{1}{3}$ , vergleiche Aufgabe 40.17.

- (1) Wie lange bracht Professor Knopfloch für 100 Meter?
- (2) Mit der herkömmlichen Methode konnte Professor Knopfloch den Weltrekord nicht brechen. Deshalb versuch er es erneut, diesmal im Vakuum, um den Luftwiderstand zu umgehen und seine Kraft vollständig in Beschleunigung umzusetzen. Wie lange braucht Professor Knopfloch jetzt für 100 Meter? Bricht er den Weltrekord?

In der Vorlesung wurde nur besprochen, wie eine eindimensionale Differentialgleichung höherer Ordnung zu einem Differentialgleichungssystem erster Ordnung führt. Diese Übersetzung gibt es auch höherdimensional.

**Aufgabe 40.19.** Es sei ein Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1^{(n)} &= h_1\left(t, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(n-1)}, \dots, y_m, y_m', \dots, y_m^{(n-1)}\right), \dots, \\ y_m^{(n)} &= h_m\left(t, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}, y_2, y_2', \dots, y_2^{(n-1)}, \dots, y_m, y_m', \dots, y_m^{(n-1)}\right) \end{aligned}$$

der Ordnung  $n$  in  $m$  Variablen gegeben. Zeige, dass man dieses System analog zur Vorgehensweise in Lemma 40.14 in ein äquivalentes System erster Ordnung in  $mn$  Variablen übersetzen kann.

**Aufgabe 40.20.** Wir betrachten ein zweidimensionales Kraftfeld, das in jedem Punkt in Richtung des Ursprungs wirkt und damit eine Beschleunigung erzeugt, die proportional zur Entfernung sein soll (also ein harmonisches Pendel in der Ebene). Die zugehörige zweidimensionale Differentialgleichung zweiter Ordnung ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' = -c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

wobei  $c$  eine positive Konstante ist, die von der Masse des Zentrums abhängt. Mit den zusätzlichen Geschwindigkeitsvariablen  $u = x'$  und  $v = y'$  führt dies auf das System erster Ordnung in vier Variablen,

$$\begin{aligned} x' &= u, \\ u' &= -cx, \\ y' &= v, \\ v' &= -cy. \end{aligned}$$

Dabei sind die beiden ersten Gleichungen unabhängig von den beiden letzten Gleichungen, und zwar handelt es sich jeweils um das in Aufgabe 28.20 besprochene System. Somit sind die Lösungen gleich

$$x(t) = \alpha \cos \sqrt{ct} + \beta \sin \sqrt{ct}$$

und

$$y(t) = \gamma \cos \sqrt{ct} + \delta \sin \sqrt{ct}.$$

Man überlege sich, wie die Anfangsbedingungen  $(x_0, u_0, y_0, v_0)$  mit den Lösungsparametern  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  zusammenhängen und welche Bahnen die

Lösungskurven beschreiben. Wann ist es ein Kreis, eine Ellipse, ein Strahl, eine Spirale?

**Aufgabe 40.21.** Wir betrachten ein zweidimensionales Kraftfeld, d.h. im Ursprungspunkt  $(0, 0)$  ist das Gravitationszentrum (ein Stern), das eine auf dieses Zentrum gerichtete Kraftwirkung und damit eine Beschleunigung erzeugt. Nach dem Gravitationsgesetz ist die Kraft proportional zum Produkt der beiden Massen geteilt durch das Quadrat des Abstandes. Das Gravitationszentrum wird als unbeweglich angenommen, und es wird die Wirkungsweise auf einen (verglichen mit der Masse des Zentrums) kleinen Probekörper untersucht. Da in die Beschleunigung des Probekörpers dessen Masse auch proportional eingeht, ist diese für den Bewegungsprozess irrelevant. Die zugehörige zweidimensionale Differentialgleichung zweiter Ordnung ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' = -c \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|^3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

wobei  $c$  eine positive Konstante ist, die von der Masse des Zentrums und der Gravitationskonstanten abhängt. Mit den zusätzlichen Geschwindigkeitsvariablen  $u = x'$  und  $v = y'$  führt dies auf das System erster Ordnung in vier Variablen,

$$\begin{aligned} x' &= u, \\ u' &= -\frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} x, \\ y' &= v, \\ v' &= -\frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} y. \end{aligned}$$

- (1) Wir betrachten kreisförmige Lösungen der Form

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos at \\ r \sin at \end{pmatrix}$$

mit  $a, r \in \mathbb{R}_+$ . Welche Beziehung muss zwischen  $c, a, r$  bestehen (drittes Keplersches Gesetz)?

- (2) Wir betrachten elliptische Lösungen der Form

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos at \\ s \sin at \end{pmatrix}$$

mit  $a, r, s \in \mathbb{R}_+$ . Welche Beziehung muss zwischen  $c, a, r, s$  bestehen?

- (3) Finde Lösungen, die auf einem Strahl zum Zentrum verlaufen.

## 40.2. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 40.22.** (4 Punkte)

Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = \left( -\sin^3 t \cos t, \frac{t^3 - t + 1}{t^2 - 4} \right) \text{ mit } v(0) = (3, 7) .$$

**Aufgabe 40.23.** (4 Punkte)

Finde die Lösung des Anfangswertproblems zum Vektorfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, x, y) \longmapsto \left( xt - 3(t+1)e^{-t}, \frac{t^2}{\sin y} \right)$$

und zur Anfangsbedingung  $v(0) = (2, 0)$ .**Aufgabe 40.24.** (3 Punkte)

Löse das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = t^2(x - y) \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zum Zeitpunkt 0.

**Aufgabe 40.25.** (4 Punkte)Finde die Lösung  $\varphi$  des Anfangswertproblems für das Zentralfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, v, w) \longmapsto (t^3 - t)(v, w) = ((t^3 - t)v, (t^3 - t)w),$$

mit  $\varphi(0) = (2, 3)$ .**Aufgabe 40.26.** (4 Punkte)Finde die Lösung  $\varphi$  des Anfangswertproblems für das Zentralfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, v, w) \longmapsto (t^2v)(v, w) = (t^2v^2, t^2vw),$$

mit  $\varphi(0) = (5, -1)$ .

**Aufgabe 40.27.** (5 Punkte)

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $U \subseteq V$  offen und

$$F: U \longrightarrow V$$

ein zeitunabhängiges Vektorfeld. Es sei

$$v: J \longrightarrow U$$

eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung  $v' = F(v)$ . Es gebe zwei Zeitpunkte  $t_0 \neq t_1$  in  $J$  mit  $v(t_0) = v(t_1)$ . Zeige, dass es dann eine auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte Lösung dieser Differentialgleichung gibt.

**40.3. Die Aufgabe zum Hochladen.**

Für die folgende Aufgabe gibt es keinen festen Abgabetermin. Hochladen meint über Commons in einem dort erlaubten Format.

**Aufgabe 40.28.** (10 Punkte)

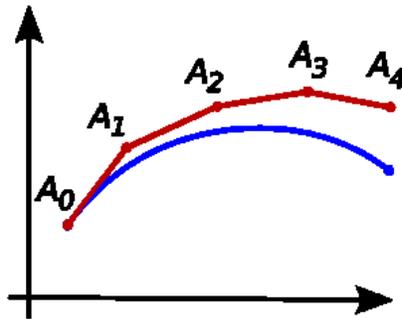
Erstelle eine Animation, die den Weltrekordlauf von Usain Bolt über 100 Meter vom 16. August 2009 mit geeigneten Parametern  $a$  und  $b$  aus Aufgabe 40.17 modelliert.

**41. VORLESUNG - LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN**

Es ist im Allgemeinen schwierig, eine Differentialgleichung explizit zu lösen. Wir besprechen daher zwei approximierende Verfahren, nämlich das *eulersche Polygonzugverfahren* und den *Potenzreihenansatz*.

### 41.1. Das Polygonzugverfahren.

Mit dem (eulerschen) Polygonzugverfahren wird die Lösungskurve einer Differentialgleichung diskret approximiert.



**Verfahren 41.1.** Es sei ein Vektorfeld

$$F: G \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

auf einer offenen Menge  $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  und eine Anfangsbedingung  $y(t_0) = P \in \mathbb{R}^d$  gegeben. Das *eulersche Polygonzugverfahren* funktioniert folgendermaßen: Man wählt eine Schrittweite  $s > 0$  und berechnet rekursiv die Punktfolge  $P_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , durch  $P_0 = P$  und

$$P_{n+1} = P_n + sF(t_0 + ns, P_n).$$

Zu einem schon konstruierten Punkt  $P_n$  wird also das  $s$ -fache des Richtungsvektors zum Zeitpunkt  $t_0 + ns$  an diesem Punkt hinzuaddiert. Dies funktioniert nur, solange die Punkte im Definitionsbereich des Vektorfeldes liegen. Der zu dieser Punktfolge gehörende *Streckenzug* oder *Polygonzug*

$$\delta: \mathbb{R}_{\geq t_0} \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

ist die lineare Interpolation mit  $\delta(t_0 + ns) = P_n$ , d.h. für  $t$  mit  $t_0 + ns \leq t \leq t_0 + (n+1)s$  ist

$$\delta(t) = P_n + \frac{t - t_0 - ns}{s}(P_{n+1} - P_n).$$

Dieser Streckenzug  $\delta$  stellt eine stückweise lineare Approximation der Lösungskurve des Anfangswertproblems dar. Für eine kleinere Schrittweite wird die Approximation im Allgemeinen besser.

**Beispiel 41.2.** Bei einer eindimensionalen ortsunabhängigen Differentialgleichung

$$y' = g(t)$$

ergibt sich  $y$  einfach als eine Stammfunktion zu  $g$ . Wendet man in dieser Situation Verfahren 41.1 zum Startzeitpunkt  $t_0$ , zum Startpunkt  $c$  und zur

Schrittweite  $s$  an, so ergibt sich die rekursive Beziehung

$$P_0 = c \text{ und } P_{n+1} = P_n + sg(t_0 + ns).$$

Daher ist offenbar

$$P_n = c + s(g(t_0) + g(t_0 + s) + g(t_0 + 2s) + \cdots + g(t_0 + (n-1)s)).$$

D.h. dass man zu dem Ausgangswert  $c$  das Treppenintegral zur äquidistanten Unterteilung  $t_0, t_0+s, t_0+2s, \dots, t_0+(n-1)s$  (und zur durch  $g(t_0+ks)$  auf dem Teilintervall  $[t_0+ks, t_0+(k+1)s]$  gegebenen Treppenfunktion) hinzuaddiert. Der zugehörige Streckenzug ist die (stückweise lineare) Integralfunktion zu dieser Treppenfunktion.

**Beispiel 41.3.** Wir wollen für das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - ty \\ txy \end{pmatrix} = F(t, x, y)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gemäß Verfahren 41.1 einen approximierenden Streckenzug berechnen. Wir wählen die Schrittweite  $s = \frac{1}{10}$ . Somit ist

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{10}F(0, P_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1 + \frac{1}{10}F\left(\frac{1}{10}, P_1\right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{11}{10} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \left(\frac{11}{10}\right)^2 - \frac{1}{10} \cdot 1 \\ \frac{1}{10} \cdot \frac{11}{10} \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{11}{10} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \frac{111}{100} \\ \frac{11}{100} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1211}{1000} \\ \frac{1011}{1000} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P_3 &= P_2 + \frac{1}{10}F\left(\frac{2}{10}, P_2\right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1211}{1000} \\ \frac{1011}{1000} \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \left(\frac{1211}{1000}\right)^2 - \frac{2}{10} \cdot \frac{1011}{1000} \\ \frac{2}{10} \cdot \frac{1211}{1000} \cdot \frac{1011}{1000} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1211}{1000} \\ \frac{1011}{1000} \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} \frac{1264321}{1000000} \\ \frac{2448642}{10000000} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{133743210}{10000000} \\ \frac{103548642}{10000000} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wer erwähnen kurz eine weitere approximative Lösungsmöglichkeit für Differentialgleichungen, siehe hierzu den Anhang und die Übungen.

**Bemerkung 41.4.** Es sei ein Anfangswertproblem

$$x' = F(t, x) \text{ mit } x(0) = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$$

zu einem Vektorfeld

$$F: I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

gegeben, wobei die Komponentenfunktionen  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , polynomial (oder durch Potenzreihen gegeben) seien. Dann lässt sich ein *Potenzreihenansatz* für die Lösung durchführen. Das bedeutet, dass man den Ansatz  $x_i = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ki} t^k$  mit unbestimmten Koeffizienten  $a_{ki}$  macht, und diese Koeffizienten (bis zu einem gewünschten Grad) aus den  $n$  Gleichungen

$$x'_i(t) = F_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$$

sukzessive bestimmt. Die Anfangsbedingungen

$$x_i(0) = a_{0i} = c_i$$

legen dabei die konstanten Koeffizienten der Potenzreihen fest. In das Differentialgleichungssystem werden die Potenzreihen links und rechts eingesetzt und ausgewertet, wobei die Ableitung links formal zu nehmen ist und rechts die Reihen formal zu addieren und zu multiplizieren sind. Dies ergibt Gleichungen für Potenzreihen in  $t$ , die durch Koeffizientenvergleich, beginnend mit den Koeffizienten von kleinem Grad, gelöst werden können.

## 41.2. Lineare Differentialgleichungssysteme.

**Definition 41.5.** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes reelles Intervall. Eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix ist, deren Einträge allesamt Funktionen

$$a_{ij}: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto a_{ij}(t),$$

sind, heißt *homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung* oder *homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem*.

Es handelt sich also um die Differentialgleichung zum Vektorfeld

$$f: I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (t, v) \longmapsto f(t, v) = (M(t))v = \begin{pmatrix} a_{11}(t)v_1 + \dots + a_{1n}(t)v_n \\ \vdots \\ a_{n1}(t)v_1 + \dots + a_{nn}(t)v_n \end{pmatrix}.$$

Dieses Vektorfeld ist zu jedem fixierten Zeitpunkt  $t \in I$  eine lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, v \longmapsto M(t)v.$$

Ausgeschrieben liegt das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t)v_1 + \cdots + a_{1n}(t)v_n \\ \vdots \\ a_{n1}(t)v_1 + \cdots + a_{nn}(t)v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

vor. Es gibt immer die Nulllösung, also die konstante Abbildung mit dem Nullvektor als Wert, diese nennt man auch die triviale Lösung.

Für lineare Differentialgleichungssysteme gibt es wieder eine inhomogene Variante.

**Definition 41.6.** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes reelles Intervall. Eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv + z,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix ist, deren Einträge allesamt Funktionen

$$a_{ij}: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto a_{ij}(t),$$

sind und wobei

$$z: I \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \longmapsto z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix},$$

eine Abbildung ist, heißt *inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung* oder *inhomogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem*. Die Abbildung  $z$  heißt dabei *Störabbildung*.

Insgesamt liegt das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11}(t)v_1 + \cdots + a_{1n}(t)v_n + z_1(t) \\ \vdots \\ a_{n1}(t)v_1 + \cdots + a_{nn}(t)v_n + z_n(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

vor.

Die explizite Lösbarkeit eines solchen Systems hängt natürlich von der Kompliziertheit der beteiligten Funktionen  $a_{ij}$  und  $z_i$  ab. In der folgenden Situation kann man das System auf einzelne eindimensionale lineare inhomogene Differentialgleichungen zurückführen und dadurch sukzessive lösen.

**Lemma 41.7.** *Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und es liege eine inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung der Form*

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

mit stetigen Funktionen  $a_{ij}: I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $z_i: I \rightarrow \mathbb{R}$  und den Anfangsbedingungen

$$v_i(t_0) = w_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \dots, n \text{ (} t_0 \in I \text{)}$$

vor. Dann lässt sich diese Gleichung lösen, indem man sukzessive unter Verwendung der zuvor gefundenen Lösungen die inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen in einer Variablen, nämlich

$$\begin{aligned} v_n' &= a_{nn}(t)v_n + z_n(t) \text{ mit } v_n(t_0) = w_n, \\ v_{n-1}' &= a_{n-1, n-1}(t)v_{n-1} + a_{n-1, n}(t)v_n(t) + z_{n-1}(t) \text{ mit } v_{n-1}(t_0) = w_{n-1}, \\ v_{n-2}' &= a_{n-2, n-2}(t)v_{n-2} + a_{n-2, n-1}(t)v_{n-1}(t) + a_{n-2, n}(t)v_n(t) + z_{n-2}(t) \text{ mit } v_{n-2}(t_0) = w_{n-2}, \\ &\vdots \\ v_1' &= a_{11}(t)v_1 + a_{12}(t)v_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)v_n(t) + z_1(t) \text{ mit } v_1(t_0) = w_1, \end{aligned}$$

löst.

*Beweis.* Das ist trivial. □

Die Lösungen eines solchen linearen Differentialgleichungssystems in oberer Dreiecksgestalt stehen also in Bijektion zu den Lösungen der  $n$  linearen inhomogenen Differentialgleichungen in einer Ortsvariablen, wobei die Störfunktionen jeweils mit den anderen Lösungen in der beschriebenen Weise zusammenhängen. Insbesondere übertragen sich Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen.

Auch wenn man ein homogenes System lösen möchte, so muss man in den Einzelschritten inhomogene Differentialgleichungen lösen.

**Beispiel 41.8.** Wir betrachten das homogene lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & t-1 \\ 0 & \frac{2t}{t^2+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

für  $t > 0$ . Die zweite Zeile dieses Systems bedeutet

$$y' = \frac{2t}{t^2+1} \cdot y,$$

das ist eine homogene lineare Differentialgleichung in einer Variablen. Ihre Lösungen sind gemäß Satz 29.2 gleich

$$y(t) = c(t^2 + 1) = ct^2 + c$$

mit einem  $c \in \mathbb{R}$ . Die erste Zeile des Systems führt daher auf

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{t}x + (t-1)y \\ &= \frac{1}{t}x + c(t-1)(t^2+1) \\ &= \frac{1}{t}x + c(t^3 - t^2 + t - 1). \end{aligned}$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung in einer Variablen. Die zugehörige homogene Gleichung  $x' = \frac{1}{t}x$  besitzt  $t$  als eine Lösung. Nach Satz 29.10 müssen wir eine Stammfunktion von

$$c \frac{t^3 - t^2 + t - 1}{t} = c \left( t^2 - t + 1 - \frac{1}{t} \right)$$

finden, eine solche ist

$$c \left( \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t - \ln t \right) + d.$$

Daher ist

$$t \left( c \left( \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t - \ln t \right) + d \right) = \frac{c}{3}t^4 - \frac{c}{2}t^3 + ct^2 - ct \ln t + dt$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung. Also ist die allgemeine Lösung des Systems gleich

$$\begin{pmatrix} \frac{c}{3}t^4 - \frac{c}{2}t^3 + ct^2 - ct \ln t + dt \\ ct^2 + c \end{pmatrix}.$$

### 41.3. Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten.

Falls die Funktionen  $a_{ij}$  alle konstant sind, so spricht man von einem *linearen Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten*, welche im Wesentlichen mit Mitteln der linearen Algebra gelöst werden können. Dazu ist es sinnvoll, von vornherein auch komplexe Koeffizienten zuzulassen.

**Definition 41.9.** Eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix mit Einträgen  $a_{ij} \in \mathbb{C}$  ist, heißt *homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten* oder *homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten*.

**Definition 41.10.** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall. Eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv + z,$$

wobei  $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$  eine Matrix mit Einträgen  $a_{ij} \in \mathbb{C}$  ist

und

$$z: I \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

eine Abbildung, heißt *inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten* oder *inhomogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten*.

Die Störfunktion muss also nicht konstant sein.

**Bemerkung 41.11.** Es sei

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y + f(t) = 0$$

eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten, d.h. die  $a_i$  sind reelle (oder komplexe) Zahlen. Das gemäß Lemma 40.14 zugehörige Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ h(t, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) \end{pmatrix}$$

mit

$$v_i := y^{(i)}$$

und

$$h(t, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) := -a_{n-1}v_{n-1} - \dots - a_1v_1 - a_0v_0 - f(t)$$

wird in dieser Situation zum linearen Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -f(t) \end{pmatrix}.$$

## 41. ARBEITSBLATT

## 41.1. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 41.1.** Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = y$$

mit der Anfangsbedingung  $y(0) = 1$ . Bestimme zur Schrittweite  $s = \frac{1}{k}$  die approximierenden Punkte  $P_n$  gemäß dem Polygonzugverfahren. Bestimme insbesondere  $P_k$ . Was passiert mit  $P_k$  für  $k \rightarrow \infty$ ?

**Aufgabe 41.2.** Wir betrachten das Vektorfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, x, y) \longmapsto (-y, x).$$

Es sei  $P_0 \neq (0, 0)$  und  $s > 0$  eine Schrittweite. Zeige, dass das Polygonzugverfahren zu einem Streckenzug  $P_0, P_1, P_2, \dots$  führt, bei dem der Abstand der Punkte zum Nullpunkt gegen unendlich läuft (obwohl nach Beispiel 40.8 die Lösungskurven Kreise beschreiben). Wie verhalten sich die Winkel am Nullpunkt, die durch  $P_n$  und  $P_{n+1}$  gegeben sind.

**Aufgabe 41.3.** Löse das Anfangswertproblem

$$y' = y \text{ mit } y(0) = 1$$

durch einen Potenzreihenansatz.

**Aufgabe 41.4.\***

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = ty + 1 \text{ mit } y(0) = 0$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur Ordnung 5.

**Aufgabe 41.5.** Löse das Anfangswertproblem

$$y' = y^3 - y - 4t + 2t^2 \text{ mit } y(0) = 2$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

**Aufgabe 41.6.** Löse das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 + t^2y - 5ty^2 + 3t^3 \text{ mit } y(0) = 0$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

**Aufgabe 41.7.** (1) Löse das Anfangswertproblem

$$y'' = -\sin y$$

mit  $y(0) = 0$  und  $y'(0) = 1$  durch einem Potenzreihenansatz bis zur Ordnung 5.

(2) Löse das Anfangswertproblem

$$y'' = -y$$

mit  $y(0) = 0$  und  $y'(0) = 1$  durch einem Potenzreihenansatz bis zur Ordnung 5.

(3) Vergleiche die Lösungen zu (1) und (2).

Für die beiden folgenden Aufgaben verwende man die Potenzreihe

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 \pm \dots$$

Für den inhaltlichen Hintergrund siehe Beispiel Anhang 3.5 bzw. Beispiel 3.6.

**Aufgabe 41.8.\***

Löse mit einem Potenzreihenansatz das Anfangswertproblem

$$x'' = \frac{-2gx - 4x(x')^2}{1 + 4x^2}$$

mit  $x(0) = 0$  und  $x'(0) = 1$  bis zur Ordnung 4. Dabei ist  $g$  eine Konstante.

**Aufgabe 41.9.** Löse das Anfangswertproblem

$$x'' = -gx\sqrt{1-x^2} - \frac{x}{1-x^2}x'^2.$$

mit  $x(0) = 0$  und  $x'(0) = 1$  durch einen Potenzreihenansatz bis zur Ordnung 4.

**Aufgabe 41.10.\***

Löse das Anfangswertproblem

$$y'' = 3yy' + y^2 \text{ mit } y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = 2$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

**Aufgabe 41.11.** Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' = \begin{pmatrix} xt^2 - y^2t \\ xy \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

**Aufgabe 41.12.** Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' = \begin{pmatrix} t^3 - yt^2 \\ tx^2y - \sinh t \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

**Aufgabe 41.13.** Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin t \\ t^5 \end{pmatrix}$$

für  $t > 0$ .

**Aufgabe 41.14.** Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t & 1-t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 41.15.** Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 41.16.** Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 41.17.** Bestimme alle Lösungen (für  $t > 0$ ) des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & t^3 - t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 41.18.** Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & t^2 - t + 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 41.19.** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein reelles Intervall und seien

$$f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

differenzierbare Funktionen mit

$$f_{11}(t)f_{22}(t) - f_{21}(t)f_{12}(t) \neq 0$$

für alle  $t \in I$ . Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{f'_{11}f_{22} - f'_{12}f_{21}}{f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}} & \frac{-f'_{11}f_{12} + f'_{12}f_{11}}{f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}} \\ \frac{f'_{21}f_{22} - f'_{22}f_{21}}{f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}} & \frac{-f'_{12}f_{21} + f'_{22}f_{11}}{f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass sowohl  $\begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{pmatrix}$  als auch  $\begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{22} \end{pmatrix}$  Lösungen des Differentialgleichungssystems sind.

**Aufgabe 41.20.** Es sei

$$M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0$$

eine (variable)  $n \times n$ -Matrix, deren Einträge stetige Funktionen

$$a_{ij}: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien. Zeige, dass die einzige konstante Lösung der linearen Differentialgleichung  $v' = Mv$  die Nulllösung ist.

**Aufgabe 41.21.\***

Es sei

$$v' = Mv$$

ein lineares Differentialgleichungssystem auf  $I \times \mathbb{R}^n$  ( $I$  ein reelles Intervall) mit einer Funktionenmatrix

$$M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n},$$

wobei das zugrunde liegende Vektorfeld zugleich ein Zentralfeld sei. Zeige, dass die Matrix die Gestalt

$$M(t) = \varphi(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit einer geeigneten Funktion

$$\varphi: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

besitzt.

**Aufgabe 41.22.** Es sei  $M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$  eine (variable)  $n \times n$ -Matrix, deren Einträge Funktionen

$$a_{ij}: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien. Es sei  $u \in \mathbb{R}^n$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$  für alle  $t \in I$ . Zeige, dass  $e^{\lambda t} \cdot u$  eine Lösung der linearen Differentialgleichung  $v' = Mv$  ist.

**Aufgabe 41.23.** Es sei  $M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$  eine (variable)  $n \times n$ -Matrix, deren Einträge stetige Funktionen

$$a_{ij}: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien. Es sei  $u \in \mathbb{R}^n$  ein (konstanter) Eigenvektor von  $M(t)$  zum (variablen, von  $t$  differenzierbar abhängigen) Eigenwert  $\lambda(t)$ . Zeige durch ein Beispiel, dass  $e^{\lambda(t)t} \cdot u$  keine Lösung der linearen Differentialgleichung  $v' = Mv$  sein muss.

**Aufgabe 41.24.** Es sei

$$M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$$

eine (variable)  $n \times n$ -Matrix, deren Einträge stetige Funktionen

$$a_{ij}: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien. Es sei  $u(t) \in \mathbb{R}^n$  ein (variabler, von  $t$  differenzierbar abhängiger) Eigenvektor von  $M(t)$  zum konstanten Eigenwert  $\lambda$ . Zeige durch ein Beispiel, dass  $e^{\lambda t} \cdot u(t)$  keine Lösung der linearen Differentialgleichung  $v' = Mv$  sein muss.

**Aufgabe 41.25.** Es sei  $v' = Mv$  ein lineares Differentialgleichungssystem auf dem endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$  und  $\varphi: V \rightarrow W$  eine bijektive lineare Abbildung. Zeige, dass die transformierte Differentialgleichung auf  $W$  ebenfalls linear ist.

**Aufgabe 41.26.** Löse mit einem Potenzreihenansatz das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t^2 - 1 & t^3 + t + 2 \\ t + 3 & t^2 + t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bis zur fünften Ordnung.

## 41.2. Aufgaben zum Abgeben.

### Aufgabe 41.27. (6 Punkte)

a) Schreibe ein Computerprogramm, das zu dem Vektorfeld aus Beispiel 41.3 zu einem Startzeitpunkt  $t_0$ , einem Startpunkt  $P_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  und einer vorgegebenen Schrittweite  $s > 0$  die approximierenden Punkte  $P_n$  berechnet.

b) Berechne mit diesem Programm die Punkte  $P_n$  für

$$(1) \quad t_0 = 0, P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s = \frac{1}{10}, n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10.$$

$$(2) \quad t_0 = 0, P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s = \frac{1}{100}, n = 100.$$

$$(3) \quad t_0 = 0, P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s = \frac{1}{1000}, n = 1000.$$

$$(4) \quad t_0 = 0, P_0 = \begin{pmatrix} 0,999 \\ 1,001 \end{pmatrix}, s = \frac{1}{1000}, n = 1000.$$

$$(5) \quad t_0 = 0, P_0 = \begin{pmatrix} 0,99 \\ 1,01 \end{pmatrix}, s = \frac{1}{1000}, n = 1000.$$

$$(6) \quad t_0 = 0, P_0 = \begin{pmatrix} 0,9 \\ 1,1 \end{pmatrix}, s = \frac{1}{1000}, n = 1000.$$

$$(7) \quad t_0 = -4, P_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}, s = \frac{1}{10}, n = 100.$$

$$(8) \quad t_0 = 0, P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s = \frac{1}{1000}, n = 1000.$$

(Abzugeben ist lediglich Teil b), und zwar in einer leserfreundlichen Form.)

### Aufgabe 41.28. (5 (1+2+2) Punkte)

a) Übersetze das Anfangswertproblem zweiter Ordnung

$$y'' = -y \text{ mit } y(0) = 0 \text{ und } y'(0) = 1$$

in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

b) Bestimme mit dem Polygonzugverfahren zur Schrittweite  $s = \frac{1}{2}$  die Näherungspunkte  $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4$  für dieses System.

c) Berechne den Wert des zugehörigen Streckenzuges an der Stelle  $t = \pi/2$ .

### Aufgabe 41.29. (6 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'' = \begin{pmatrix} x^2 t - xyt + y^3 - yt^3 \\ x^3 - xy^2 + \cos t \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

durch einen Potenzreihenansatz bis zur vierten Ordnung.

**Aufgabe 41.30.** (4 Punkte)

Bestimme alle Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2 & -t^2 - 3t + 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 41.31.** (8 (2+2+4) Punkte)

Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- (1) Erstelle eine Differentialgleichung in einer Variablen, die die Funktion  $z(t) = x^2(t) + y^2(t)$  zu einer Lösung  $(x, y)$  erfüllen muss.
- (2) Finde eine Lösung für  $z(t)$  aus Teil (1).
- (3) Finde eine nichttriviale Lösung des Differentialgleichungssystems.

Bemerkung: Im ersten und zweiten Teil wird untersucht, wie sich bei einer Lösung des Systems der Abstand zum Nullpunkt (bzw. dessen Quadrat) verhält. Es liegt nahe, sich für den dritten Teil zu überlegen, wie sich bei einer Lösung der Winkel zur  $x$ -Achse verhält (Polarkoordinaten).

**Aufgabe 41.32.** (4 Punkte)

Finde eine nichttriviale Lösung (für  $t > 1$ ) zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{4t^4-1}{t^5-t} & \frac{-3t}{t^4-1} \\ \frac{-t}{t^4-1} & \frac{3t^4-2}{t^5-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit Hilfe von Aufgabe 41.19.

Die für  $t \in \mathbb{R}$ ,  $-1 < t < 1$ , und ein  $n \in \mathbb{N}$  definierte lineare Differentialgleichung

$$y'' - \frac{2t}{1-t^2}y' + \frac{n(n+1)}{1-t^2}y = 0$$

heißt *Legendresche Differentialgleichung* zum Parameter  $n$ .

**Aufgabe 41.33.** (5 Punkte)

Zeige, dass das  $n$ -te *Legendre-Polynom*<sup>8</sup>

$$\frac{1}{2^n(n!)}((t^2 - 1)^n)^{(n)}$$

eine Lösung der Legendreschen Differentialgleichung zum Parameter  $n$  ist.

<sup>8</sup>Hier bedeutet das hochgestellte  $(n)$  die  $n$ -te Ableitung.

## 42. VORLESUNG - KONSTANTE KOEFFIZIENTEN

**42.1. Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten - Lösungsverfahren.**

Es sei eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten gegeben, d.h.

$$v' = Mv$$

mit einer konstanten Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ mit } a_{ij} \in \mathbb{K}.$$

Wir lassen hier also auch den Fall zu, dass die Einträge komplexe Zahlen sind. Beim Auffinden der Lösungen zu einer reellen Matrix ist es nämlich hilfreich, die reellen Zahlen als komplexe Zahlen aufzufassen, um dort Umformungen durchzuführen, die im Reellen nicht möglich sind. Die Lösungen werden aber nach wie vor auf reellen Intervallen definiert sein.

Ausgeschrieben liegt also das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + \dots + a_{nn}v_n \end{pmatrix}$$

vor. Solche Systeme lassen sich mit Hilfe der linearen Algebra auf eine Folge von inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen in einer Variablen zurückführen und damit sukzessive lösen. Das folgende einfache Lemma gibt bereits einen deutlichen Hinweis darauf, dass lineare Eigenschaften der Matrix  $M$  eng mit den Lösungen des Differentialgleichungssystems zusammenhängen.

**Lemma 42.1.** *Es sei*

$$v' = Mv$$

*mit  $M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$  eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und es sei  $u \in \mathbb{K}^n$  ein Eigenvektor zu  $M$  zum Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Dann ist die Abbildung*

$$v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n, t \longmapsto ce^{\lambda t}u = c \begin{pmatrix} e^{\lambda t}u_1 \\ \vdots \\ e^{\lambda t}u_n \end{pmatrix},$$

*( $c \in \mathbb{K}$ ) eine Lösung dieses Differentialgleichungssystems.*

*Beweis.* Dies folgt direkt aus

$$\begin{aligned}
 v'(t) &= \begin{pmatrix} (ce^{\lambda t}u_1)' \\ \vdots \\ (ce^{\lambda t}u_n)' \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (ce^{\lambda t}u_1)' \\ \vdots \\ (ce^{\lambda t}u_n)' \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \lambda ce^{\lambda t}u_1 \\ \vdots \\ \lambda ce^{\lambda t}u_n \end{pmatrix} \\
 &= \lambda ce^{\lambda t} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \\
 &= M \left( ce^{\lambda t} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \right) \\
 &= M \begin{pmatrix} ce^{\lambda t}u_1 \\ \vdots \\ ce^{\lambda t}u_n \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

□

**Definition 42.2.** Es sei

$$v' = Mv$$

mit  $M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$  eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Dann nennt man das charakteristische Polynom

$$\chi_M = \det(tE_n - M)$$

auch das *charakteristische Polynom* der Differentialgleichung.

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind nach Satz 23.2 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)) Eigenwerte von  $M$  und liefern somit nach Lemma 42.1 Lösungen des Differentialgleichungssystems.

**Bemerkung 42.3.** Es sei

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten und es sei

$$v' = Mv$$

das zugehörige System von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, also mit der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Das zu dieser Matrix gehörige charakteristische Polynom ist nach Aufgabe 42.23 gleich

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0.$$

D.h. man kann dieses Polynom direkt aus der eingangs gegebenen Differentialgleichung höherer Ordnung ablesen.

**Beispiel 42.4.** Zu einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

ist das charakteristische Polynom gleich

$$t^2 + a_1t + a_0.$$

Dessen Nullstellen sind einfach zu bestimmen, es ist

$$t_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}.$$

Nun untersuchen wir systematisch, wie man Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten löst.

**Lemma 42.5.** *Es sei*

$$v' = Mv$$

*mit  $M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$  eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, es sei  $B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$  eine invertierbare Matrix und es sei*

$$N = BMB^{-1}.$$

*Dann ist*

$$v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n, t \longmapsto v(t),$$

*genau dann eine Lösung von  $v' = Mv$ , wenn  $w = Bv$  eine Lösung der Differentialgleichung  $w' = Nw$  ist.*

*Beweis.* Es sei vorausgesetzt, dass

$$v' = Mv$$

ist. Dann gelten für  $w = Bv$  mit  $B = (b_{ij})_{ij}$  die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 w'(t) &= \begin{pmatrix} w'_1(t) \\ \vdots \\ w'_n(t) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (b_{11}v_1(t) + \cdots + b_{1n}v_n(t))' \\ \vdots \\ (b_{n1}v_1(t) + \cdots + b_{nn}v_n(t))' \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} b_{11}v'_1(t) + \cdots + b_{1n}v'_n(t) \\ \vdots \\ b_{n1}v'_1(t) + \cdots + b_{nn}v'_n(t) \end{pmatrix} \\
 &= B \begin{pmatrix} v'_1(t) \\ \vdots \\ v'_n(t) \end{pmatrix} \\
 &= BM \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{pmatrix} \\
 &= BMB^{-1} \begin{pmatrix} w_1(t) \\ \vdots \\ w_n(t) \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

so dass  $w$  die Differentialgleichung

$$w' = Nw$$

löst. Die inverse Transformation zeigt, dass zu einer Lösung von  $w' = Nw$  die Abbildung  $B^{-1}w$  eine Lösung für  $v' = Mv$  ist.  $\square$

**Satz 42.6.** *Es sei*

$$v' = Mv$$

mit  $M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$  ein homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten. Dann gibt es eine invertierbare Matrix  $B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$  derart, dass das äquivalente Differentialgleichungssystem

$$w' = Nw \text{ mit } N = BMB^{-1}$$

obere Dreiecksgestalt besitzt, also von der Form

$$\begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ \vdots \\ w'_{n-1} \\ w'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}$$

(mit  $c_{ij} \in \mathbb{C}$ ) ist. Dieses System lässt sich sukzessive von unten nach oben mit dem Lösungsverfahren für inhomogene lineare Differentialgleichungen in

einer Variablen lösen. Wenn zusätzlich Anfangsbedingungen  $v_i(t_0) = a_i$  für  $i = 1, \dots, n$  gegeben sind, so ist die Lösung eindeutig.

*Beweis.* Aufgrund von Satz 25.12 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)) ist die Matrix  $M$  trigonalisierbar, d.h. es gibt eine invertierbare Matrix  $B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$  derart, dass

$$N = BMB^{-1}$$

obere Dreiecksgestalt besitzt. Das lineare Differentialgleichungssystem  $w' = Nw$  besitzt also die angegebene Gestalt, und es ist wegen Lemma 42.5 äquivalent zum ursprünglichen System. Das System in oberer Dreiecksgestalt löst man wie in Lemma 41.6 beschrieben. Eine Anfangsbedingung für  $v' = Mv$  übersetzt sich direkt in eine Anfangsbedingung für  $w' = Nw$ . In dem soeben beschriebenen Lösungsverfahren gibt es dann jeweils eine Anfangsbedingung für die inhomogenen Differentialgleichungen, so dass die Lösungen jeweils nach Satz 29.10 eindeutig sind.  $\square$

**Beispiel 42.7.** Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten

$$v' = Mv$$

mit

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom der Matrix ist

$$\chi_M = \det \begin{pmatrix} t-5 & -9 \\ 1 & t+1 \end{pmatrix} = (t-5)(t+1) + 9 = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2.$$

Das bedeutet, dass 2 ein Eigenwert der Matrix mit algebraischer Vielfachheit 2 ist. Der Kern der Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ist von  $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  erzeugt, dies ist also ein einfacher Eigenvektor und die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes ist 1. Aus Lemma 42.1 ergibt sich direkt die Lösung

$$\varphi(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Um alle Lösungen zu finden, arbeiten wir mit Lemma 42.5 und mit Satz 42.6. Wir verwenden die Basis  $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$  (der zweite Vektor ist gewählt, um Jordanform zu erreichen, was aber für das Lösungsverfahren nicht wesentlich ist) und berechnen mit

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} N &= BMB^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für das transformierte System  $w' = Nw$  ergibt sich direkt die Lösung  $e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Um eine weitere Lösung zu erhalten muss man mit einer nicht-trivialen Lösung der zweiten Zeile  $w_2' = 2w_2$  starten, also mit  $w_2(t) = e^{2t}$ . Die erste Zeile führt dann auf

$$w_1'(t) = 2w_1(t) + w_2(t) = 2w_1(t) + e^{2t}.$$

Die zugehörige homogene Gleichung hat die Lösung  $e^{2t}$ , gemäß Satz 29.10 brauchen wir eine Stammfunktion von

$$e^{-2t}e^{2t} = 1.$$

Eine solche ist  $t$  und daher ist

$$w_2(t) = te^{2t}$$

die Lösung in der ersten Komponenten. Eine zweite Lösung ist also

$$\begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Um Lösungen für das ursprüngliche System zu erhalten, müssen wir mit  $B^{-1}$  zurücktransformieren. Aus der ersten Lösung erhält man die schon bekannte Lösung zum Eigenvektor und aus der soeben gefundenen Lösung erhält man

$$\psi(t) = B^{-1} \begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3te^{2t} - 5e^{2t} \\ -te^{2t} + 2e^{2t} \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung 42.8.** Es sei

$$v' = Mv$$

mit  $M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$  eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und es sei

$$z: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

eine komplexwertige Lösung dieser Differentialgleichung. Wir schreiben

$$z(t) = u(t) + iv(t),$$

wobei  $u, v$  differenzierbare Kurven im  $\mathbb{R}^n$  sind, und die Real- bzw. Imaginärteil der Funktion heißen. Es sei

$$\bar{z}(t) = u(t) - iv(t)$$

die konjugiert-komplexe Funktion zu  $z$ . Dann ist wegen

$$M\overline{z(t)} = \overline{Mz(t)} = \overline{z'(t)} = \bar{z}'(t)$$

auch  $\bar{z}$  eine Lösungsfunktion. Wegen

$$u(t) = \frac{z(t) + \bar{z}(t)}{2} \text{ und } v(t) = \frac{z(t) - \bar{z}(t)}{2i}$$

sind auch Real- und Imaginärteil von  $z$  Lösungsfunktionen (und zwar reellwertige).

**Satz 42.9.** *Es sei*

$$v' = Mv$$

mit  $M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$  eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten mit der Anfangsbedingung  $v(t_0) = u \in \mathbb{R}^n$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Dann gibt es genau eine auf  $\mathbb{R}$  definierte Lösung

$$v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

für dieses Anfangswertproblem.

*Beweis.* Aufgrund von Satz 42.6 gibt es eine eindeutige komplexwertige Lösung

$$v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

für dieses Differentialgleichungssystem. Da eine reellwertige Lösung insbesondere eine komplexwertige Lösung ist, liegt Eindeutigkeit vor. Der Realteil der komplexen Lösung, also

$$\text{Re}(v): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \longmapsto \text{Re}(v(t)),$$

ist ebenfalls eine Lösung dieses Systems. Wegen der Eindeutigkeit muss  $v = \text{Re}(v)$  sein.  $\square$

**Korollar 42.10.** *Es sei*

$$v' = Mv$$

mit  $M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$  ein homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten. Dann ist die Menge der Lösungen

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

*Beweis.* Dass der Lösungsraum ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist, kann man direkt nachrechnen. Aufgrund von Satz 42.6 bzw. Satz 42.9 gibt es zu jedem Vektor  $w \in \mathbb{K}^n$  genau eine Lösung

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

mit

$$\varphi(0) = w.$$

Die Zuordnung, die eine Lösung  $\varphi$  der Differentialgleichung auf den Ortspunkt  $\varphi(0)$  abbildet, ist linear, so dass eine lineare Isomorphie zwischen dem Lösungsraum und  $\mathbb{K}^n$  vorliegt.  $\square$

**Definition 42.11.** Es sei

$$v' = Mv$$

mit  $M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$  ein homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten. Dann heißt eine Basis des Lösungsraumes ein *Fundamentalsystem von Lösungen* dieses Systems.

**Korollar 42.12.** Es sei

$$v' = Mv$$

mit  $M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$  eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Die Matrix  $M$  sei diagonalisierbar mit den linear unabhängigen Eigenvektoren  $u_1, \dots, u_n$ . Dann ist der Lösungsraum der Differentialgleichung gleich

$$\{c_1 e^{\lambda_1 t} \cdot u_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \cdot u_n \mid c_i \in \mathbb{K}\},$$

wobei  $\lambda_i$  der Eigenwert zu  $u_i$  ist.

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Lemma 42.1 und aus Korollar 42.10.  $\square$

**Beispiel 42.13.** Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda & \gamma \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Für

$$v_2(t) = 0$$

(also die konstante Nullfunktion in der zweiten Komponente) ergibt sich aus der ersten Zeile (bis auf skalare Vielfache) sofort  $v_1 = e^{\lambda t}$ , was insgesamt der Lösung (der ersten Fundamentallösung)

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

zum Eigenvektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  gemäß Lemma 42.1 entspricht.

Sei nun  $v_2 \neq 0$ . Dann führt die zweite Zeile zu  $v_2 = e^{\mu t}$ , was wir Satz 42.6 entsprechend zu einer Gesamtlösung fortsetzen. Die erste Zeile lautet somit

$$v_1' = \lambda v_1 + \gamma e^{\mu t}.$$

Die Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist  $c \cdot e^{\lambda t}$ , so dass sich mit der Variation der Konstanten der Ansatz  $v_1(t) = c(t) \cdot e^{\lambda t}$  mit

$$c'(t) = \gamma \cdot e^{\mu t} \cdot e^{-\lambda t} = \gamma \cdot e^{(\mu-\lambda)t}$$

ergibt.

Bei  $\mu = \lambda$  ergibt sich  $c(t) = \gamma t$  und damit die zweite Fundamentallösung

$$v(t) = \begin{pmatrix} \gamma t e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Bei  $\gamma \neq 0$  gehört diese zweite Lösung nicht zu einem Eigenvektor.

Bei  $\mu \neq \lambda$  ergibt sich  $c(t) = \frac{\gamma}{\mu - \lambda} e^{(\mu - \lambda)t}$  und damit die zweite Fundamentallösung

$$v(t) = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\mu - \lambda} e^{\mu t} \\ e^{\mu t} \end{pmatrix} = e^{\mu t} \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\mu - \lambda} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies ist wieder eine Lösung, die zu einem Eigenvektor gehört.

**Beispiel 42.14.** Wir betrachten die Bewegung eines Punktes auf der Geraden, wobei die Lage des Punktes proportional zur auf ihn wirkenden Kraft (bzw. Beschleunigung) in Richtung des Nullpunkts sein soll. Wenn der Punkt sich in  $\mathbb{R}_+$  befindet und sich in die positive Richtung bewegt, so wirkt diese Kraft bremsend, wenn er sich in die negative Richtung bewegt, so wirkt die Kraft beschleunigend. Mit der Proportionalitätskonstante 1 gelangt man zur linearen Differentialgleichung (zweiter Ordnung)

$$y'' = -y,$$

die diesen Bewegungsvorgang beschreibt. Als Anfangsbedingung wählen wir  $y(0) = 0$  und  $y'(0) = v$ , zum Zeitpunkt 0 soll die Bewegung also durch den Nullpunkt gehen und dort die Geschwindigkeit  $v$  besitzen. Man kann sofort die Lösung

$$y(t) = v \cdot \sin t$$

angeben. Wir werden diese Lösung mit den Lösungsmethoden für lineare Differentialgleichungen herleiten. Die Differentialgleichung führt zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$x^2 + 1 = (x - i)(x + i),$$

und Eigenvektoren sind  $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$  (zum Eigenwert  $i$ ) und  $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$  (zum Eigenwert  $-i$ ). Die allgemeine komplexe Lösung ist also nach Korollar 42.12 gleich

$$\begin{pmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2 e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},$$

wobei letztlich nur der Realteil der ersten Zeile interessiert. Die Anfangsbedingung führt zu

$$c_1 + c_2 = 0 \text{ und } c_1 i - c_2 i = v.$$

Also ist  $c_2 = -c_1$  und  $c_1 = \frac{v}{2i}$ . Daher ist die Lösung

$$\frac{v}{2i}e^{it} - \frac{v}{2i}e^{-it} = v \cdot \sin t$$

nach Satz 15.10.

Mit den linearen Methoden kann man auch die folgende Aussage beweisen.

**Satz 42.15.** *Es sei*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

*eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten und das charakteristische Polynom zerfalle in Linearfaktoren,*

$$\begin{aligned} P &= X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \\ &= (X - \lambda_1)^{\nu_1} \dots (X - \lambda_k)^{\nu_k}, \end{aligned}$$

*wobei die  $\lambda_i$  verschieden seien. Dann bilden die Funktionen*

$$t^j e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 0, \dots, \nu_i - 1,$$

*ein Fundamentalsystem für diese Differentialgleichung.*

## 42. ARBEITSBLATT

### 42.1. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 42.1.** Löse das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 42.2.** Es sei  $M$  eine quadratische  $n \times n$ -Matrix über  $\mathbb{K}$ . Es sei  $\varphi_1$  eine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$v' = Mv + z_1(t)$$

und  $\varphi_2$  eine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$v' = Mv + z_2(t).$$

Zeige, dass  $\varphi_1 + \varphi_2$  eine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$v' = Mv + z_1(t) + z_2(t)$$

ist.

**Aufgabe 42.3.** Es sei

$$v' = Mv$$

ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten zu einer reellen  $n \times n$ -Matrix  $M$  und sei  $u \in \mathbb{C}^n$  ein Eigenvektor von  $M$  zum Eigenwert  $\lambda = a + bi \in \mathbb{C}$ . Zeige, dass

$$e^{at} \cos(bt) \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(u_1) \\ \vdots \\ \operatorname{Re}(u_n) \end{pmatrix}$$

und

$$e^{at} \sin(bt) \begin{pmatrix} \operatorname{Im}(u_1) \\ \vdots \\ \operatorname{Im}(u_n) \end{pmatrix}$$

Lösungen des Systems sind.

**Aufgabe 42.4.** Es sei

$$v' = Mv$$

ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten, sei  $L$  der Lösungsraum dieses Systems und sei  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Zeige, dass die Abbildung

$$L \longrightarrow \mathbb{K}^n, \varphi \longmapsto \varphi(t_0),$$

ein Vektorraum-Isomorphismus ist.

**Aufgabe 42.5.** Wie transformieren sich in Lemma 42.5 die Anfangsbedingungen?

**Aufgabe 42.6.\***

Löse das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 42.7.** Löse das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 42.8.** Bestimme den Lösungsraum zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 42.9.\***

a) Bestimme den Lösungsraum des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

b) Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 42.10.\***

a) Bestimme den Lösungsraum des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

b) Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung  $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 42.11.\***

Beschreibe für das zeitunabhängige Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

die allgemeine Lösungen mit

- (1) Exponentialfunktionen,
- (2) Hyperbelfunktionen.

**Aufgabe 42.12.** Finde für das zeitunabhängige Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Lösungen mit  $u(0) = a$  und  $v(0) = b$ , wobei  $a, b \in \mathbb{R}$  sind.

**Aufgabe 42.13.** Es sei

$$v' = Mv$$

ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten mit einer oberen Dreiecksmatrix  $M$ . Zeige, dass es ein Fundamentalsystem von Lösungsfunktionen  $v_1, \dots, v_n$  mit

$$v_i = \begin{pmatrix} v_{i1} \\ \vdots \\ v_{ii} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

gibt.

Die folgenden Aufgaben löse man mit Satz Anhang 4.1, man spricht vom *Ansatz vom Typ der rechten Seite*.

**Aufgabe 42.14.** Löse die Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + 5y = e^t.$$

**Aufgabe 42.15.\***

Löse die Differentialgleichung

$$y'' - y = e^t.$$

**Aufgabe 42.16.\***

Löse die Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 9y = (t^2 - 8)e^{5t}.$$

**Aufgabe 42.17.** Löse die Differentialgleichung

$$y'' + 4y' + 6y = (t^3 + 5t + 3)e^{2it}.$$

**Aufgabe 42.18.\***

Es sei  $v' = Mv$  ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten in  $d$  Variablen und sei ein Punkt  $P \in \mathbb{R}^d$  vorgegeben.

- (1) Erstelle eine rekursive Formel für die Punkte  $P_n$  im Polygonzugverfahren zum Startpunkt  $P_0 = P$  und zur Schrittweite  $s$  in dieser Situation.
- (2) Erstelle eine geschlossene Formel für  $P_n$  zur Schrittweite  $s$ .

(3) Erstelle eine Formel für  $P_n$  zur Schrittweite  $\frac{1}{n}$ .

In eine Potenzreihe kann man nicht Zahlen einsetzen, sondern auch quadratische Matrizen, wobei die Potenzen als Matrixpotenzen zu interpretieren sind, und sich fragen, ob die entstehenden Folgen im Raum der Matrizen konvergieren.

**Aufgabe 42.19.** Es sei  $M$  eine reelle (oder komplexe)  $d \times d$ -Matrix. Zeige, dass

$$\begin{aligned} \exp M &= E_d + M + \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}M^k \end{aligned}$$

im Raum der Matrizen konvergiert.

**Aufgabe 42.20.** Es sei  $v' = Mv$  ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten. Zeige, dass die Lösung des Anfangswertproblems mit der Anfangsbedingung  $v(0) = w \in \mathbb{R}^d$  durch

$$v(t) = (\exp(tM))w$$

gegeben ist.

Verwende, dass die Ableitung der Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \text{Mat}_d(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{d^2}, \quad t \longmapsto \exp(tM),$$

gleich  $M \cdot \exp(tM)$  ist.

**Aufgabe 42.21.** Begründe Lemma 42.1 mit Aufgabe 42.20.

**Aufgabe 42.22.** Es sei  $v' = Mv$  ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten in  $d$  Variablen und sei  $s \in \mathbb{R}$ . Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d,$$

die einem Punkt  $w \in \mathbb{R}^d$  den Ortspunkt zum Zeitpunkt  $s$  der Lösung des Anfangswertproblems  $v(0) = w$  zuordnet, eine lineare Abbildung ist und durch die Matrix  $\exp(sM)$  beschrieben wird.

**Aufgabe 42.23.** Zeige, dass das charakteristische Polynom der sogenannten *Begleitmatrix*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

gleich

$$\chi_M = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$$

ist.

**Aufgabe 42.24.** Es sei  $M$  die Menge aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  und  $D$  die Ableitung, aufgefasst als Operator<sup>9</sup>

$$D: M \longrightarrow M, f \longmapsto D(f) = f'.$$

Zu einem Polynom  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $P = a_nX^n + \dots + a_2X^2 + a_1X + a_0$ , betrachten wir den Operator

$$P(D): M \longrightarrow M, f \longmapsto (P(D))(f) = a_nD^n(f) + \dots + a_2D^2(f) + a_1D(f) + a_0f.$$

Berechne  $(P(D))(f)$  für  $P = 2X^3 - 4X^2 + 7X - 3$  und  $f = x^4, e^x, e^{2x}, \sin x$ . Zeige, dass  $P(D)$  eine lineare Abbildung auf  $M$  ist.

**Aufgabe 42.25.** Es sei  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}_+$ . Zeige, dass der Differentialoperator  $(D - \lambda)^n$  die Funktionen  $x^j e^{\lambda x}$  mit  $0 \leq j < n$  auf die Nullfunktion abbildet.

## 42.2. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 42.26.** (6 Punkte)

Löse das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \\ v_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 42.27.** (5 Punkte)

Bestimme den Lösungsraum zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}.$$

<sup>9</sup>Eine Abbildung, die Funktionen in Funktionen überführt, nennt man häufig Operator.

**Aufgabe 42.28.** (6 Punkte)

Es sei  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Bestimme den Lösungsraum zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 42.29.** (5 Punkte)

Bestimme die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 + e^t \\ t \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 42.30.** (4 Punkte)

Löse die Differentialgleichung

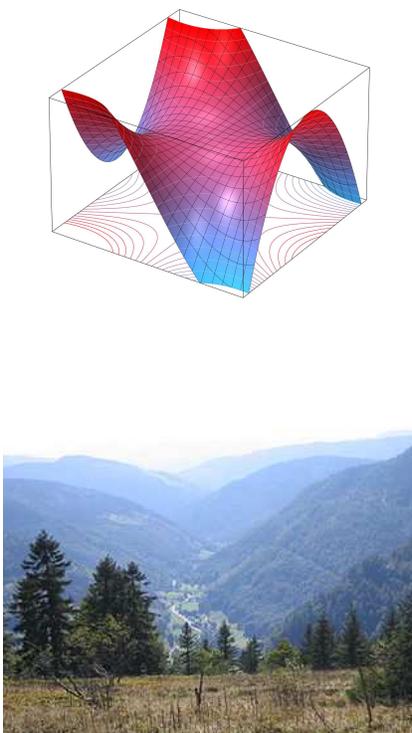
$$y'' + y' - 8y = (t^2 - 4t + 7)e^{3t}.$$

## 43. VORLESUNG - RICHTUNGSABLEITUNG

Wir beschäftigen uns nun mit der Differentialrechnung für Abbildungen mit höherdimensionalem Definitionsbereich. Dazu seien reelle(oder komplexen) endlichdimensionale Vektorräume  $V$  und  $W$  gegeben. Ferner sei  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge und

$$f: G \longrightarrow W$$

eine Abbildung. Diese Abbildung wollen wir „differenzieren“. Anders als in den bisher behandelten Situationen gibt es bei einem höherdimensionalen Definitionsbereich mehrere nicht äquivalente Konzepte von Differenzierbarkeit. Wir werden nacheinander die *Richtungsableitung*, *partielle Ableitungen* und das *totale Differential* sowie ihre Beziehungen untereinander diskutieren. Wir werden durchgehend voraussetzen, dass die Vektorräume endlichdimensional sind und mit einem Skalarprodukt und damit mit einer euklidischen Metrik versehen sind.



Es ist erstmal keine große Einschränkung, wenn man den Zielraum als  $W = \mathbb{R}$  ansetzt. Als Definitionsmenge kann man sich zunächst auf  $G = V = \mathbb{R}^2$  beschränken, und sich vorstellen, dass die Abbildung jedem Grundpunkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  einen Höhepunkt zuordnet, so dass die Abbildung insgesamt ein Gebirge über einer Grundfläche beschreibt.

### 43.1. Richtungsableitung.

Wir stellen uns vor, wir sind an einem Ort im Gebirge und entschließen uns, in eine bestimmte Richtung, beispielsweise nach Nordwest zu gehen, egal was kommen mag. Damit machen wir sämtliche Steigungen und Abhänge mit, die das Gebirge uns in dieser vorgegebenen Richtung bietet. Dabei lernen wir nur den Höhenverlauf des Gebirges entlang dieses linearen Ausschnitts (Querschnitts) kennen. Durch die gewählte Richtung bewegen wir uns auf dem Graphen zu einer Funktion in einer einzigen Variablen, nämlich einer Variablen der Grundgeraden. Dies ist die Grundidee der *Richtungsableitung*.

**Definition 43.1.** Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale normierte Vektorräume,  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge, und  $f: G \rightarrow W$  eine Abbildung. Weiter sei  $P \in G$  ein Punkt und  $v \in V$  ein fixierter Vektor. Dann heißt  $f$  *differenzierbar in  $P$  in Richtung  $v$* , falls der Grenzwert

$$\lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \frac{f(P + sv) - f(P)}{s}$$

existiert. In diesem Fall heißt dieser Grenzwert *die Ableitung von  $f$  in  $P$  in Richtung  $v$* . Er wird mit

$$(D_v f)(P)$$

bezeichnet.

Den Ausdruck

$$\frac{f(P + sv) - f(P)}{s}$$

nennt man wieder den *Differenzenquotienten* im Punkt  $P$  in Richtung  $v$  von 0 bis  $s$ . Er misst die Durchschnittsrichtung (oder Durchschnittssteigung bei  $W = \mathbb{R}$ ) von  $f$  in Richtung  $v$  für das Zeitintervall  $[0, s]$ . Die Richtungsableitung in einem Punkt und in eine Richtung ist selbst ein Vektor in  $W$ . Bei  $W = \mathbb{K}$  ist die Richtungsableitung eine reelle oder komplexe Zahl.

**Beispiel 43.2.** Wir betrachten die Abbildung

$$f: \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto x^2 y,$$

in einem Punkt  $P = (a_1, a_2)$  in Richtung  $v = (v_1, v_2)$ . Der Differenzenquotient ist

$$\begin{aligned} & \frac{f(P + sv) - f(P)}{s} \\ = & \frac{f((a_1 + sv_1, a_2 + sv_2)) - f((a_1, a_2))}{s} \\ = & \frac{(a_1 + sv_1)^2 (a_2 + sv_2) - a_1^2 a_2}{s} \\ = & \frac{a_1^2 a_2 + 2sa_1 a_2 v_1 + s^2 a_2 v_1^2 + sa_1^2 v_2 + 2s^2 a_1 v_1 v_2 + s^3 v_1^2 v_2 - a_1^2 a_2}{s} \\ = & 2a_1 a_2 v_1 + a_1^2 v_2 + s(a_2 v_1^2 + 2a_1 v_1 v_2) + s^2 (v_1^2 v_2). \end{aligned}$$

Für  $s \rightarrow 0$  gehen die beiden hinteren Summanden gegen 0, so dass sich insgesamt

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(P + sv) - f(P)}{s} = 2a_1 a_2 v_1 + a_1^2 v_2$$

ergibt.

Im Punkt  $P = (2, 5)$  ergibt sich in Richtung  $v = (1, -3)$  beispielsweise die Richtungsableitung

$$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1 + 2^2 \cdot (-3) = 8.$$

**Beispiel 43.3.** Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume und sei

$$L: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann existiert die Richtungsableitung in jedem Punkt  $P \in V$  und in jede Richtung  $v \in V$ , und zwar ist

$$(D_v L)(P) = L(v),$$

insbesondere ist also die Richtungsableitung unabhängig vom Punkt. Dies folgt direkt durch Betrachten des Differenzenquotienten; es ist nämlich

$$\frac{L(P + sv) - L(P)}{s} = \frac{L(P) + sL(v) - L(P)}{s} = \frac{sL(v)}{s} = L(v).$$

Daher ist auch der Limes für  $s \rightarrow 0$  gleich  $L(v)$ .

Die Existenz von  $(D_v f)(P)$  hängt nur von der Abbildung  $U(0, \delta) \rightarrow W$ ,  $s \mapsto f(P + sv)$ , ab (wobei das Intervall  $U(0, \delta)$  (im reellen Fall) bzw. der offene Ball (im komplexen Fall) so gewählt ist, dass  $s \in U(0, \delta)$  auch  $P + sv \in G$  impliziert. D.h. dass  $U(P, \delta) \subseteq G$  gilt). Daher kann man die Richtungsableitung im Wesentlichen auf die Ableitung von Kurven zurückführen.

**Lemma 43.4.** *Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume,  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge, und  $f: G \rightarrow W$  eine Abbildung. Es sei  $P \in G$  ein Punkt und  $v \in V$  ein fixierter Vektor. Dann ist  $f$  in  $P$  in Richtung  $v$  genau dann differenzierbar, wenn die (auf einem Intervall bzw. einer offenen Ballumgebung um  $0 \in \mathbb{K}$  definierte) Kurve*

$$g: I \longrightarrow W, t \longmapsto g(t) = f(P + tv),$$

in  $0$  differenzierbar ist. In diesem Fall ist

$$(D_v f)(P) = g'(0).$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 43.7. □

**Beispiel 43.5.** Wir bestimmen die Richtungsableitung zur Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - xy^2 + \sin(xy),$$

im Punkt  $P = (3, 4)$  in Richtung  $v = (2, -5)$ . Dazu müssen wir die Hilfsfunktion

$$h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto h(t) = f(P + tv),$$

im Nullpunkt ableiten. Es ist

$$\begin{aligned} h(t) &= f(P + tv) \\ &= f(3 + 2t, 4 - 5t) \\ &= (3 + 2t)^2 - (3 + 2t)(4 - 5t)^2 + \sin((3 + 2t)(4 - 5t)) \\ &= 9 + 12t + 4t^2 - 48 + 88t + 5t^2 - 50t^3 + \sin(12 - 7t - 10t^2) \\ &= -39 + 100t + 9t^2 - 50t^3 + \sin(12 - 7t - 10t^2). \end{aligned}$$

Die Ableitung von dieser Funktion im Nullpunkt ist

$$h'(0) = 100 - 7 \cos 12,$$

also ist

$$(D_{(2, -5)} f)(3, 4) = 100 - 7 \cos 12.$$

**Lemma 43.6.** *Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume, sei  $G \subseteq V$  offen,  $P \in G$  ein Punkt,  $v \in V$  ein Vektor und seien*

$$f, g: G \longrightarrow W$$

*Abbildungen, die im Punkt  $P$  in Richtung  $v$  differenzierbar seien. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Die Summe  $f + g$  ist ebenfalls differenzierbar in Richtung  $v$  mit*

$$(D_v(f + g))(P) = (D_v f)(P) + (D_v g)(P).$$

- (2) *Das Produkt  $af$  mit  $a \in \mathbb{K}$  ist ebenfalls differenzierbar in Richtung  $v$  mit*

$$(D_v(af))(P) = a(D_v f)(P).$$

- (3) *Die Funktion  $f$  ist auch in Richtung  $cv$  mit  $c \in \mathbb{K}$  differenzierbar und es gilt*

$$(D_{cv} f)(P) = c(D_v f)(P).$$

*Beweis.* Die Eigenschaften (1) und (2) ergeben sich aus den entsprechenden Eigenschaften für Limiten von Abbildungen, siehe Lemma 35.7. Für die Eigenschaft (3) siehe Aufgabe 43.21.  $\square$

Im Rahmen der Theorie des totalen Differentials wird die Frage beantwortet, wie sich die Richtungsableitungen zu verschiedenen Richtungen zueinander verhalten. Ohne weitere Voraussetzung gibt es keine Beziehung zwischen  $(D_v f)(P)$ ,  $(D_w f)(P)$  und  $(D_{v+w} f)(P)$ .

**Beispiel 43.7.** Es sei  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  der Einheitskreis und

$$\psi: S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion mit der Eigenschaft

$$\psi(-P) = -\psi(P).$$

Mit dieser Funktion definieren wir

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$\varphi(x, y) := \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \psi\left(\frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{für } (x, y) \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Graph dieser Funktion besteht aus einem Büschel von Geraden durch den Nullpunkt. Insbesondere existieren im Nullpunkt sämtliche Richtungsableitungen. Da man aber  $\psi$  willkürlich vorgeben kann, haben die Richtungsableitungen nichts miteinander zu tun.

Wenn im Werteraum eine Basis gegeben ist, so kann man die Richtungsableitung komponentenweise bestimmen.

**Lemma 43.8.** *Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume, sei  $G \subseteq V$  offen,  $P \in G$  ein Punkt und sei  $v \in V$  ein Vektor. Es sei*

$$\varphi: G \longrightarrow W$$

*eine Abbildung. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Es sei  $W$  der Produktraum*

$$W = W_1 \times \cdots \times W_k$$

*aus endlichdimensionalen Vektorräumen  $W_1, \dots, W_k$ . Dann ist  $\varphi$  genau dann in  $P$  differenzierbar in Richtung  $v$ , wenn sämtliche Komponentenabbildungen*

$$\varphi_i: G \longrightarrow W_i$$

*in  $P$  in Richtung  $v$  differenzierbar sind. In diesem Fall gilt*

$$(D_v\varphi)(P) = ((D_v\varphi_1)(P), \dots, (D_v\varphi_k)(P))$$

- (2) *Es sei  $w_1, \dots, w_n$  eine Basis von  $W$  mit den Koordinaten*

$$y_j: W \longrightarrow \mathbb{K}.$$

*Dann ist  $\varphi$  in  $P$  in Richtung  $v$  genau dann differenzierbar, wenn sämtliche Komponentenfunktionen*

$$f_j = y_j \circ \varphi: G \longrightarrow \mathbb{K}$$

*in  $P$  in Richtung  $v$  differenzierbar sind. In diesem Fall ist*

$$(D_v\varphi)(P) = ((D_v f_1)(P), \dots, (D_v f_n)(P)) = w_1(D_v f_1)(P) + \cdots + w_n(D_v f_n)(P).$$

*Beweis.* Die erste Aussage folgt aus der zweiten, wenn man für die einzelnen Vektorräume  $W_j$  Basen einführt (umgekehrt ist auch der zweite Teil ein Spezialfall des ersten). Die zweite Aussage folgt aus Aufgabe 35.8 oder aus Lemma 37.4 in Verbindung mit Lemma 43.4.  $\square$

Aufgrund von diesem Lemma muss man vor allem die Richtungsableitung für den Fall verstehen, wo der Wertebereich gleich  $\mathbb{K}$  ist.

Das folgende einfache Beispiel zeigt, dass durchaus alle Richtungsableitungen (und zwar in jedem Punkt) existieren können, die Abbildung selbst aber noch nicht einmal stetig sein muss.

**Beispiel 43.9.** Wir betrachten die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Für einen Vektor  $v = (a, b)$  und einen reellen Parameter  $s$  erhalten wir auf der Geraden  $\mathbb{R}v$  die Funktion

$$f_v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, s \longmapsto f(sa, sb) = \frac{sas^3b^3}{s^2a^2 + s^6b^6} = \frac{s^2ab^3}{a^2 + s^4b^6}.$$

Für  $a \neq 0$  ist der Nenner stets positiv und die Funktion  $f_v$  ist stetig mit dem Wert 0 bei  $s = 0$ , und als rationale Funktion in  $s$  differenzierbar. Für  $a = 0$  ist die Funktion  $f_v$  konstant = 0 und damit ebenfalls differenzierbar. Also existieren in 0 alle Richtungsableitungen zu  $f$ . Die Funktion  $f$  ist allerdings nicht stetig: Für die Folge  $(1/n^3, 1/n)$  (die gegen  $0 = (0, 0)$  konvergiert) gilt

$$f\left(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right) = \frac{(1/n^3)(1/n^3)}{(1/n^6) + (1/n^6)} = \frac{1}{2},$$

aber  $f(0, 0) = 0$ .

Im Allgemeinen möchte man nicht nur in einem einzigen Punkt  $P \in V$  ableiten können, sondern in jedem Punkt, was durch die folgende naheliegende Definition präzisiert wird.

**Definition 43.10.** Seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume sei  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge, sei  $f: G \rightarrow W$  eine Abbildung und  $v \in V$  ein fixierter Vektor. Dann heißt  $f$  *differenzierbar in Richtung  $v$* , falls  $f$  in jedem Punkt  $P \in G$  in Richtung  $v$  differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Abbildung

$$D_v f: G \longrightarrow W, P \longmapsto (D_v f)(P),$$

die *Richtungsableitung* von  $f$  in Richtung  $v$ .

Die Richtungsableitung zu einem fixierten Vektor ist also vom selben Typ wie die Ausgangsabbildung.

**Beispiel 43.11.** Wir betrachten die polynomiale Funktion

$$f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1 \cdots x_n.$$

Die Richtungsableitung in Richtung  $v = (v_1, \dots, v_n)$  in einem beliebigen Punkt

$$P = (x_1, \dots, x_n)$$

ergibt sich durch Betrachten des Differenzenquotienten, also

$$\begin{aligned} & \frac{(x_1 + sv_1) \cdot (x_2 + sv_2) \cdots (x_n + sv_n) - x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}{s} \\ &= \frac{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n + s \left( \sum_{i=1}^n v_i \frac{x_1 \cdots x_n}{x_i} \right) + s^2 g(s, x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n) - x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}{s} \\ &= \sum_{i=1}^n v_i \frac{x_1 \cdots x_n}{x_i} + s \cdot g(s, x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Dabei ist  $g(s, x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n)$  eine polynomiale Funktion in  $s$  (die  $x_1, \dots, x_n$  und die  $v_1, \dots, v_n$  sind fixierte Zahlen). Der Limes von  $s \cdot g(s, x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n)$  geht für  $s \rightarrow 0$  gegen 0. Daher ist

$$(D_v f)(P) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{x_1 \cdots x_n}{x_i}.$$

In den Aufgaben werden wir sehen, dass die Richtungsableitung zu einer polynomialen Funktion in jede Richtung existiert und selbst wieder polynomial ist. Dies wird sich auch einfach im Rahmen des totalen Differentials ergeben.

### 13. ARBEITSBLATT

#### 43.1. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 43.1.** Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy,$$

- (1) im Punkt  $(0, 0)$  in Richtung  $(1, 0)$ ,
- (2) im Punkt  $(0, 0)$  in Richtung  $(2, 5)$ ,
- (3) im Punkt  $(1, 0)$  in Richtung  $(1, 0)$ ,
- (4) im Punkt  $(1, 0)$  in Richtung  $(0, 1)$ ,
- (5) im Punkt  $(2, 3)$  in Richtung  $(-1, 0)$ ,
- (6) im Punkt  $(3, 7)$  in Richtung  $(5, -4)$ .

**Aufgabe 43.2.** Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{x}{y},$$

- (1) im Punkt  $(0, 1)$  in Richtung  $(1, 0)$ ,
- (2) im Punkt  $(0, 1)$  in Richtung  $(0, 1)$ ,
- (3) im Punkt  $(1, 3)$  in Richtung  $(2, 4)$ ,
- (4) im Punkt  $(-1, 6)$  in Richtung  $(-3, -1)$ ,
- (5) im Punkt  $(1, \frac{1}{100})$  in Richtung  $(0, -1)$ .

**Aufgabe 43.3.\***

Bestimme zur Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto t^2,$$

die Richtungsableitung in Richtung 3 für jeden Punkt.

**Aufgabe 43.4.\***

Bestimme die Richtungsableitung von

$$f(x, y) = x^3 + x^2y - y^5$$

im Punkt  $(4, -1)$  in Richtung  $(-3, 2)$ .

**Aufgabe 43.5.** Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass  $f$  in einem Punkt  $P \in \mathbb{R}$  genau dann differenzierbar ist, wenn  $f$  in  $P$  in Richtung 1 differenzierbar ist, und dass dann die Gleichheit

$$(D_1 f)(P) = f'(P)$$

gilt.

**Aufgabe 43.6.** Bestimme die Richtungsableitung einer Abbildung in Richtung 0.

**Aufgabe 43.7.** Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume,  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge, und  $f: G \rightarrow W$  eine Abbildung. Es sei  $P \in G$  ein Punkt und  $v \in V$  ein fixierter Vektor. Zeige, dass  $f$  in  $P$  in Richtung  $v$  genau dann differenzierbar ist, wenn die (auf einem Intervall bzw. einer offenen Ballumgebung um  $0 \in \mathbb{K}$  definierte) Kurve

$$g: I \longrightarrow W, t \longmapsto g(t) = f(P + tv),$$

differenzierbar ist, und dass in diesem Fall die Gleichheit

$$(D_v f)(P) = g'(0)$$

gilt.

Wie muss dabei das Intervall bzw. die offene Umgebung gewählt werden?

**Aufgabe 43.8.\***

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum,  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge und  $v \in V$  ein Vektor. Es seien

$$f, g: G \longrightarrow \mathbb{K}$$

Funktionen, die in Richtung  $v$  differenzierbar seien. Zeige, dass dann auch  $fg$  in Richtung  $v$  differenzierbar ist mit

$$D_v(fg) = fD_v g + gD_v f.$$

**Aufgabe 43.9.\***

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum,  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge und  $v \in V$  ein Vektor. Es seien

$$f, g: G \longrightarrow \mathbb{C}$$

Funktionen, die in Richtung  $v$  differenzierbar seien. Zeige, dass dann auch  $fg$  in Richtung  $v$  differenzierbar ist mit

$$D_v(fg) = fD_v g + gD_v f.$$

**Aufgabe 43.10.** Bestimme, für welche Richtungen die Richtungsableitung im Nullpunkt zur Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \max(x, y),$$

existieren.

**Aufgabe 43.11.** Bestimme, für welche Punkte  $P \in \mathbb{R}^n$  und welche Richtungen  $v \in \mathbb{R}^n$  die Richtungsableitung der euklidischen Norm

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

existiert.

**Aufgabe 43.12.** Bestimme, für welche Punkte  $P \in \mathbb{R}^2$  und welche Richtungen  $v \in \mathbb{R}^2$  die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto |x + y|,$$

existiert.

**Aufgabe 43.13.** Untersuche die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - y^2,$$

im Nullpunkt  $(0, 0)$  auf Richtungsableitungen. Man entscheide für jede Gerade  $G$  durch den Nullpunkt, ob die Einschränkung von  $f$  auf  $G$  im Nullpunkt ein Extremum besitzt.

**Aufgabe 43.14.** Es seien  $V$  und  $W$  euklidische Vektorräume und

$$f, g: G \longrightarrow W$$

seien Abbildungen auf einer offenen Menge  $G \subseteq V$ , die in Richtung  $v \in V$  differenzierbar seien. Zeige, dass dann auch die Abbildung

$$h: G \longrightarrow \mathbb{R}, P \longmapsto \langle f(P), g(P) \rangle,$$

in Richtung  $v \in V$  differenzierbar ist, und dass

$$(D_v h)(P) = \langle f(P), (D_v g)(P) \rangle + \langle (D_v f)(P), g(P) \rangle$$

gilt.

**Aufgabe 43.15.** Es sei  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  der Einheitskreis und

$$g: S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion mit  $g(-Q) = -g(Q)$ , gegenüberliegende Punkte auf dem Kreis haben also zueinander negierte Werte.

- (1) Zeige, dass durch  $f(0) = 0$  und

$$f(P) := \|P\|g\left(\frac{P}{\|P\|}\right)$$

für  $P \neq 0$  eine Funktion auf  $\mathbb{R}^2$  definiert ist.

- (2) Zeige, dass  $f$  genau dann stetig ist, wenn  $g$  stetig ist.  
 (3) Man gebe ein Beispiel für ein nichtstetiges  $g$  derart, dass  $f$  im Nullpunkt stetig ist.  
 (4) Zeige, dass die Einschränkung von  $f$  auf jede Gerade durch den Nullpunkt linear ist.  
 (5) Zeige, dass  $f$  im Nullpunkt in jede Richtung differenzierbar ist.  
 (6) Es sei

$$g(Q) = \begin{cases} 1, & \text{falls die } x\text{-Koordinate von } Q \text{ rational ist} \\ 0, & \text{falls die } x\text{-Koordinate von } Q \text{ irrational ist.} \end{cases}$$

Zeige, dass  $f$  in jedem Punkt  $P \neq 0$  nur in eine Richtung (bis auf Skalierung) eine Richtungsableitung besitzt.

**Aufgabe 43.16.** Es seien  $V$  und  $W$  reelle endlichdimensionale Vektorräume,  $G \subseteq V$

offen und  $v \in V$  ein Vektor. Es bezeichne  $C_v^1(G, W)$  die Menge aller in Richtung  $v$  differenzierbaren Abbildungen von  $G$  nach  $W$ . Zeige, dass die Abbildung

$$C_v^1(G, W) \longrightarrow \text{Abb}(G, W), \varphi \longmapsto D_v\varphi,$$

linear ist.

### 43.2. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 43.17.** (4 Punkte)

Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 \sin y - e^x y - x,$$

- (1) im Punkt  $(0, 0)$  in Richtung  $(1, 0)$ ,  
 (2) im Punkt  $(0, 0)$  in Richtung  $(0, 1)$ ,  
 (3) im Punkt  $(0, 0)$  in Richtung  $(2, 0)$ ,  
 (4) im Punkt  $(0, 0)$  in Richtung  $(1, -3)$ ,  
 (5) im Punkt  $(1, 1)$  in Richtung  $(1, 1)$ ,  
 (6) im Punkt  $(1, 0)$  in Richtung  $(-1, \frac{1}{2})$ ,  
 (7) im Punkt  $(5, 7)$  in Richtung  $(1, 0)$ ,  
 (8) im Punkt  $(1, 0)$  in Richtung  $(5, 7)$ .

**Aufgabe 43.18.** (2 Punkte)

Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x^2 + y^3 = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{x^2 - xy + y^4}{x^2 + y^3},$$

- (1) im Punkt  $(1, 1)$  in Richtung  $(1, 0)$ ,
- (2) im Punkt  $(0, 1)$  in Richtung  $(0, 1)$ ,
- (3) im Punkt  $(1, 0)$  in Richtung  $(0, 1)$ ,
- (4) im Punkt  $(3, -2)$  in Richtung  $(2, -5)$ .

**Aufgabe 43.19.** (5 Punkte)

Bestimme die Richtungsableitungen der Funktion  $(r_i \in \mathbb{N})$

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n},$$

in einem Punkt

$$a = (a_1, \dots, a_n)$$

in Richtung

$$v = (v_1, \dots, v_n).$$

**Aufgabe 43.20.** (4 Punkte)

Zeige, unter Verwendung von Aufgabe 43.19, dass zu einer polynomialen Funktion

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \varphi(x_1, \dots, x_n),$$

zu einer fixierten Richtung  $v \in \mathbb{R}^n$  die Richtungsableitung  $D_v \varphi$  existiert und selbst polynomial ist.

**Aufgabe 43.21.** (3 Punkte)

Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume, sei  $G \subseteq V$  offen,  $P \in G$  ein Punkt,  $v \in V$  ein Vektor und sei

$$f: G \longrightarrow W$$

eine Abbildung, die im Punkt  $P$  in Richtung  $v$  differenzierbar sei. Zeige, dass  $f$  auch in Richtung  $cv$  mit  $c \in \mathbb{K}$  differenzierbar ist und die Beziehung

$$(D_{cv}f)(P) = c(D_vf)(P)$$

gilt.

## 44. VORLESUNG - PARTIELLE ABLEITUNGEN

## 44.1. Partielle Ableitungen.

Es sei  $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$  eine durch

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$$

gegebene Abbildung. Betrachtet man für einen fixierten Index  $i$  die übrigen Variablen  $x_j$ ,  $j \neq i$ , als Konstanten, so erhält man eine Abbildung  $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ , die nur von  $x_i$  abhängt (entsprechend betrachtet man die übrigen Variablen als Parameter). Falls diese Funktion, als Funktion in der einen Variablen  $x_i$ , differenzierbar ist, so sagen wir, dass  $f$  *partiell differenzierbar* bezüglich  $x_i$  ist und bezeichnen diese Ableitung mit  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ . Der Vorteil der partiellen Ableitungen liegt darin, dass man diese einfach berechnen kann. Jedoch hängen sie von der Wahl einer Basis ab. Die partiellen Ableitungen sind selbst Abbildungen von  $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ .

**Definition 44.1.** Es sei  $G \subseteq \mathbb{K}^n$  offen und sei eine Abbildung  $f: G \rightarrow \mathbb{K}^m$  durch

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

gegeben. Es sei  $P = (a_1, \dots, a_n) \in G$  ein Punkt. Für fixierte Indizes  $i$  und  $j$  betrachten wir die Abbildung

$$I \longrightarrow \mathbb{K}, x_i \mapsto f_j(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

(wobei  $I$  ein reelles Intervall (bzw. eine offene Kreisscheibe) mit  $a_i \in I$  derart sei, dass  $\{(a_1, \dots, a_{i-1})\} \times I \times \{(a_{i+1}, \dots, a_n)\} \subseteq G$  gilt) als Funktion in einer Variablen, wobei die übrigen Variablen  $a_k$ ,  $k \neq i$ , fixiert seien. Ist diese Funktion in  $a_i$  differenzierbar, so heißt  $f_j$  *partiell differenzierbar* in  $P$  bezüglich der Koordinate  $x_i$ . Man bezeichnet diese Ableitung (welche ein Element in  $\mathbb{K}$  ist) mit

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P)$$

und nennt sie die  $i$ -te *partielle Ableitung* von  $f_j$  in  $P$ .

Die Abbildung  $f$  heißt *partiell differenzierbar* im Punkt  $P$ , falls für alle  $i$  und  $j$  die partiellen Ableitungen in  $P$  existieren. Die  $i$ -te partielle Ableitung von  $f$  in  $P$  wird mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) := \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(P), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(P) \right)$$

bezeichnet.

Diese Definition führt insbesondere die  $i$ -te partielle Ableitung einer Funktion  $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$  auf den Ableitungsbegriff in einer Variablen zurück, indem die anderen Variablen „festgehalten“ und als Parameter betrachtet werden.

Daher bedeutet die Existenz der  $i$ -ten partiellen Ableitung von  $f$  im Punkt  $(a_1, \dots, a_n)$  einfach die Existenz des Limes

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + s, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{s}.$$

**Beispiel 44.2.** Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{xy^3}{x^2 + y^2}.$$

Um die partielle Ableitung nach  $x$  (in jedem Punkt) zu berechnen, betrachtet man  $y$  als eine Konstante, so dass eine nur von  $x$  abhängige Funktion dasteht. Diese wird gemäß den Ableitungsregeln für Funktionen in einer Variablen abgeleitet, so dass sich

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^3(x^2 + y^2) - xy^3(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2y^3 + y^5}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$$

ergibt. Für die partielle Ableitung nach  $y$  betrachtet man  $x$  als eine Konstante und erhält

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3xy^2(x^2 + y^2) - xy^3(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{3x^3y^2 + xy^4}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}.$$

Die partiellen Ableitungen sind im Wesentlichen die Richtungsableitungen in Richtung der Standardvektoren. Insbesondere ergeben partielle Ableitungen nur dann Sinn, wenn eine Basis im Vektorraum, der den Definitionsbereich einer Abbildung darstellt, gewählt worden ist, bzw. wenn eben von vornherein ein  $\mathbb{K}^n$  betrachtet wird.

**Lemma 44.3.** *Es sei  $G \subseteq \mathbb{K}^n$  offen,  $P \in G$  ein Punkt und sei*

$$f: G \longrightarrow \mathbb{K}^m, \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),$$

eine Abbildung. Dann ist  $f$  in  $P$  genau dann partiell differenzierbar, wenn die Richtungsableitungen von sämtlichen Komponentenfunktionen  $f_j$  in  $P$  in Richtung eines jeden Standardvektors existieren. In diesem Fall stimmt die  $i$ -te partielle Ableitung  $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P)$  von  $f$  in  $P$  mit der Richtungsableitung  $(D_{e_i} f_j)(P)$  von  $f_j$  in  $P$  in Richtung des  $i$ -ten Standardvektors  $e_i$  überein, und  $f$  ist in  $P$  genau dann partiell differenzierbar, wenn die Richtungsableitungen in  $P$  in Richtung eines jeden Standardvektors existieren.

*Beweis.* Es sei  $P = (a_1, \dots, a_n)$ . Wir können uns wegen Lemma 43.8 auf eine einzige Komponentenfunktion  $f_j$  beschränken. Da partielle Ableitungen die Ableitungen von Funktionen in einer Variablen sind, ergibt sich

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P) \\ = \lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \frac{f_j(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + s, a_{i+1}, \dots, a_n) - f_j(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{s}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \frac{f_j(P + se_i) - f_j(P)}{s} \\
&= (D_{e_i} f_j)(P).
\end{aligned}$$

□

**Definition 44.4.** Es sei  $G \subseteq \mathbb{K}^n$  offen und sei eine Abbildung

$$\begin{aligned}
f : G &\longrightarrow \mathbb{K}^m, \\
(x_1, \dots, x_n) &\longmapsto f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),
\end{aligned}$$

gegeben. Dann heißt  $f$  *partiell differenzierbar*, wenn  $f$  in jedem Punkt  $P \in G$  partiell differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Abbildung

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : G \longrightarrow \mathbb{K}^m, P \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(P), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(P) \right),$$

die  $i$ -te *partielle Ableitung* von  $f$ .

**Definition 44.5.** Es sei  $G \subseteq \mathbb{K}^n$  offen und sei eine Abbildung

$$\begin{aligned}
f : G &\longmapsto \mathbb{K}^m, \\
(x_1, \dots, x_n) &\longmapsto f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),
\end{aligned}$$

gegeben, die in  $P \in G$  partiell differenzierbar sei. Dann heißt die Matrix

$$\text{Jak}(f)_P := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix}$$

die *Jacobi-Matrix* zu  $f$  im Punkt  $P$ .

**Beispiel 44.6.** Wir betrachten die Abbildung  $f: \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^2$ , die durch

$$(x, y, z) \longmapsto (xy^2 - z^3, \sin(xy) + x^2 \cdot \exp z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z))$$

gegeben sei. Die partiellen Ableitungen von  $f_1$  sind

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2xy, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = -3z^2,$$

und die partiellen Ableitungen von  $f_2$  sind

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = y \cos(xy) + 2x \cdot \exp z, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = x \cdot \cos(xy), \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = x^2 \cdot \exp(z).$$

Damit erhalten wir für einen beliebigen Punkt  $P = (x, y, z)$  die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} y^2 & 2xy & -3z^2 \\ y \cos(xy) + 2x \exp(z) & x \cos(xy) & x^2 \exp(z) \end{pmatrix}.$$

Für einen speziellen Punkt, z.B.  $P = (2, 1, 3)$ , setzt man einfach ein:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -27 \\ \cos(2) + 4 \exp(3) & 2 \cos(2) & 4 \exp(3) \end{pmatrix}.$$

## 44.2. Höhere Richtungsableitungen.

Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume und  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge. Für eine Abbildung  $\varphi: G \rightarrow W$  und einen fixierten Vektor  $v \in V$  ist die Richtungsableitung in Richtung  $v$  (falls diese existiert) selbst eine Abbildung

$$D_v\varphi: G \longrightarrow W, P \longmapsto (D_v\varphi)(P).$$

Als solche ergibt es Sinn zu fragen, ob  $D_v\varphi$  in Richtung  $v \in V$  differenzierbar ist. Wir sprechen dann von *höheren Ableitungen*. Dies wird präzisiert durch die folgende induktive Definition.

**Definition 44.7.** Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume,

$$f: G \longrightarrow W$$

eine Abbildung auf einer offenen Menge  $G \subseteq V$  und  $v_1, \dots, v_n$  Vektoren in  $V$ . Man sagt, dass die *höhere Richtungsableitung* von  $f$  in Richtung  $v_1, \dots, v_n$  existiert, wenn die höhere Richtungsableitung in Richtung  $v_1, \dots, v_{n-1}$  existiert und davon die Richtungsableitung in Richtung  $v_n$  existiert. Sie wird mit

$$D_{v_n}(\dots(D_{v_2}(D_{v_1}f))\dots)$$

bezeichnet.

Mit partiellen Ableitungen schreibt man höhere Ableitungen als

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k}, \text{ etc.}$$

**Definition 44.8.** Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume und

$$f: G \longrightarrow W$$

eine Abbildung auf einer offenen Menge  $G \subseteq V$ . Man sagt, dass  $f$  *n-mal stetig differenzierbar* ist, wenn für jede Auswahl  $v_1, \dots, v_n$  von  $n$  Vektoren aus  $V$  die höhere Richtungsableitung

$$D_{v_n}(\dots D_{v_2}(D_{v_1}f)\dots)$$

in Richtung  $v_1, \dots, v_n$  existiert und stetig ist.

Einmal stetig differenzierbar bedeutet also, dass die Richtungsableitung  $D_v\varphi$  in jede Richtung  $v \in V$  existiert und stetig ist.

## 44.3. Der Satz von Schwarz.

**Beispiel 44.9.** Für die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^4 y^7,$$

sind die partiellen Ableitungen gleich  $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3y^7$  und  $\frac{\partial f}{\partial y} = 7x^4y^6$ . Die zweiten partiellen Ableitungen sind gleich

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = 12x^2y^7,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = 28x^3y^6,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} = 42x^4y^5$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = 28x^3y^6.$$

Der folgende Satz heißt *Satz von Schwarz* (oder auch *Satz von Clairaut*).

**Satz 44.10.** *Es sei  $G \subseteq V$  offen und  $\varphi: G \rightarrow W$  eine Abbildung, so dass für  $u, v \in V$  die zweiten Richtungsableitungen  $D_v D_u \varphi$  und  $D_u D_v \varphi$  existieren und stetig sind. Dann gilt*

$$D_v D_u \varphi = D_u D_v \varphi.$$

*Beweis.* Durch Betrachten der einzelnen Komponenten von  $\varphi$  bezüglich einer Basis von  $W$  können wir annehmen, dass  $W = \mathbb{K}$  und  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ist. Wir wollen den eindimensionalen Mittelwertsatz der Differentialrechnung anwenden. Sei  $P \in G$  ein fixierter Punkt. Wir betrachten die Abbildung  $(s, t) \mapsto \varphi(P + su + tv)$  und studieren diese für hinreichend kleine  $s$  und  $t$ . Wir fixieren diese (für den Moment) und betrachten die differenzierbare Abbildung

$$\sigma \mapsto \varphi(P + \sigma u + tv) - \varphi(P + \sigma u).$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein (von  $s$  und  $t$  abhängiges)  $s_1 \in ]0, s[$  mit

$$\begin{aligned} & \varphi(P + su + tv) - \varphi(P + su) - \varphi(P + tv) + \varphi(P) \\ &= s \cdot ((D_u \varphi)(P + s_1 u + tv) - (D_u \varphi)(P + s_1 u)). \end{aligned}$$

Nun wenden wir erneut den Mittelwertsatz auf die differenzierbare Abbildung

$$\tau \mapsto (D_u \varphi)(P + s_1 u + \tau v)$$

an, und erhalten die Existenz eines  $t_1 \in ]0, t[$  mit

$$(D_u \varphi)(P + s_1 u + tv) - (D_u \varphi)(P + s_1 u) = t \cdot (D_v D_u \varphi)(P + s_1 u + t_1 v).$$

Zusammen erhalten wir

$$\varphi(P + su + tv) - \varphi(P + su) - \varphi(P + tv) + \varphi(P) = st \cdot (D_v D_u \varphi)(P + s_1 u + t_1 v).$$

Wenden wir denselben Trick in umgekehrter Reihenfolge an, so erhalten wir  $s_2$  und  $t_2$ , so dass dieser Ausdruck auch gleich

$$st \cdot (D_u D_v \varphi)(P + s_2 u + t_2 v)$$

ist. Somit schließen wir für (hinreichend kleine) gegebene  $s, t > 0$ , dass positive  $s_1, s_2 \leq s$  und  $t_1, t_2 \leq t$  existieren mit

$$(D_v D_u \varphi)(P + s_1 u + t_1 v) = (D_u D_v \varphi)(P + s_2 u + t_2 v).$$

Für  $s \rightarrow 0$  und  $t \rightarrow 0$  konvergieren auch  $s_1, s_2, t_1$  und  $t_2$  gegen 0. Die Stetigkeit der beiden zweiten Richtungsableitungen impliziert für  $s, t \rightarrow 0$  die Gleichheit

$$(D_v D_u \varphi)(P) = (D_u D_v \varphi)(P).$$

□

Ein Spezialfall des Satzes von Schwarz ist, dass für eine zweifach stetig differenzierbare Funktion

$$f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

die Gleichheit

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

gilt.

**Korollar 44.11.** *Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume,  $G \subseteq V$  offen und*

$$\varphi: G \longrightarrow W$$

*eine  $n$ -mal stetig differenzierbare Abbildung. Es sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Auswahl von  $n$  Vektoren aus  $V$ . Dann gilt für jede Permutation  $\sigma \in S_n$  die Gleichheit*

$$D_{v_n}(\dots D_{v_2}(D_{v_1} \varphi)) = D_{v_{\sigma(n)}}(\dots D_{v_{\sigma(2)}}(D_{v_{\sigma(1)}} \varphi)).$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 44.19. □

## 44. ARBEITSBLATT

### 44.1. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 44.1.** Bestimme in den Beispielen aus Aufgabe 34.23 die Ableitungen der Funktionen in den Funktionsscharen und die beiden partiellen Ableitungen der Gesamtfunktionen nach  $x$  und nach  $a$ .

**Aufgabe 44.2.** Bestimme das Minimum der Funktion

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

in Abhängigkeit von  $b$  und  $c$ . Was hat dies mit partiellen Ableitungen zu tun?

**Aufgabe 44.3.** Bestimme die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 y^5 - \cos(x^3 - y^2).$$

**Aufgabe 44.4.** Bestimme die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ (x, y, z) \longmapsto \left( \sqrt{x^2 y^2 + 3} + x^3 y z^2, x^{11} - x^2 y^3 e^{xz} - \ln(x^2 + y^2 + x^4 z^6 + 1) \right).$$

**Aufgabe 44.5.** Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2, (x, y) \longmapsto (x^3 y - x^2, x^4 y^2 - 3x y^3 + 5y).$$

**Aufgabe 44.6.** Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^2, (x, y, z) \longmapsto (x^2 y z^3 - \sin x, \exp(x^4 y) - 2x^2 z^3 \cos(xy^2 z)).$$

**Aufgabe 44.7.** Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \mid y \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto \frac{x}{y}.$$

**Aufgabe 44.8.\***

Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \longmapsto \left( \frac{\sin x}{x^2 + y^4}, \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \ln(x^2 + y^2) \right),$$

in jedem Punkt.

**Aufgabe 44.9.** Beschreibe die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto z^2,$$

in reellen Koordinaten und bestimme die Jacobi-Matrix. Ebenso für  $z^3, z^4, z^5$ .

**Aufgabe 44.10.** Bestimme sämtliche höheren Richtungsableitungen der Abbildung

$$\mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto x^2 y^3 - x^3 y,$$

die sich mit den beiden Standardrichtungen  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$  ausdrücken lassen.

**Aufgabe 44.11.** Eine Schlange ist im ausgestreckten Ruhezustand einen Meter lang und ziemlich dünn, sie wird durch ihre Länge  $[0, 1]$  (gemessen vom Kopf bis zum Schlangenende) parametrisiert. Die Schlange schlängelt sich im Zeitintervall  $[a, b]$  über den Boden. Diese Bewegung wird durch eine differenzierbare Abbildung

$$\varphi: [0, 1] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, (s, t) \longmapsto \varphi(s, t),$$

beschrieben, dabei bezeichnet  $\varphi(s, t)$  den Ortspunkt, wo sich zum Zeitpunkt  $t$  der Schlangenkopf  $s$  befindet.

- (1) Welche Signifikanz besitzt die Abbildung

$$[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto \varphi(0, t)?$$

- (2) Welche Signifikanz besitzt die Abbildung

$$[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, s \longmapsto \varphi(s, c),$$

zu einem festen Zeitpunkt  $c \in [a, b]$ ?

- (3) Welche Signifikanz besitzt die Bedingung

$$\int_0^1 \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, c) \right\| ds = 1$$

für ein (für alle)  $c \in [a, b]$ .

- (4) Welche Signifikanz besitzt die Bedingung

$$\int_0^r \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, c) \right\| ds = r$$

für alle  $r \in [0, 1]$  und alle  $c \in [a, b]$ ?



**Aufgabe 44.12.** Wir betrachten für  $0 \leq u \leq \frac{1}{2}$  die Funktionen

$$\psi_u: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$\psi_u(s) := \begin{cases} \begin{pmatrix} u \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{2}\pi - 4s + 4u\right) \\ \sin\left(\frac{1}{2}\pi - 4s + 4u\right) \end{pmatrix} & \text{für } 0 \leq s \leq u, \\ \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} & \text{für } u \leq s \leq 1 - u, \\ \begin{pmatrix} 1 - u \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{3}{2}\pi + 4s - 4 + 4u\right) \\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi + 4s - 4 + 4u\right) \end{pmatrix} & \text{für } 1 - u \leq s \leq 1. \end{cases}$$

(1) Skizziere das Bild der Funktion  $\psi_u$  für die Parameter

$$u = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}.$$

(2) Zeige, dass die  $\psi_u$  stetig sind.

(3) Zeige, dass die  $\psi_u$  differenzierbar sind.

(4) Zeige, dass die Kurvenlänge der  $\psi_u$  gleich 1 ist.

**Aufgabe 44.13.** Wir definieren

$$\varphi: [0, 1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

durch

$$\varphi(s, t) := t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \psi_{\frac{1}{2} \sin^2 t}(s),$$

wobei  $\psi_u(s)$  die Funktionsschar aus Aufgabe 44.12 ist (es ist also der Parameter  $u = u(t) = \frac{1}{2} \sin^2 t$  abhängig von  $t$ ). Welche Eigenschaften von Aufgabe 44.11 sind erfüllt?

**Aufgabe 44.14.\***

Es sei  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(t, x) = \sin(\lambda x) e^{-\lambda^2 t}.$$

Zeige, dass  $f$  die *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}$$

erfüllt.

**Aufgabe 44.15.** Zeige, dass eine Polynomfunktion  $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$  beliebig oft stetig differenzierbar ist.

**Aufgabe 44.16.\***

Man gebe ein Beispiel für eine Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

die im Nullpunkt partiell differenzierbar ist und dort die Eigenschaft besitzt, dass die Richtungsableitung in keine Richtung  $v = (a, b)$  mit  $a, b \neq 0$  existiert.

**Aufgabe 44.17.\***

Es seien  $P, Q$  zwei komplexe (bzw. reelle) Polynome und

$$\varphi: \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2, (x, y) \longmapsto (P(x, y), Q(x, y)),$$

die zugehörige Abbildung. Die Determinante der Jacobi-Matrix zu  $\varphi$  sei in jedem Punkt  $P \in \mathbb{K}^2$  von 0 verschieden.

- (1) Zeige, dass bei  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  die Determinante konstant ist.
- (2) Zeige durch ein Beispiel, dass bei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  die Determinante nicht konstant sein muss.

**Aufgabe 44.18.\***

Zeige für Polynomfunktionen

$$f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

direkt, dass

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

gilt.

**Aufgabe 44.19.** Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale,  $\mathbb{K}$ -Vektorräume  $G \subseteq V$  offen und

$$\varphi: G \longrightarrow W$$

eine  $n$ -mal stetig differenzierbare Abbildung. Es sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Auswahl von  $n$  Vektoren aus  $V$ . Zeige, dass dann für jede Permutation  $\sigma \in S_n$  die Gleichheit

$$D_{v_n}(\dots D_{v_2}(D_{v_1}\varphi)\dots) = D_{v_{\sigma(n)}}(\dots D_{v_{\sigma(2)}}(D_{v_{\sigma(1)}}\varphi)\dots)$$

gilt.

#### 44.2. Aufgaben zum Abgeben.

##### Aufgabe 44.20. (3 Punkte)

Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3, (x, y, z) \longmapsto (\sin xy, x^2y^3z^4 - y \sinh z, xy^2z + 5).$$

##### Aufgabe 44.21. (3 Punkte)

Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto xy^3 - x^2y^2 - 4y^2.$$

Berechne die Richtungsableitung dieser Abbildung in einem Punkt  $(x, y)$  in Richtung  $(2, 5)$ . Bestätige, dass sich diese Richtungsableitung auch ergibt, wenn man die Jacobi-Matrix auf den Vektor  $(2, 5)$  anwendet.

##### Aufgabe 44.22. (3 Punkte)

Zeige, dass keine partiell differenzierbare Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

existiert, so dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = xy \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y^2$$

für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  gilt.

##### Aufgabe 44.23. (4 Punkte)

Es sei

$$f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Polynomfunktion. Zeige, dass es ein  $k \in \mathbb{N}$  derart gibt, dass sämtliche  $k$ -ten Richtungsableitungen 0 sind.

##### Aufgabe 44.24. (6 Punkte)

Es sei

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \varphi(x, y),$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, für die in jedem Punkt  $P \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \varphi(P) = 0$$

gelte. Zeige, dass es dann Funktionen

$$f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart gibt, dass

$$\varphi(x, y) = f(x) + g(y)$$

gilt.

**Aufgabe 44.25.** (6 Punkte)

Zeige, dass die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

zweimal partiell differenzierbar ist, und dass

$$D_1 D_2 f(0, 0) \neq D_2 D_1 f(0, 0)$$

gilt.

## 45. VORLESUNG - TOTALE DIFFERENZIERBARKEIT

### 45.1. Totale Differenzierbarkeit.

Wir möchten Abbildungen  $\varphi: V \rightarrow W$  zwischen endlichdimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen differenzieren, und allgemeiner Abbildungen

$$\varphi: G \longrightarrow W,$$

wobei  $G \subseteq V$  eine gewisse offene Teilmenge ist. Wir wiederholen kurz die Situation in einer Variablen: Angenommen wir haben eine Abbildung  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dann ist die Grundidee einer differenzierbaren Abbildung und ihrer Ableitung, eine „Tangente an den Graphen“ anzulegen. Dabei kann man sagen, dass die Tangente die beste *lineare Approximation* von  $\varphi$  (genauer: der Graph einer affin-linearen Approximation) in einem gegebenen Punkt  $x \in \mathbb{R}$  darstellt. Da die Steigung der Tangente wieder eine reelle Zahl ist, wird beim Differenzieren jedem Punkt  $x$  wieder eine Zahl zugeordnet. Wir erhalten also eine neue Funktion, welche wir mit  $\varphi'$  bezeichnen. Im höherdimensionalen Fall ist dies komplizierter, aber die Idee einer bestmöglichen *linearen Approximation* bleibt bestehen.

Die Übereinstimmung der Konzepte wird auch deutlich, wenn man den Graphen einer Abbildung anschaut. Zu einer differenzierbaren Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  schmiegt sich die Tangente im Punkt  $(P, f(P))$  an den Graphen zu  $f$  an. Zu einer Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist der Graph eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ , den man sich als ein Gebirge über der Ebene vorstellen sollte. Eine sinnvolle Fragestellung ist, ob es zu einem Punkt  $(P, f(P))$  eine anschmiegende Tangentialebene an den Graphen

zu  $f$  gibt, die man als den Graphen einer affin-linearen Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  realisieren kann.

Im Folgenden nehmen wir an, dass alle Vektorräume endlichdimensional und mit einer euklidischen Norm versehen sind. Wie in der 37. Vorlesung gezeigt wurde, hängt die Topologie, also die Konzepte offene Menge, Stetigkeit, Konvergenz, nicht von der gewählten euklidischen Struktur ab. Bei  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  stattdessen wir den zugrunde liegenden reellen Vektorraum mit einer euklidischen Struktur aus.

**Definition 45.1.** Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume,  $G \subseteq V$  eine offene Menge und  $\varphi: G \rightarrow W$  eine Abbildung. Dann heißt  $\varphi$  *differenzierbar* (oder *total differenzierbar*) im Punkt  $P \in G$ , wenn es eine  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung  $L: V \rightarrow W$  mit der Eigenschaft

$$\varphi(P + v) = \varphi(P) + L(v) + \|v\|r(v)$$

gibt, wobei  $r: U(0, \delta) \rightarrow W$  eine in 0 stetige Abbildung mit  $r(0) = 0$  ist und die Gleichung für alle  $v \in V$  mit  $P + v \in U(P, \delta) \subseteq G$  gilt.

Diese lineare Abbildung  $L$  heißt, falls sie existiert, das (*totale*) *Differential* von  $\varphi$  an der Stelle  $P$  und wird mit

$$(D\varphi)_P$$

bezeichnet.

Äquivalent zur totalen Differenzierbarkeit ist die Eigenschaft, dass der Ausdruck

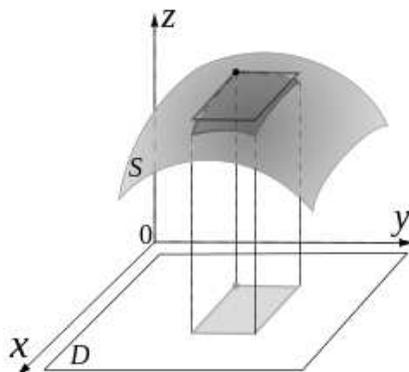
$$r(v) = \frac{\varphi(P + v) - \varphi(P) - L(v)}{\|v\|}$$

für  $v \rightarrow 0$  gegen 0 konvergiert. Ebenfalls äquivalent ist die Eigenschaft, dass der Limes (von Funktionen)

$$\lim_{v \rightarrow 0, v \neq 0} \frac{\|\varphi(P + v) - \varphi(P) - L(v)\|}{\|v\|}$$

existiert und gleich 0 ist.

Das Konzept der totalen Differenzierbarkeit ist eher theoretisch und für konkrete Berechnungen nicht optimal. Wir werden später dieses Konzept mit dem Konzept der partiellen Ableitungen in Verbindung bringen, welches eher für Berechnungen geeignet ist, jedoch von Koordinaten, d.h. von der Auswahl einer Basis, abhängt (siehe auch Beispiel 45.11 weiter unten).



Der geometrische Gehalt tritt besonders im Fall  $W = \mathbb{R}$  deutlich hervor. Dann ist der Graph der affin-linearen Abbildung  $\varphi(P) + (D\varphi)_P(x - P)$  eine lineare Approximation des Graphen der Funktion  $\varphi(x)$  im Punkt  $P$ .

**Beispiel 45.2.** Ist  $\varphi: V \rightarrow W$  konstant mit  $\varphi(v) = w \in W$  für alle  $v \in V$ , so ist  $\varphi$  differenzierbar mit totalem Differential 0 (siehe Aufgabe 45.5).

**Proposition 45.3.** *Es sei  $L: V \rightarrow W$  eine  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung zwischen den endlichdimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen  $V$  und  $W$ . Dann ist  $L$  in jedem Punkt  $P \in V$  differenzierbar und stimmt in jedem Punkt mit ihrem totalen Differential überein.*

*Beweis.* Aufgrund der Linearität gilt

$$L(P + v) = L(P) + L(v).$$

Also können wir  $r = 0$  wählen. □

**Beispiel 45.4.** Wir betrachten die Funktion

$$\varphi: \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

deren Graph die untere Hälfte der Kugel mit Radius 1 und Mittelpunkt  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

ist. Wir interessieren uns, ob  $\varphi$  im Nullpunkt  $(0, 0)$  total differenzierbar ist. Aus Symmetriegründen kommt als totales Differential nur die Nullabbildung in Frage. Es geht somit darum, ob für  $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  gegen 0 der Ausdruck

$$\frac{\varphi(v)}{\|v\|} = \frac{\varphi(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

gegen 0 konvergiert. Mit

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ist dies

$$\frac{1 - \sqrt{1 - r^2}}{r}.$$

Wir wenden darauf die Regel von l'Hospital an. Der abgeleitete Nenner ist 1 und der abgeleitete Zähler ist

$$\frac{r}{\sqrt{1 - r^2}}$$

und konvergiert gegen 0, so dass Konvergenz gegen 0 vorliegt. Die Nullabbildung ist also in der Tat das totale Differential.

**Lemma 45.5.** *Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume und sei die Abbildung  $\varphi: G \rightarrow W$  auf einer offenen Teilmenge  $G \subseteq V$  definiert. Sei  $P \in G$  ein Punkt. Dann existiert höchstens eine lineare Abbildung mit den Eigenschaften aus Definition 45.1. Ist  $\varphi$  im Punkt  $P$  differenzierbar, so ist das totale Differential  $(D\varphi)_P$  eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Angenommen, es gelte

$$\varphi(P + v) = \varphi(P) + L_1(v) + \|v\| \cdot r_1(v)$$

und

$$\varphi(P + v) = \varphi(P) + L_2(v) + \|v\| \cdot r_2(v)$$

mit linearen Abbildungen  $L_1$  und  $L_2$  und mit im Punkt 0 stetigen Funktionen  $r_1, r_2: U(0, \delta) \rightarrow W$  mit  $r_1(0) = r_2(0) = 0$ . Wir müssen  $L_1 = L_2$  zeigen. Dazu ziehen wir die beiden Gleichungen voneinander ab (da es sich hier um Gleichungen von Funktionswerten im Vektorraum  $W$  handelt, ist hier werteweises Abziehen gemeint) und erhalten die Gleichung

$$0 = (L_1 - L_2)(v) + \|v\| \cdot (r_1(v) - r_2(v)).$$

Daher müssen wir zeigen, dass die (konstante) Nullabbildung die Eigenschaft besitzt, dass die lineare Abbildung 0 ihre einzige lineare Approximation ist. Wir nehmen daher an, dass

$$0 = L(v) + \|v\| \cdot r(v)$$

gilt, wobei  $L$  linear und  $r$  eine in 0 stetige Funktion mit  $r(0) = 0$  ist. Wenn  $L$  nicht die Nullabbildung ist, so gibt es einen Vektor  $v \in V$  mit  $L(v) = w \neq 0$ . Dann gilt für  $s \in \mathbb{K}$

$$0 = L(sv) + \|sv\|r(sv) = sw + |s| \cdot \|v\| \cdot r(sv).$$

Dies impliziert, dass  $r(sv) = -\frac{sw}{|s|\|v\|}$  für  $s \neq 0$  gilt. Die Norm von  $r(sv)$  ist daher konstant gleich  $\frac{\|w\|}{\|v\|} \neq 0$ . Also gilt  $\lim_{s \rightarrow 0} \|r(sv)\| \neq 0$ , ein Widerspruch.  $\square$

**Proposition 45.6.** *Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume und es sei  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge. Seien  $\varphi_1, \varphi_2: G \rightarrow W$  im Punkt*

$P \in G$  differenzierbare Abbildungen mit den totalen Differentialen  $(D\varphi_1)_P$  und  $(D\varphi_2)_P$ . Dann ist auch  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$  in  $P$  differenzierbar und es gilt

$$(D(\varphi_1 + \varphi_2))_P = (D\varphi_1)_P + (D\varphi_2)_P.$$

Ebenso gilt  $(D(a\varphi_1))_P = a(D\varphi_1)_P$  für alle  $a \in \mathbb{K}$ .

*Beweis.* Sei  $\varphi_1(P + v) = \varphi_1(P) + L_1(v) + \|v\| \cdot r_1(v)$  und  $\varphi_2(P + v) = \varphi_2(P) + L_2(v) + \|v\| \cdot r_2(v)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} (\varphi_1 + \varphi_2)(P + v) &= \varphi_1(P + v) + \varphi_2(P + v) \\ &= \varphi_1(P) + L_1(v) + \|v\| \cdot r_1(v) + \varphi_2(P) + L_2(v) + \|v\| \cdot r_2(v) \\ &= (\varphi_1 + \varphi_2)(P) + (L_1 + L_2)(v) + \|v\|(r_1(v) + r_2(v)). \end{aligned}$$

Wir erhalten also die gewünschte Gestalt, da auch  $r_1 + r_2$  in 0 stetig mit  $(r_1 + r_2)(0) = 0$  ist. Der Beweis der zweiten Aussage ist ähnlich.  $\square$

**Proposition 45.7.** *Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume und  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge. Sei  $\varphi: G \rightarrow W$  eine in  $P \in G$  differenzierbare Abbildung. Dann ist  $\varphi$  auch stetig im Punkt  $P$ .*

*Beweis.* Nach Definition gilt  $\varphi(P + v) = \varphi(P) + L(v) + \|v\| \cdot r(v)$ . Die rechte Seite ist stetig (nach Definition 45.1 und Satz 34.10) in  $v = 0$ . Damit ist  $\varphi$  stetig in  $P$ .  $\square$

## 45.2. Die Kettenregel.

Die Eleganz des totalen Differentials wird in der folgenden allgemeinen Version der Kettenregel deutlich.

**Satz 45.8.** *Es seien  $V, W$  und  $U$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume,  $G \subseteq V$  und  $D \subseteq W$  offene Mengen, und  $\varphi: G \rightarrow W$  und  $\psi: D \rightarrow U$  Abbildungen derart, dass  $\varphi(G) \subseteq D$  gilt. Es sei weiter angenommen, dass  $\varphi$  in  $P \in G$  und  $\psi$  in  $\varphi(P) \in D$  total differenzierbar ist. Dann ist  $\psi \circ \varphi: G \rightarrow U$  in  $P$  differenzierbar mit dem totalen Differential*

$$(D(\psi \circ \varphi))_P = (D\psi)_{\varphi(P)} \circ (D\varphi)_P.$$

*Beweis.* Wir haben nach Voraussetzung (wobei wir  $Q := \varphi(P)$  setzen)

$$\varphi(P + v) = \varphi(P) + L(v) + \|v\|r(v)$$

und

$$\psi(Q + w) = \psi(Q) + M(w) + \|w\|s(w)$$

mit linearen Abbildungen  $L: V \rightarrow W$  und  $M: W \rightarrow U$ , und mit in 0 stetigen Funktionen  $r: U(0, \delta) \rightarrow W$  und  $s: U(0, \delta') \rightarrow U$ , die beide in 0 den Wert 0 annehmen. Damit gilt

$$\begin{aligned} &(\psi \circ \varphi)(P + v) \\ &= \psi(\varphi(P + v)) \\ &= \psi(\varphi(P) + L(v) + \|v\|r(v)) \\ &= \psi(\varphi(P)) + M(L(v) + \|v\|r(v)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|L(v) + \|v\|r(v)\|s(L(v) + \|v\|r(v)) \\
= & \psi(\varphi(P)) + M(L(v)) + M(\|v\|r(v)) \\
& + \|L(v) + \|v\|r(v)\|s(L(v) + \|v\|r(v)) \\
= & \psi(\varphi(P)) + (M \circ L)(v) + \|v\|M(r(v)) \\
& + \| \|v\|L\left(\frac{v}{\|v\|}\right) + \|v\|r(v)\|s(L(v) + \|v\|r(v)) \\
= & \psi(\varphi(P)) + (M \circ L)(v) \\
& + \|v\|\left(M(r(v)) + \|L\left(\frac{v}{\|v\|}\right) + r(v)\|s(L(v) + \|v\|r(v))\right).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir in der dritten Gleichung die lineare Approximation für

$$w = L(v) + \|v\|r(v)$$

eingesetzt. Die beiden letzten Gleichungen gelten nur für  $v \neq 0$ . Der Ausdruck

$$t(v) := M(r(v)) + \|L\left(\frac{v}{\|v\|}\right) + r(v)\|s(L(v) + \|v\|r(v))$$

ist unser Kandidat für die Abweichungsfunktion. Der erste Summand  $M(r(v))$  ist in  $v = 0$  stetig und hat dort auch den Wert 0. Es genügt also den zweiten Summanden zu betrachten. Der  $\|-\|$ -Ausdruck ist in einer Umgebung der Null beschränkt, da  $L$  auf der kompakten Einheitskugel nach Satz 36.11 beschränkt ist und da  $r$  in 0 stetig ist. Daher hängt die Stetigkeit nur von dem rechten Faktor ab. Aber  $L(v) + \|v\|r(v)$  hat für  $v \rightarrow 0$  den Grenzwert 0. Damit ist auch  $s(L(v) + \|v\|r(v))$  in 0 stetig und hat dort den Grenzwert 0.  $\square$

Im folgenden Beispiel verwenden wir, dass man das totale Differential unter recht schwachen Bedingungen mit der Jacobi-Matrix beschreiben kann, was wir in der nächsten Vorlesung begründen werden.

**Beispiel 45.9.** Wir betrachten die Funktion

$$\varphi: \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

aus Beispiel 45.4 in einem beliebigen Punkt  $P = (x, y)$ . Wir schreiben die Abbildung als Hintereinanderschaltung von

$$(x, y) \longmapsto 1 - x^2 - y^2 \text{ und } u \longmapsto 1 - \sqrt{u}.$$

Die erste Funktion ist überall total differenzierbar mit der Jacobi-Matrix

$$(-2x, -2y)$$

und die zweite Funktion ist für  $u > 0$  differenzierbar mit der Ableitung  $\frac{-1}{2\sqrt{u}}$ . Die Gesamtabbildung ist somit nach der Kettenregel ebenfalls total differenzierbar mit dem totalen Differential

$$\frac{-1}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}}(-2x, -2y) = \left( \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right).$$

**Lemma 45.10.** *Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume,  $G \subseteq V$  eine offene Menge,  $P \in G$  ein Punkt,  $\varphi: G \rightarrow W$  und  $f: G \rightarrow \mathbb{K}$  in  $P$  differenzierbare Abbildungen. Dann ist die Produktabbildung*

$$f \cdot \varphi: G \longrightarrow W$$

in  $P$  differenzierbar mit

$$(D(f \cdot \varphi))_P = f(P) \cdot (D\varphi)_P + (Df)_P \cdot \varphi(P).$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 45.21. □

Das folgende Beispiel illustriert, dass das totale Differential unabhängig von der Wahl einer Basis ist, die partiellen Ableitungen aber nicht.

**Beispiel 45.11.** Wir betrachten die Abbildung  $f: \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}$ , die durch

$$(x, y, z) \longmapsto 2xy^2 + x^2z^3 + z^2$$

gegeben sei. Es ist leicht die partiellen Ableitungen in jedem Punkt zu berechnen, nämlich:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{(x,y,z)} = (2y^2 + 2xz^3, 4xy, 3x^2z^2 + 2z).$$

Wir werden in der nächsten Vorlesung sehen, dass diese Abbildung in jedem Punkt total differenzierbar ist, und dass die Jacobi-Matrix das totale Differential beschreibt.

Nehmen wir nun an, dass wir nur an der Restriktion dieser Funktion auf die Ebene

$$E \subset \mathbb{K}^3, E = \{(x, y, z) \mid 3x + 2y - 5z = 0\}$$

interessiert sind.  $E$  ist also der Kern der linearen Abbildung

$$L: \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y, z) \longmapsto 3x + 2y - 5z.$$

Als Kern ist  $E$  selbst ein (zweidimensionaler) Vektorraum. Die Einschränkung von  $f$  auf die Ebene ergibt also die Abbildung

$$\tilde{f} = f|_E: E \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Diese Abbildung kann man als die Komposition  $E \subset \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}$  auffassen und diese ist nach der Kettenregel differenzierbar. Wenn wir die Inklusion von  $E$  in  $\mathbb{K}^3$  mit  $N$  bezeichnen, so ist das totale Differential der Komposition in einem Punkt  $P \in E$  gemäß der Kettenregel gerade die Abbildung

$$(D\tilde{f})_P = (Df)_P \circ N: E \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Daher ergibt es hier Sinn vom totalen Differential zu sprechen.

Es ergibt allerdings keinen Sinn von partiellen Ableitungen der Abbildung  $f|_E: E \rightarrow \mathbb{K}$  zu sprechen, da es keine natürliche Basis auf  $E$  gibt und daher auch keine natürlichen Koordinaten. Es ist leicht eine Basis von  $E$  zu finden

und damit Koordinaten, es gibt aber keine „beste Wahl“, und die partiellen Ableitungen sehen in jeder Basis verschieden aus.

Eine Basis von  $E$  ist beispielsweise durch  $v_1 = (0, 5, 2)$  und  $v_2 = (5, 0, 3)$  gegeben, und eine weitere durch  $w_1 = (1, 1, 1)$  und  $w_2 = (2, -3, 0)$ . Mit solchen Basen erhalten wir Identifikationen  $\mathbb{K}^2 \rightarrow E$  und somit numerische Beschreibungen der Abbildung  $\mathbb{K}^2 \cong E \rightarrow \mathbb{K}$ , womit wir die partiellen Ableitungen bezüglich der gewählten Basen berechnen können.

In der ersten Basis ist die Identifikation gegeben durch die Abbildung

$$(s, t) \mapsto sv_1 + tv_2 = s(0, 5, 2) + t(5, 0, 3) = (5t, 5s, 2s + 3t)$$

und dieser Ausdruck wird durch  $f$  abgebildet auf

$$\begin{aligned} & 2(5t)(5s)^2 + (5t)^2(2s + 3t)^3 + (2s + 3t)^2 \\ = & 250ts^2 + 25t^2(8s^3 + 36s^2t + 54st^2 + 27t^3) \\ & + 4s^2 + 9t^2 + 12st \\ = & 250ts^2 + 200s^3t^2 + 900s^2t^3 + 1350st^4 \\ & + 675t^5 + 4s^2 + 9t^2 + 12st. \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen dieser Komposition (nennen wir sie  $g$ ) bezüglich dieser Basis sind gegeben durch

$$\partial g / \partial s = 500ts + 600s^2t^2 + 1800st^3 + 1350t^4 + 8s + 12t$$

und

$$\partial g / \partial t = 250s^2 + 400s^3t + 2700s^2t^2 + 5400st^3 + 3375t^4 + 18t + 12s.$$

In der zweiten Basis  $w_1 = (1, 1, 1)$  und  $w_2 = (2, -3, 0)$  ist die Identifikation gegeben durch

$$(r, u) \mapsto rw_1 + uw_2 = r(1, 1, 1) + u(2, -3, 0) = (r + 2u, r - 3u, r)$$

und dieser Ausdruck wird unter  $f$  abgebildet auf

$$\begin{aligned} & 2(r + 2u)(r - 3u)^2 + (r + 2u)^2r^3 + r^2 \\ = & 2r^3 + 4r^2u - 12r^2u - 24ru^2 \\ = & 2r^3 - 8r^2u - 6ru^2 + 36u^3 + r^5 + 4r^4u. \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen der Komposition (nennen wir sie  $h$ ) bezüglich dieser Basis sind

$$\partial h / \partial r = 6r^2 - 16ru - 6u^2 + 5r^4 + 16r^3u + 12r^2u^2 + 2r$$

und

$$\partial h / \partial u = -8r^2 - 12ru + 108u^2 + 4r^4 + 8r^3u.$$

Fazit: Koordinaten sind manchmal gut für Berechnungen, manchmal verdunkeln sie aber auch den eigentlichen mathematischen Sachverhalt.

## 45. ARBEITSBLATT

## 45.1. Übungsaufgaben.

Für dieses Aufgabenblatt darf die Beziehung zwischen totalem Differential und partiellen Ableitungen bzw. Richtungsableitungen nicht verwendet werden.

**Aufgabe 45.1.** Ist die Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2,$$

im Punkt  $-3$  total differenzierbar? Was ist das totale Differential in diesem Punkt?

**Aufgabe 45.2.\***

Wir betrachten die Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 y^3.$$

(1) Man schreibe  $(x + v)^2(y + w)^3$  als

$$(x + v)^2(y + w)^3 = x^2 y^3 + av + bw + cv^2 + dvw + ew^2$$

mit geeigneten Termen  $a, b, c, d, e$ , wobei  $a$  und  $b$  nicht von  $v$  und  $w$  abhängen dürfen.

(2) Man folgere aus der Darstellung aus (1), dass  $x^2 y^3$  in einem beliebigen Punkt  $(x, y)$  total differenzierbar ist.

**Aufgabe 45.3.** Berechne für die Addition

$$+: \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto x + y,$$

und für die Multiplikation

$$\cdot: \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}, (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

das totale Differential.

**Aufgabe 45.4.** Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \min(x, y).$$

- (1) Skizziere die Funktion.
- (2) Zeige, dass  $f$  stetig ist.
- (3) Bestimme für jeden Punkt  $P \in \mathbb{R}^2$  und jede Richtung  $v \in \mathbb{R}^2$ , ob die Richtungsableitung in diesem Punkt und in diese Richtung existiert.
- (4) Bestimme für jeden Punkt, ob in diesem Punkt die Funktion  $f$  total differenzierbar ist.

**Aufgabe 45.5.** Es sei  $\varphi: V \rightarrow W$  konstant mit  $\varphi(v) = w \in W$  für alle  $v \in V$ . Zeige, dass  $\varphi$  differenzierbar ist mit totalem Differential 0.

**Aufgabe 45.6.** Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume und  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge. Es sei  $\varphi: G \rightarrow W$  im Punkt  $P \in G$  differenzierbar mit dem Differential  $(D\varphi)_P$ . Zeige, dass für alle  $a \in \mathbb{K}$  die Beziehung

$$(D(a\varphi))_P = a(D\varphi)_P$$

gilt.

**Aufgabe 45.7.** Es sei

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Polynomfunktion. Zeige, dass  $f$  im Nullpunkt total differenzierbar ist. Man gebe dabei explizit das totale Differential und die Abweichungsfunktion an.

**Aufgabe 45.8.** Es sei

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Polynomfunktion. Zeige, dass  $f$  in jedem Punkt total differenzierbar ist. Man gebe dabei explizit das totale Differential und die Abweichungsfunktion an.

**Aufgabe 45.9.** Es seien  $V, W_1$  und  $W_2$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume.

- (1) Seien  $L_1: V \rightarrow W_1$  und  $L_2: V \rightarrow W_2$   $\mathbb{K}$ -lineare Abbildungen. Zeige, dass die Abbildung

$$L_1 \times L_2: V \longrightarrow W_1 \times W_2, v \longmapsto (L_1(v), L_2(v)),$$

$\mathbb{K}$ -linear ist.

- (2) Seien  $f_1: V \rightarrow W_1$  und  $f_2: V \rightarrow W_2$  im Punkt  $P \in V$  differenzierbare Abbildungen. Zeige, dass die Abbildung

$$f = (f_1 \times f_2): V \longrightarrow W_1 \times W_2, Q \longmapsto (f_1(Q), f_2(Q)),$$

im Punkt  $P$  differenzierbar ist mit dem totalen Differential

$$(Df)_P = (Df_1)_P \times (Df_2)_P.$$

Die folgende Aufgabe verwendet das Konzept Äquivalenzrelation.

Eine *Äquivalenzrelation* auf einer Menge  $M$  ist eine Relation  $R \subseteq M \times M$ , die die folgenden drei Eigenschaften besitzt (für beliebige  $x, y, z \in M$ ).

- (1) Es ist  $x \sim x$  (*reflexiv*).
- (2) Aus  $x \sim y$  folgt  $y \sim x$  (*symmetrisch*).
- (3) Aus  $x \sim y$  und  $y \sim z$  folgt  $x \sim z$  (*transitiv*).

Dabei bedeutet  $x \sim y$ , dass das Paar  $(x, y)$  zu  $R$  gehört.

**Aufgabe 45.10.** Es seien  $V, W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume und  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge. Weiter seien  $f, g: G \rightarrow W$  Abbildungen und  $P \in G$ . Wir nennen  $f, g$  im Punkt  $P$  *tangential äquivalent*, wenn der Limes

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{(f - g)(P + v)}{\|v\|}$$

existiert und gleich 0 ist.

- (1) Zeige, dass dadurch eine Äquivalenzrelation auf der Abbildungsmenge von  $G$  nach  $W$  gegeben ist.
- (2) Es sei  $f$  total differenzierbar. Zeige, dass  $f$  zu seiner linearen Approximation tangential äquivalent ist.
- (3) Es seien  $f$  und  $g$  tangential äquivalent. Zeige, dass in diesem Fall  $f$  genau dann in  $P$  total differenzierbar ist, wenn dies für  $g$  gilt, und dass ihre totalen Differentiale im Punkt  $P$  übereinstimmen.

**Aufgabe 45.11.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Zeige, dass die Skalarmultiplikation

$$\varphi: \mathbb{R} \times V \longrightarrow V, (s, v) \longmapsto sv,$$

in jedem Punkt  $P = (s, v)$  total differenzierbar ist mit

$$(D\varphi)_P(t, w) = tv + sw.$$

**Aufgabe 45.12.** Leite aus der allgemeinen Kettenregel die Kettenregel für Funktionen in einer Variablen ab.

**Aufgabe 45.13.** Leite aus der allgemeinen Kettenregel die Kettenregel für differenzierbare Kurven (für eine differenzierbare Kurve  $f: J \rightarrow V$  und eine differenzierbare Umparametrisierung  $h: I \rightarrow J$ ) ab.

**Aufgabe 45.14.\***

Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $W$  ein reeller Vektorraum und

$$\varphi: I \longrightarrow W$$

eine differenzierbare Kurve. Zeige, dass zwischen dem totalen Differential und der Kurven-Ableitung die Beziehung

$$(D\varphi)_P(1) = \varphi'(P)$$

besteht.

**Aufgabe 45.15.\***

Es sei  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum, sei  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  eine total differenzierbare Funktion und  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion. Zeige

$$(D(g \circ f))_P = g'(f(P)) \cdot (Df)_P$$

für  $P \in G$ .

**Aufgabe 45.16.** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein reelles Intervall und seien

$$f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen. Beweise die Produktregel aus der allgemeinen Kettenregel unter Verwendung von Aufgabe 45.4.

**Aufgabe 45.17.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge. Weiter seien  $f, g: G \rightarrow \mathbb{R}$  zwei in  $P \in G$  differenzierbare Funktionen. Wende die Kettenregel und Aufgabe 45.4 auf das Diagramm

$$G \xrightarrow{f, g} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\text{mult}} \mathbb{R}$$

an, um zu zeigen, dass die Gleichung

$$(D(f \cdot g))_P = g(P) \cdot (Df)_P + f(P) \cdot (Dg)_P$$

gilt.

**45.2. Aufgaben zum Abgeben.**

**Aufgabe 45.18.** (4 Punkte)

Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume,  $G \subseteq V$  eine offene Menge,  $\varphi: G \rightarrow W$  eine Abbildung und  $L: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Zeige, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind.

- (1)  $\varphi$  ist differenzierbar in  $P$  mit dem totalen Differential  $L$ .
- (2) Der Limes

$$\lim_{v \rightarrow 0, v \neq 0} \frac{\varphi(P + v) - \varphi(P) - L(v)}{\|v\|}$$

existiert und ist gleich 0.

- (3) Der Limes

$$\lim_{v \rightarrow 0, v \neq 0} \frac{\|\varphi(P + v) - \varphi(P) - L(v)\|}{\|v\|}$$

existiert und ist gleich 0.

**Aufgabe 45.19.** (4 Punkte)

Es seien  $f_1, \dots, f_n$  differenzierbare Funktionen in einer Variablen. Bestimme das totale Differential der Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)).$$

**Aufgabe 45.20.** (3 Punkte)

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass  $\varphi$  genau dann eine Verschiebung ist, also von der Art  $P \mapsto P + v$  mit einem festen Vektor  $v \in V$ , wenn

$$(D\varphi)_P = \text{Id}_V$$

für alle  $P \in V$  ist.

**Aufgabe 45.21.** (4 Punkte)

Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume,  $G \subseteq V$  eine offene Mengen,  $P \in G$  ein Punkt,  $\varphi: G \rightarrow W$  und  $f: G \rightarrow \mathbb{K}$  in  $P$  differenzierbare Abbildungen. Zeige, dass dann die Produktabbildung

$$f \cdot \varphi: G \longrightarrow W$$

in  $P$  differenzierbar ist mit

$$(D(f \cdot \varphi))_P = f(P) \cdot (D\varphi)_P + (Df)_P \cdot \varphi(P).$$

Tipp: Verwende Aufgabe 45.12 und die Kettenregel.

**Aufgabe 45.22.** (4 Punkte)

Es sei

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto f(z),$$

eine im Punkt  $P \in \mathbb{C}$  komplex-differenzierbare Funktion. Zeige, dass  $f$  auch als Funktion von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$  im reellen Sinn total differenzierbar ist. In welcher Beziehung steht die komplexe Zahl  $f'(P)$  und das totale Differential  $(Df)_P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ?

## 46. VORLESUNG - TOTALE DIFFERENZIERBARKEIT II

## 46.1. Totale Differenzierbarkeit und partielle Ableitungen.

Im Folgenden wollen wir den Zusammenhang zwischen Richtungsableitungen, partiellen Ableitungen und dem totalen Differential verstehen.

Totale Differenzierbarkeit impliziert richtungsweise Differenzierbarkeit.

**Proposition 46.1.** *Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume, es sei  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge und  $\varphi: G \rightarrow W$  eine im Punkt  $P \in G$  differenzierbare Abbildung. Dann ist  $\varphi$  in  $P$  in jede Richtung  $v$  differenzierbar, und es gilt*

$$(D_v\varphi)(P) = (D\varphi)_P(v).$$

*Beweis.* Da  $(D\varphi)_P$  eine lineare Abbildung von  $V$  nach  $W$  ist, liefert die Anwendung dieser Abbildung auf einen Vektor  $v \in V$  einen Vektor in  $(D\varphi)_P(v) \in W$ . Nach Voraussetzung haben wir

$$\varphi(P + v) = \varphi(P) + (D\varphi)_P(v) + \|v\| \cdot r(v)$$

(mit den üblichen Bedingungen an  $r$ ). Insbesondere gilt für (hinreichend kleines)  $s \in \mathbb{K}$

$$\varphi(P + sv) = \varphi(P) + s(D\varphi)_P(v) + |s| \cdot \|v\| \cdot r(sv).$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \frac{\varphi(P + sv) - \varphi(P)}{s} &= \lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \frac{s(D\varphi)_P(v) + |s| \cdot \|v\| \cdot r(sv)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} \left( (D\varphi)_P(v) + \frac{|s|}{s} \|v\| \cdot r(sv) \right) \\ &= (D\varphi)_P(v), \end{aligned}$$

da  $\lim_{s \rightarrow 0} r(sv) = 0$  und der Ausdruck  $\frac{|s|}{s} \|v\|$  beschränkt ist.  $\square$

**Korollar 46.2.** *Es sei  $G \subseteq \mathbb{K}^n$  offen und  $\varphi: G \rightarrow \mathbb{K}^m$  eine in  $P \in G$  differenzierbare Abbildung. Dann ist  $\varphi$  in  $P$  partiell differenzierbar, und das totale Differential ist bezüglich der Standardbasis durch die Jacobi-Matrix*

$$\left( \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(P) \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$$

gegeben.

*Beweis.* Dies folgt aus Proposition 46.1, Lemma 44.3 und daraus, dass eine lineare Abbildung auf einer Basis festgelegt ist.  $\square$

Wir wollen umgekehrt ein handliches Kriterium für die totale Differenzierbarkeit angeben. Vor dem Beweis der nächsten Aussage erinnern wir an die

Mittelwertabschätzung für differenzierbare Kurven: Sei  $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}^n$  differenzierbar. Dann existiert ein  $c \in [a, b]$  mit

$$\|h(b) - h(a)\| \leq (b - a)\|h'(c)\|.$$

**Satz 46.3.** *Es sei  $G \subseteq \mathbb{K}^n$  offen und  $\varphi: G \rightarrow \mathbb{K}^m$  eine Abbildung. Es seien  $x_i, i = 1, \dots, n$ , die Koordinaten von  $\mathbb{K}^n$  und  $P \in G$  ein Punkt. Es sei angenommen, dass alle partiellen Ableitungen von  $\varphi$  in einer offenen Umgebung von  $P$  existieren und in  $P$  stetig sind. Dann ist  $\varphi$  in  $P$  (total) differenzierbar. Ist die Abbildung  $\varphi$  bezüglich der Standardbasis des  $\mathbb{K}^m$  durch die Koordinatenfunktionen  $f_1, \dots, f_m$  gegeben, so wird unter diesen Bedingungen das totale Differential in  $P$  durch die Jacobi-Matrix*

$$\left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P) \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$$

beschrieben.

*Beweis.* Indem wir  $G$  durch eine eventuell kleinere offene Umgebung von  $P$  ersetzen, können wir annehmen, dass auf  $G$  die Richtungsableitungen

$$Q \mapsto (D_i \varphi)(Q) := (D_{e_i} \varphi)(Q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(Q) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(Q) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$$

existieren und in  $P$  stetig sind. Daher ist nach Proposition 46.1 die lineare Abbildung

$$\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m, v = (v_1, \dots, v_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n v_i (D_i \varphi)(P),$$

der einzige Kandidat für das totale Differential. Daher müssen wir zeigen, dass diese lineare Abbildung die definierende Eigenschaft des totalen Differentials besitzt. Setze  $P_i := P + v_1 e_1 + \dots + v_i e_i$  (abhängig von  $v$ ). Dann gelten mit dem Ansatz

$$r(v) := \frac{\varphi(P + v) - \varphi(P) - \sum_{i=1}^n v_i (D_i \varphi)(P)}{\|v\|}$$

(für  $v$  hinreichend klein) die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|r(v)\| &= \frac{\|\varphi(P + v) - \varphi(P) - \sum_{i=1}^n v_i (D_i \varphi)(P)\|}{\|v\|} \\ &= \frac{\|\sum_{i=1}^n (\varphi(P_i) - \varphi(P_{i-1}) - v_i (D_i \varphi)(P))\|}{\|v\|} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{\|\varphi(P_i) - \varphi(P_{i-1}) - v_i (D_i \varphi)(P)\|}{\|v\|} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\|\varphi(P_{i-1} + v_i e_i) - \varphi(P_{i-1}) - v_i (D_i \varphi)(P)\|}{\|v\|}. \end{aligned}$$

Wir betrachten jeden Summanden einzeln. Für fixiertes  $i$  ist die Abbildung (die auf dem Einheitsintervall definiert ist)

$$h_i : s \mapsto \varphi(P_{i-1} + sv_i e_i) - sv_i(D_i(\varphi))(P)$$

differenzierbar (aufgrund der Existenz der partiellen Ableitungen auf  $G$ ) mit der Ableitung

$$s \mapsto v_i(D_i(\varphi))(P_{i-1} + sv_i e_i) - v_i(D_i(\varphi))(P).$$

Nach der Mittelwertabschätzung existiert eine reelle Zahl

$$0 \leq c_i = 1,$$

so dass (dies ist die Norm von  $h_i(1) - h_i(0)$ )

$$\begin{aligned} & \|\varphi(P_{i-1} + v_i e_i) - \varphi(P_{i-1}) - v_i(D_i(\varphi))(P)\| \\ & \leq \|v_i(D_i(\varphi))(P_{i-1} + c_i v_i e_i) - v_i(D_i(\varphi))(P)\| \\ & = |v_i| \cdot \|(D_i(\varphi))(P_{i-1} + c_i v_i e_i) - (D_i(\varphi))(P)\| \\ & \leq \|v\| \cdot \|(D_i(\varphi))(P_{i-1} + c_i v_i e_i) - (D_i(\varphi))(P)\| \end{aligned}$$

gilt. Aufsummieren liefert also, dass unser Ausdruck  $\|r(v)\|$  nach oben beschränkt ist durch

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \frac{\|v\| \cdot \|(D_i(\varphi))(P_{i-1} + c_i v_i e_i) - (D_i(\varphi))(P)\|}{\|v\|} \\ & \leq \sum_{i=1}^n \|(D_i(\varphi))(P_{i-1} + c_i v_i e_i) - (D_i(\varphi))(P)\|. \end{aligned}$$

Da die partiellen Ableitungen  $D_i(\varphi)$  stetig in  $P$  sind, wird die Summe rechts mit  $v$  beliebig klein, da dann  $P_{i-1} + c_i v_i e_i$  gegen  $P$  konvergiert. Also ist der Grenzwert für  $v \rightarrow 0$  gleich 0.  $\square$

**Korollar 46.4.** *Polynomfunktionen sind total differenzierbar.*

*Beweis.* Dies folgt aus Satz 46.3 und daraus, dass die partiellen Ableitungen von Polynomfunktionen wieder Polynomfunktionen und daher nach Satz 34.13 stetig sind.  $\square$

Für einen anderen Beweis siehe Aufgabe 45.7 und Aufgabe 45.6.

## 46.2. Extrema.

In den nächsten Vorlesungen wollen wir mit der Hilfe von Ableitungen verstehen, wann eine Funktion

$$G \longrightarrow \mathbb{R},$$

$G \subseteq \mathbb{R}^n$ , ein (lokales) Extremum, also ein Maximum oder ein Minimum in einem Punkt  $P \in G$  annimmt. Hier stellen wir die relevanten Definitionen zusammen und stellen einige typische Beispiele vor.

**Definition 46.5.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und

$$f: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass  $f$  in einem Punkt  $x \in M$  ein *lokales Maximum* besitzt, wenn es ein  $\epsilon > 0$  derart gibt, dass für alle  $x' \in M$  mit  $d(x, x') \leq \epsilon$  die Abschätzung

$$f(x) \geq f(x')$$

gilt. Man sagt, dass  $f$  in  $x \in M$  ein *lokales Minimum* besitzt, wenn es ein  $\epsilon > 0$  derart gibt, dass für alle  $x' \in M$  mit  $d(x, x') \leq \epsilon$  die Abschätzung

$$f(x) \leq f(x')$$

gilt.

**Definition 46.6.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und

$$f: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass  $f$  in einem Punkt  $x \in M$  ein *isoliertes lokales Maximum* besitzt, wenn es ein  $\epsilon > 0$  derart gibt, dass für alle  $x' \in M$  mit  $d(x, x') \leq \epsilon$  und  $x' \neq x$  die Abschätzung

$$f(x) > f(x')$$

gilt. Man sagt, dass  $f$  in  $x \in M$  ein *isoliertes lokales Minimum* besitzt, wenn es ein  $\epsilon > 0$  derart gibt, dass für alle  $x' \in M$  mit  $d(x, x') \leq \epsilon$  und  $x' \neq x$  die Abschätzung

$$f(x) < f(x')$$

gilt.

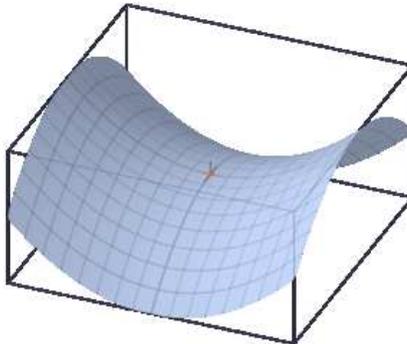
Ein *globales Maximum* liegt in  $x \in M$  vor, wenn  $f(x) \geq f(x')$  für alle  $x' \in M$  ist.

**Beispiel 46.7.** Die Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + y^2,$$

hat in  $P = (0, 0)$  den Wert 0 und überall sonst positive Werte, daher liegt in  $P$  ein (isoliertes) globales Minimum vor.

Wenn die Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  ein lokales Minimum im Punkt  $P \in M$  besitzt, so gilt dies auch für die Einschränkung von  $f$  auf jede Teilmenge  $N \subseteq M$ , die  $P$  enthält. Beispielsweise muss ein (lokales) Minimum einer Funktion der Ebene auch auf jeder Geraden durch diesen Punkt ein (lokales) Minimum sein.

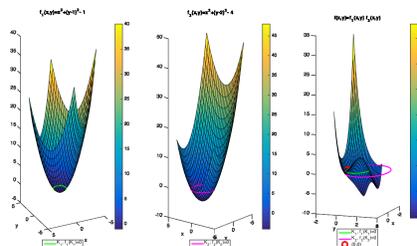


Dies heißt umgekehrt, dass wenn eine Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer Geraden  $L_1$  durch  $P$  ein isoliertes lokales Maximum und auf einer anderen Geraden  $L_2$  ein isoliertes lokales Minimum besitzt, dass dann kein lokales Extremum vorliegen kann. Solche Punkte nennt man *Sattelpunkt* oder *Passpunkt*, das Standardbeispiel ist das folgende.

**Beispiel 46.8.** Wir betrachten das Verhalten der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - y^2.$$

in  $P = (0, 0)$ . Die Einschränkung dieser Funktion auf die durch  $y = 0$  gegebene Gerade (also auf der  $x$ -Achse) ist die Funktion  $x \mapsto x^2$ , die in  $P$  ein (isoliertes) globales Minimum besitzt. Die Einschränkung dieser Funktion auf die durch  $x = 0$  gegebene Gerade (also auf der  $y$ -Achse) ist die Funktion  $y \mapsto -y^2$ , die in  $P$  ein (isoliertes) globales Maximum besitzt. Daher kann  $f$  in  $P$  kein Extremum besitzen. Auf den durch  $y = x$  und  $y = -x$  gegebenen Geraden ist die Funktion die Nullfunktion.



Es sei

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, die im Nullpunkt  $(0, 0)$  folgende Eigenschaft erfülle. Zu jeder Geraden  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  durch den Nullpunkt besitzt die auf  $G$  eingeschränkte Funktion ein lokales isoliertes Maximum. Jeder Wanderer, der durch das durch  $f$  gegebene Gebirge schnurstracks in eine bestimmte Richtung durch den Punkt läuft, wird also in diesem Punkt ein Gipfelerlebnis

haben. Folgt daraus, dass wirklich ein Gipfel vorliegt? Das folgende Beispiel zeigt, dass das nicht der Fall sein muss.

**Beispiel 46.9.** Wir betrachten im  $\mathbb{R}^2$  die beiden Kreise  $K_1$  und  $K_2$ , wobei  $K_1$  den Mittelpunkt  $(0, 1)$  und Radius 1 und  $K_2$  den Mittelpunkt  $(0, 2)$  und Radius 2 habe.  $K_1$  liegt innerhalb von  $K_2$ , und die beiden Kreise berühren sich in  $P = (0, 0)$ . Durch diese beiden Kreise wird die Ebene (neben den zwei Kreislinien selbst) in drei offene Gebiete aufgeteilt: Das Innere des Kreises  $K_1$  ( $= A$ ), die große offene Kreisscheibe ohne die kleine abgeschlossene Kreisscheibe ( $= B$ ) und das Äußere von  $K_2$  ( $= C$ ). Der innere Kreis  $K_1$  wird als Nullstelle der Funktion

$$f_1(x, y) = x^2 + (y - 1)^2 - 1$$

beschrieben. Im Innern von  $K_1$  ist diese Funktion negativ, auf  $K_1$  hat sie den Wert 0 und außerhalb davon hat sie positive Werte. Entsprechendes gilt für  $K_2$  und die Funktion  $f_2(x, y) = x^2 + (y - 2)^2 - 4$ . Wir setzen

$$\begin{aligned} f(x, y) &:= f_1(x, y) \cdot f_2(x, y) \\ &= (x^2 + (y - 1)^2 - 1) \cdot (x^2 + (y - 2)^2 - 4) \\ &= (x^2 + y^2 - 2y) \cdot (x^2 + y^2 - 4y) \\ &= x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 6y^3 - 6x^2y + 8y^2. \end{aligned}$$

Diese Funktion nimmt auf den beiden Kreisen den Wert 0 an, sie ist auf  $A$  positiv, auf  $B$  negativ und auf  $C$  wieder positiv.

Die Funktion  $f$  besitzt in  $P$  kein lokales Minimum, da sie dort den Wert 0 besitzt und da jede beliebig kleine Umgebung  $U(P, \epsilon)$  den Bereich  $B$  trifft, wo  $f$  negative Werte besitzt. Die Einschränkung der Funktion auf jede Gerade durch den Nullpunkt besitzt aber dort ein lokales Minimum. Sei dazu  $G$  eine solche Gerade. Wenn  $G$  die  $x$ -Achse ist, so verläuft diese Gerade (bis auf  $P$  selbst) in  $C$ , wo  $f$  nur positive Werte annimmt, so dass in  $P$  ein (sogar globales) Minimum vorliegt. Sei also  $G$  eine von der  $x$ -Achse verschiedene Gerade durch  $P$ . Die eine Hälfte der Geraden verläuft ganz in  $C$ , wo die Funktion positiv ist. Die andere Hälfte verläuft, ausgehend von  $P$ , zuerst in  $A$ , dann in  $B$  und schließlich wieder in  $C$ . Da die Funktion auf  $A$  positiv ist, kann man ein Teilintervall  $[-\delta, \delta]$  der Geraden derart wählen, dass dieses Teilstück (abgesehen von  $P$ ) nur in  $A$  und  $C$  verläuft. Auf diesem Teilintervall nimmt die Funktion in  $P$  den Wert 0 und sonst überall positive Werte an. Daher besitzt die eingeschränkte Funktion ein lokales Minimum. Das dabei zu wählende  $\delta$  hängt natürlich wesentlich von der Steigung der Geraden ab, es gibt kein gemeinsames  $\delta$  für alle Geraden.

## 46. ARBEITSBLATT

## 46.1. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 46.1.** Es sei  $\varphi: V \rightarrow W$  eine total differenzierbare Abbildung mit  $(D\varphi)_P = 0$  für alle  $P \in V$ . Zeige, dass  $\varphi$  konstant ist.

**Aufgabe 46.2.** a) Berechne das totale Differential der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2, (x, y) \longmapsto (xy - 2y^3 + 5, x^3 - xy^2 + y),$$

in jedem Punkt.

b) Was ist das totale Differential im Punkt  $(1, 2)$ ?

c) Berechne die Richtungsableitung in diesem Punkt in Richtung  $(4, -3)$ .

d) Berechne den Wert von  $\varphi$  in diesem Punkt.

**Aufgabe 46.3.** a) Berechne das totale Differential der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^2, (x, y, z) \longmapsto (xy - zy + 2z^2, \sin(x^2yz)),$$

in jedem Punkt.

b) Was ist das totale Differential im Punkt  $(1, -1, \pi)$ ?

c) Berechne die Richtungsableitung in diesem Punkt in Richtung  $(2, 0, 5)$ .

d) Berechne den Wert von  $\varphi$  in diesem Punkt.

**Aufgabe 46.4.** a) Berechne das totale Differential der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^3, (x, y) \longmapsto (x + y^2, xy, \exp x),$$

in jedem Punkt.

b) Was ist das totale Differential im Punkt  $(3, 2)$ ?

c) Berechne die Richtungsableitung in diesem Punkt in Richtung  $(-1, -7)$ .

d) Berechne den Wert von  $\varphi$  in diesem Punkt.

**Aufgabe 46.5.** Bestimme das totale Differential der Determinante

$$\det: \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}, M \longmapsto \det M,$$

für  $n = 2, 3$  an der Einheitsmatrix.

**Aufgabe 46.6.\***

Wie betrachten die komplexe Invertierung

$$f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto z^{-1}.$$

- (1) Bestimme die Ableitung  $f'(z)$  von  $f$ .
- (2) Beschreibe die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit den reellen Koordinaten  $x, y$  (bezüglich der reellen Basis 1 und  $i$  von  $\mathbb{C}$ ).

- (3) Bestimme das totale Differential zu  $f$  bezüglich der Basis 1 und  $i$  in einem beliebigen Punkt.
- (4) Beschreibe die Multiplikation mit  $f'(z)$  auf  $\mathbb{C}$  durch eine reelle Matrix bezüglich der reellen Basis 1 und  $i$ .

### Aufgabe 46.7.\*

Bestätige die Kettenregel für  $g \circ f$  für die beiden differenzierbaren Abbildungen

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t^3 - t, -t^2),$$

und

$$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy + x + y.$$

**Aufgabe 46.8.** Bestätige die Kettenregel anhand der beiden Abbildungen

$$\varphi: \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^3, (u, v) \longmapsto (u^2v^2, u + \sin v, v^3),$$

und

$$\psi: \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^2, (x, y, z) \longmapsto (x^2y - z^2, xy^2 + yz \exp x),$$

und ihrer Komposition  $\psi \circ \varphi$  in folgenden Schritten.

- (1) Berechne für einen beliebigen Punkt  $P \in \mathbb{K}^2$  das totale Differential  $(D\varphi)_P$  mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
- (2) Berechne für einen beliebigen Punkt  $Q \in \mathbb{K}^3$  das totale Differential  $(D\psi)_Q$  mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
- (3) Berechne explizit die Komposition  $\psi \circ \varphi: \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ .
- (4) Berechne direkt mit partiellen Ableitungen in einem Punkt  $P \in \mathbb{K}^2$  das totale Differential von  $\psi \circ \varphi: \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ .
- (5) Berechne das totale Differential von  $\psi \circ \varphi: \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$  in einem Punkt  $P \in \mathbb{K}^2$  mit Hilfe der Kettenregel und den Teilen (1) und (2).

**Aufgabe 46.9.** Es seien  $G \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offene Mengen, und  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $g: D \rightarrow \mathbb{R}^k$  Abbildungen derart, dass  $f(G) \subseteq D$  gilt. Es sei weiter angenommen, dass  $f$  in  $P \in G$  und  $g$  in  $f(P) \in D$  total differenzierbar ist. Zeige

$$\frac{\partial(g \circ f)_j}{\partial x_i}(P) = \left( \frac{\partial g_j}{\partial y_1}(f(P)), \dots, \frac{\partial g_j}{\partial y_m}(f(P)) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(P) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(P) \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 46.10.** Es seien  $G \subseteq \mathbb{K}^m$  und  $D \subseteq \mathbb{K}^n$  offene Mengen, und  $f: G \rightarrow \mathbb{K}^n$  und  $g: D \rightarrow \mathbb{K}^k$  Abbildungen derart, dass  $f(G) \subseteq D$  gilt. Es sei weiter angenommen, dass  $f$  und  $g$   $\ell$ -fach stetig differenzierbar sind. Zeige, dass auch  $g \circ f$   $\ell$ -fach stetig differenzierbar ist.

**Aufgabe 46.11.** Es seien

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

und

$$\psi: W \longrightarrow U$$

in  $P \in V$  bzw. in  $\varphi(P) \in W$  total differenzierbare Abbildungen. Es sei  $v \in V$  ein Vektor. Zeige mit der Kettenregel, dass

$$(D_v(\psi \circ \varphi))(P) = (D_{(D\varphi)_P(v)}(\psi))(\varphi(P))$$

gilt.

**Aufgabe 46.12.** Es seien  $G \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offene Mengen, und  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $g: D \rightarrow \mathbb{R}^k$  Abbildungen derart, dass  $f(G) \subseteq D$  gilt. Es sei weiter angenommen, dass  $f$  und  $g$  stetig differenzierbar sind. Zeige, dass auch  $g \circ f$  stetig differenzierbar ist.

**Aufgabe 46.13.** Man gebe ein Beispiel für partiell differenzierbare Funktionen  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  derart, dass  $g \circ f$  nicht partiell differenzierbar ist.

**Aufgabe 46.14.** Man gebe ein Beispiel für partiell differenzierbare Funktionen  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  derart, dass auch  $g \circ f$  partiell differenzierbar ist, dass aber

$$\text{Jak}(g \circ f)_P = \text{Jak}(g)_{f(P)} \circ \text{Jak}(f)_P$$

nicht gilt.

**Aufgabe 46.15.** Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass die Funktion

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xf(y),$$

genau dann im Punkt  $(0, 0)$  total differenzierbar ist, wenn  $f$  in 0 stetig ist.

**Aufgabe 46.16.** Es seien  $V$  und  $W$  euklidische Vektorräume,  $G \subseteq V$  offen und sei

$$\varphi: G \longrightarrow W$$

eine Abbildung. Zeige, dass  $\varphi$  genau dann stetig differenzierbar ist, wenn  $\varphi$  total differenzierbar ist und wenn die Abbildung

$$G \longrightarrow \text{Hom}(V, W), P \longmapsto (D\varphi)_P,$$

stetig ist.

**Aufgabe 46.17.** Es sei

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

differenzierbar im Nullpunkt und sei  $(h_m)_{m \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  mit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h_m = 0, \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{h_m}{\|h_m\|} = v \in \mathbb{R}^n, f(h_m) = f(h_k) \text{ für alle } m, k \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass  $v$  ein Eigenvektor von  $(Df)_0$  zum Eigenwert 0 ist.

**Aufgabe 46.18.\***

Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Zeige, dass  $f$  stetig ist.
- Zeige, dass die Einschränkung von  $f$  auf jede Gerade durch den Nullpunkt eine lineare Abbildung ist.
- Zeige, dass zu  $f$  im Nullpunkt in jede Richtung die Richtungsableitung existiert.
- Zeige, dass  $f$  im Nullpunkt nicht total differenzierbar ist.

**Aufgabe 46.19.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum,  $P \in M$  ein Punkt und es sei

$$f: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Es sei  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine streng wachsende Funktion. Zeige, dass  $f$  in  $P$  genau dann ein lokales Maximum besitzt, wenn  $h \circ f$  ein lokales Maximum in  $P$  besitzt.

**Aufgabe 46.20.** Es seien  $L$  und  $M$  metrische Räume und es sei

$$\varphi: L \longrightarrow M$$

eine stetige Abbildung. Es sei

$$\varphi(P) = Q$$

und es sei

$$f: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, die im Punkt  $Q \in M$  ein lokales Extremum besitze. Zeige, dass

$$f \circ \varphi$$

in  $P$  ein lokales Extremum besitzt.

**Aufgabe 46.21.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Zeige, dass eine von 0 verschiedene lineare Abbildung

$$f: V \longrightarrow \mathbb{R}$$

keine lokalen Extrema besitzt. Gilt dies auch für unendlichdimensionale Vektorräume? Braucht man dazu Differentialrechnung?

**Aufgabe 46.22.\***

Es sei  $f$  ein Polynom in zwei Variablen der Bauart

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \sum_{(r_1, r_2) \in \mathbb{N}^2, r_1 + r_2 \geq 3} a_{(r_1, r_2)} x^{r_1} y^{r_2}.$$

Zeige ohne Differentialrechnung, dass  $f$  im Nullpunkt ein isoliertes lokales Minimum besitzt. Bestimme in Abhängigkeit der Koeffizienten  $a_{(r_1, r_2)}$  ein  $\epsilon > 0$  derart, dass die Einschränkung von  $f$  auf  $U(0, \epsilon)$  außerhalb des Nullpunktes echt positiv ist.

## 46.2. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 46.23.** (5 Punkte)

Wir wollen die Kettenregel anhand der beiden Abbildungen

$$\varphi: \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^3, (u, v) \longmapsto (uv, u - v, v^2),$$

und

$$\psi: \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^2, (x, y, z) \longmapsto (xyz^2, y \exp(xz)),$$

und ihrer Komposition  $\psi \circ \varphi$  veranschaulichen.

- (1) Berechne für einen beliebigen Punkt  $P \in \mathbb{K}^2$  das totale Differential  $(D\varphi)_P$  mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
- (2) Berechne für einen beliebigen Punkt  $Q \in \mathbb{K}^3$  das totale Differential  $(D\psi)_Q$  mit Hilfe von partiellen Ableitungen.

- (3) Berechne explizit die Komposition  $\psi \circ \varphi: \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ .
- (4) Berechne direkt mit partiellen Ableitungen in einem Punkt  $P \in \mathbb{K}^2$  das totale Differential von  $\psi \circ \varphi: \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ .
- (5) Berechne das totale Differential von  $\psi \circ \varphi: \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$  in einem Punkt  $P \in \mathbb{K}^2$  mit Hilfe der Kettenregel und den Teilen (1) und (2).

**Aufgabe 46.24.** (8 Punkte)

Wir betrachten die Funktionen

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{h} \mathbb{R}^2$$

mit

$$f(u, v) = (u^2, uv, u - v^2),$$

$$g(x, y, z) = (x + y^2 - z, x^2yz),$$

und

$$h(r, s) = (r^2s, s^2).$$

Berechne das totale Differential von  $h \circ g \circ f$  in einem beliebigen Punkt  $P = (u, v)$  auf vier verschiedene Arten.

**Aufgabe 46.25.** (5 Punkte)

Untersuche die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{bei } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{bei } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

auf partielle Ableitungen und totale Differenzierbarkeit.

**Aufgabe 46.26.** (4 Punkte)

Es sei

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$$

eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass dann auch die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, P \longmapsto \|f(P)\|,$$

differenzierbar ist und bestimme das totale Differential davon.

**Aufgabe 46.27.** (10 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine differenzierbare Kurve

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

und eine stetige Funktion,

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

für die die Richtungsableitung in jede Richtung existiert, derart, dass die Verknüpfung

$$f \circ \varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

nicht differenzierbar ist.

## 47. VORLESUNG - DER GRADIENT

## 47.1. Linearformen und Bilinearformen.

Zu  $G \subseteq V$  offen und einer reellwertigen Funktion

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

interessieren wir uns wie schon bei einem eindimensionalen Definitionsbereich für die Extrema, also Maxima und Minima, der Funktion, und inwiefern man dies anhand der Ableitungen (falls diese existieren) erkennen kann. Wenn eine solche Funktion total differenzierbar ist, so ist das totale Differential in einem Punkt eine lineare Abbildung von  $V$  nach  $\mathbb{K}$ . Für solche linearen Abbildungen gibt es einen eigenen Namen.

**Definition 47.1.** Es sei  $K$  ein Körper und sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Eine lineare Abbildung

$$V \longrightarrow K$$

heißt eine *Linearform* auf  $V$ .

Das totale Differential  $(Df)_P$  zu  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  ist also eine Linearform.

**Definition 47.2.** Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Dann heißt der Homomorphismenraum

$$V^* = \text{Hom}_K(V, K)$$

der *Dualraum* zu  $V$ .

Wenn  $G \subseteq \mathbb{K}^n$  ist, so bilden die partiellen Ableitungen in einem Punkt  $P \in G$  eine Matrix mit einer einzigen Zeile, nämlich

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right),$$

die bei stetigen partiellen Ableitungen das totale Differential repräsentiert. Eine solche Matrix kann man aber ebenso gut als ein  $n$ -Tupel in  $\mathbb{K}$  und damit als einen Vektor über  $\mathbb{K}^n$  auffassen. Dieser Zusammenhang zwischen

Vektoren und Linearformen beruht auf dem Standardskalarprodukt des  $\mathbb{K}^n$ , und lässt sich konzeptioneller mit Hilfe von Bilinearformen erfassen.

**Definition 47.3.** Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Eine Abbildung

$$V \times V \longrightarrow K, (v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

heißt *Bilinearform*, wenn für alle  $v \in V$  die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow K, w \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

und für alle  $w \in V$  die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow K, v \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

$K$ -linear sind.

Eine wichtige Eigenschaft von Bilinearformen, die Skalarprodukte erfüllen, wird in der nächsten Definition formuliert.

**Definition 47.4.** Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Eine Bilinearform

$$V \times V \longrightarrow K, (v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

heißt *nicht ausgeartet*, wenn für alle  $v \in V, v \neq 0$ , die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow K, w \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

und für alle  $w \in V, w \neq 0$ , die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow K, v \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

nicht die Nullabbildung sind.

In dieser Vorlesung werden wir für Vektorräume, auf denen eine nicht-ausgeartete Bilinearform gegeben ist, eine bijektive Beziehung zwischen Vektoren und Linearformen beweisen und damit einen Zusammenhang zwischen dem totalen Differential zu einer Funktion in einem Punkt und einem Vektor, dem sogenannten Gradienten der Funktion in diesem Punkt, herstellen.

## 47.2. Der Gradient.

**Lemma 47.5.** *Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum, der mit einer Bilinearform  $\langle -, - \rangle$  versehen sei. Dann gelten folgende Aussagen*

- (1) *Für jeden Vektor  $u \in V$  sind die Zuordnungen*

$$V \longrightarrow K, v \longmapsto \langle u, v \rangle,$$

*und*

$$V \longrightarrow K, v \longmapsto \langle v, u \rangle,$$

*$K$ -linear.*

(2) Die Zuordnung

$$V \longrightarrow V^*, u \longmapsto \langle u, - \rangle,$$

ist  $K$ -linear.

(3) Wenn  $\langle -, - \rangle$  nicht ausgeartet ist, so ist die Zuordnung in (2) injektiv. Ist  $V$  zusätzlich endlichdimensional, so ist diese Zuordnung bijektiv.

*Beweis.* (1) folgt unmittelbar aus der Bilinearität. (2). Seien  $u_1, u_2 \in V$  und  $a_1, a_2 \in K$ . Dann ist für jeden Vektor  $v \in V$

$$\langle a_1 u_1 + a_2 u_2, v \rangle = a_1 \langle u_1, v \rangle + a_2 \langle u_2, v \rangle,$$

und dies bedeutet gerade die Linearität der Zuordnung. (3). Da die Zuordnung nach (2) linear ist, müssen wir zeigen, dass der Kern davon trivial ist. Sei also  $u \in V$  so, dass  $\langle u, - \rangle$  die Nullabbildung ist. D.h.  $\langle u, v \rangle = 0$  für alle  $v \in V$ . Dann muss aber nach der Definition von nicht ausgeartet  $u = 0$  sein. Wenn  $V$  endliche Dimension hat, so liegt eine injektive lineare Abbildung zwischen Vektorräumen der gleichen Dimension vor, und eine solche ist nach Korollar 11.9 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)) bijektiv.  $\square$

Wenn es also in einem endlichdimensionalen Vektorraum eine nicht ausgeartete Bilinearform gibt, beispielsweise ein Skalarprodukt, so gibt es zu jeder Linearform einen eindeutig bestimmten Vektor, mit dem diese Linearform beschrieben werden kann. Wendet man dies auf die Linearform an, die durch das totale Differential zu einer differenzierbaren Funktion  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben ist, so gelangt man zum Begriff des Gradienten.

**Definition 47.6.** Es sei  $(V, \langle -, - \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum,  $G \subseteq V$  offen und

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in  $P \in G$  differenzierbare Funktion. Dann nennt man den eindeutig bestimmten Vektor  $w \in V$  mit

$$(Df)_P(v) = \langle w, v \rangle$$

für alle  $v \in V$  den *Gradienten* von  $f$  in  $P$ . Er wird mit

$$\text{Grad } f(P)$$

bezeichnet.

Man beachte, dass wir durchgehend die endlichdimensionalen Vektorräume mit einem Skalarprodukt versehen, um topologische Grundbegriffe wie Konvergenz und Stetigkeit zur Verfügung zu haben, dass diese Begriffe aber nicht von dem gewählten Skalarprodukt abhängen. Dem entgegen hängt aber der Gradient von dem gewählten Skalarprodukt ab.

Bei  $V = \mathbb{R}^n$ , versehen mit dem Standardskalarprodukt, ist der Gradient einfach gleich

$$\text{Grad } f(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung 47.7.** Zu einer differenzierbaren Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lässt sich der Gradient (bezüglich des Standardskalarproduktes) einfach durch partielles Differenzieren berechnen. Es wäre aber eine künstliche Einschränkung, nur diese Situation zu betrachten. Um dies zu illustrieren sei beispielsweise

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion und  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  eine Ebene, die etwa als Lösungsmenge der linearen Gleichung  $5x - 4y + 9z = 0$  gegeben sei. Dann induziert das Standardskalarprodukt des  $\mathbb{R}^3$  durch Einschränkung ein Skalarprodukt auf  $E$ . Diese Ebene ist zwar isomorph zu  $\mathbb{R}^2$ , es ergibt aber keinen Sinn, das eingeschränkte Skalarprodukt als Standardskalarprodukt anzusprechen. Der Gradient  $G$  zu  $f$  in einem Punkt  $P \in \mathbb{R}^3$  lässt sich direkt mit den partiellen Ableitungen zu den drei Raumkoordinaten berechnen. Bei  $P \in E$  wird im Allgemeinen der Gradient *nicht* auf  $E$  liegen. Die eingeschränkte Funktion

$$f|_E: E \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist aber ebenfalls differenzierbar und besitzt daher einen Gradienten  $\tilde{G}$ , der auf  $E$  liegt, und dieser lässt sich nicht über partielle Ableitungen berechnen, da es auf  $E$  keine Standardbasis gibt. Übrigens ist  $\tilde{G}$  die orthogonale Projektion von  $G$  auf  $E$ .

**Satz 47.8.** *Es sei  $(V, \langle -, - \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum, sei  $G \subseteq V$  offen und sei*

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine in  $P \in G$  differenzierbare Funktion. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Für jeden Vektor  $v \in V$  ist*

$$|(Df)_P(v)| \leq \|v\| \cdot \|\text{Grad } f(P)\|.$$

- (2) *Dabei gilt Gleichheit genau dann, wenn  $v$  linear abhängig zum Gradienten ist.*  
 (3) *Sei  $\text{Grad } f(P) \neq 0$ . Unter allen Vektoren  $v \in V$  mit  $\|v\| = 1$  ist die Richtungsableitung in Richtung des normierten Gradienten maximal, und zwar gleich der Norm des Gradienten.*

*Beweis.* (1) folgt wegen

$$(Df)_P(v) = \langle v, \text{Grad } f(P) \rangle$$

direkt aus der Abschätzung von Cauchy-Schwarz. (2) ergibt sich aus den Zusätzen zur Abschätzung von Cauchy-Schwarz, siehe Aufgabe 32.13. (3). Aus (1) und (2) folgt, dass

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \text{Grad } f(P), \pm \frac{\text{Grad } f(P)}{\|\text{Grad } f(P)\|} \right\rangle \right| &= \left| (Df)_P \left( \pm \frac{\text{Grad } f(P)}{\|\text{Grad } f(P)\|} \right) \right| \\ &= \|\text{Grad } f(P)\| \end{aligned}$$

gilt, und dass diese beiden Vektoren die einzigen Vektoren der Norm 1 sind, für die diese Gleichung gilt. Wenn man links die Betragstriche weglässt, so gilt die Gleichheit für  $\frac{\text{Grad } f(P)}{\|\text{Grad } f(P)\|}$  nach wie vor, da das Skalarprodukt positiv definit ist.  $\square$

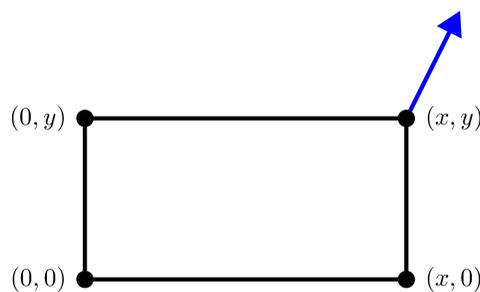
Der Gradient gibt demnach die Richtung an, in die die Funktion den stärksten Anstieg hat. In die entgegengesetzte Richtung liegt entsprechend der steilste Abstieg vor.

**Beispiel 47.9.** Ein Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  legt das Rechteck mit den Eckpunkten  $(0, 0)$ ,  $(x, 0)$ ,  $(0, y)$ ,  $(x, y)$  fest. Wenn der Punkt  $(x, y)$  bewegt wird, bewegt sich das zugehörige Rechteck mit.

In welche Richtung muss der Punkt  $(x, y)$  bewegt werden, damit der Umfang des Rechteckes möglichst schnell wächst? Der Umfang des Rechteckes ist durch

$$U(x, y) = 2x + 2y$$

gegeben, nach Satz 47.8 wächst diese Funktion am schnellsten in Richtung des Gradienten, also in Richtung  $(2, 2)$ , was insbesondere unabhängig vom gegebenen Eckpunkt ist.



In welche Richtung muss der Punkt  $(x, y)$  bewegt werden, damit der Flächeninhalt des Rechteckes möglichst schnell wächst? Der Flächeninhalt des Rechteckes ist durch

$$F(x, y) = xy$$

gegeben, nach Satz 47.8 wächst diese Funktion am schnellsten in Richtung des Gradienten, also in Richtung  $(y, x)$ .

### 47.3. Gradient und Niveaumengen.

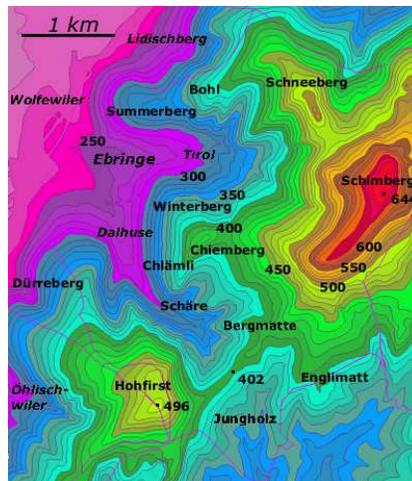
**Definition 47.10.** Zu einer Funktion

$$f: G \longrightarrow \mathbb{K},$$

wobei  $G$  ein metrischer Raum sei, nennt man zu  $c \in \mathbb{K}$  die Menge

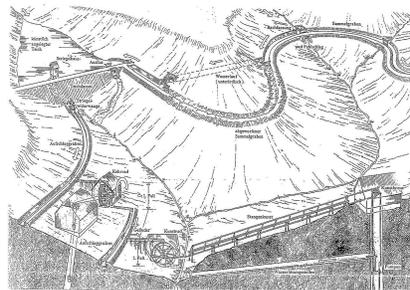
$$N_c = \{x \in G \mid f(x) = c\}$$

die *Niveaumenge* zu  $f$  zum Wert  $c$ .



In einer topographischen Karte wird ein Gebirge durch seine Niveaulinien (Höhenlinien) repräsentiert.

Wir werden Niveaumengen (ein anderes Wort ist *Faser* oder bei  $V = \mathbb{R}^2$  auch *Höhenlinie*) später systematischer untersuchen. Die folgende Aussage bedeutet, dass der Gradient stets senkrecht auf den Niveaumengen steht. Da ein Bach stets dem steilsten Abstieg folgt, verläuft ein Bach stets senkrecht zu den Höhenlinien.



Eine Panoramakarte des Oberharzener Wasserregals. Hier verlaufen die Bäche senkrecht zum Wassergraben, der ja auch ein Bach ist. Widerspricht dies Lemma 47.11?

**Lemma 47.11.** *Es sei  $(V, \langle -, - \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum,  $G \subseteq V$  offen und*

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine in  $P \in G$  differenzierbare Funktion. Es sei*

$$h: I \longrightarrow G$$

*eine differenzierbare Kurve mit  $h(0) = P$ , die ganz innerhalb einer Niveaumenge von  $f$  verläuft. Dann steht der Gradient zu  $f$  senkrecht auf  $h'(0)$ .*

*Beweis.* Es sei  $N$  die Niveaumenge zu  $c \in \mathbb{R}$ , in der die Kurve  $h$  verlaufe. Dann ist die Hintereinanderschaltung  $f \circ h$  konstant gleich  $c$  und daher ist unter Verwendung der Kettenregel

$$0 = (D(f \circ h))_0 = (Df)_P \circ (Dh)_0.$$

Daher liegt

$$(Dh)_0(1) = h'(0)$$

im Kern von  $(Df)_P$ , und das bedeutet, dass  $h'(0)$  senkrecht auf dem Gradienten steht.  $\square$

#### 47.4. Lokale Extrema von Funktionen in mehreren Variablen.

Wir wollen mit den Mitteln der Differentialrechnung Kriterien erarbeiten, in welchen Punkten eine Funktion

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum annimmt. Wenn man sich den Graphen einer solchen Funktion als ein Gebirge über der Grundmenge  $G$  vorstellt, so geht es also um die Gipfel und die Senken des Gebirges. Der folgende Satz liefert ein notwendiges Kriterium für die Existenz eines lokalen Extremums, das das entsprechende Kriterium (Satz 19.1) in einer Variablen verallgemeinert.

**Satz 47.12.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge. Es sei*

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine Funktion, die im Punkt  $P \in G$  ein lokales Extremum besitzt. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Wenn  $f$  in  $P$  in Richtung  $v \in V$  differenzierbar ist, so ist*

$$(D_v f)(P) = 0.$$

- (2) *Wenn  $f$  in  $P$  total differenzierbar ist, so verschwindet das totale Differential, also*

$$(Df)_P = 0.$$

*Beweis.* (1) Zu  $v \in V$  betrachten wir die Funktion

$$h: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto h(t) = f(P + tv),$$

wobei  $I$  ein geeignetes reelles Intervall ist. Da die Funktion  $f$  in  $P$  ein lokales Extremum besitzt, besitzt die Funktion  $h$  in  $t = 0$  ebenfalls ein lokales Extremum. Nach Voraussetzung ist  $h$  differenzierbar und nach Satz 19.1 ist  $h'(0) = 0$ . Diese Ableitung stimmt aber mit der Richtungsableitung überein, also ist

$$(D_v f)(P) = h'(0) = 0.$$

(2) folgt aus (1) aufgrund von Proposition 46.1. □

Ein lokales Extremum kann also nur in einem sogenannten kritischen Punkt einer Funktion auftreten.

**Definition 47.13.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $G \subseteq V$  offen und

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Dann heißt  $P \in G$  ein *kritischer Punkt* von  $f$  (oder ein *stationärer Punkt*), wenn

$$(Df)_P = 0$$

ist. Andernfalls spricht man von einem *regulären Punkt*.

Bei einer differenzierbaren Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist  $P$  genau dann ein kritischer Punkt, wenn sämtliche partiellen Ableitungen von  $f$  in  $P$  gleich 0 sind.

## 47. ARBEITSBLATT

### 47.1. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 47.1.** Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum von endlicher Dimension. Zeige, dass der Dualraum  $V^*$  die gleiche Dimension wie  $V$  besitzt.

**Aufgabe 47.2.** Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum mit Basis  $\mathbf{v} = v_1, \dots, v_n$ . Es sei

$$V^* := \text{Hom}_K(V, K)$$

der Dualraum zu  $V$ . Zeige, dass auf  $V^*$  die Koordinatenfunktionen  $v_1^*, \dots, v_n^*$ , die durch

$$v_j^*(v_k) = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = k, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

definiert sind, eine Basis von  $V^*$  bilden.

**Aufgabe 47.3.** Betrachte die Linearform

$$L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x + 3y - 4z.$$

- (1) Bestimme den Vektor  $u \in \mathbb{R}^3$  mit der Eigenschaft

$$\langle u, v \rangle = L(v) \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^3,$$

wobei  $\langle -, - \rangle$  das Standardskalarprodukt bezeichnet.

- (2) Es sei

$$E = \{(x, y, z) \mid 3x - 2y - 5z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

und es sei  $\varphi = L|_E$  die Einschränkung von  $L$  auf  $E$ . Bestimme den Vektor  $w \in E$  mit der Eigenschaft

$$\langle w, v \rangle = \varphi(v) \text{ für alle } v \in E,$$

wobei  $\langle -, - \rangle$  die Einschränkung des Standardskalarprodukts auf  $E$  bezeichnet.

**Aufgabe 47.4.** Zeige, dass ein Skalarprodukt eine nicht-ausgeartete Bilinearform ist.

**Aufgabe 47.5.** Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum, der mit dem induzierten Skalarprodukt versehen sei. Es sei

$$f: V \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Linearform und  $v \in V$  der zugehörige Gradient im Sinne von Lemma 47.5. Zeige, dass der Gradient  $u \in U$  zur Einschränkung  $f|_U$  die orthogonale Projektion von  $v$  auf  $U$  ist.

**Aufgabe 47.6.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Zeige, dass eine von 0 verschiedene lineare Abbildung

$$f: V \longrightarrow \mathbb{R}$$

keine lokalen Extrema besitzt. Gilt dies auch für unendlichdimensionale Vektorräume? Braucht man dazu Differentialrechnung?

**Aufgabe 47.7.** Berechne den Gradienten der Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x^2y - z^3xe^{xyz},$$

in jedem Punkt  $P \in \mathbb{R}^3$ .

**Aufgabe 47.8.** Berechne den Gradienten der Funktion

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto \frac{xyz - z^2}{\ln(xy) + z^2},$$

in jedem Punkt  $P \in G$  mit  $G = \mathbb{R}_{>1} \times \mathbb{R}_{>1} \times \mathbb{R}$

**Aufgabe 47.9.** Es sei  $(V, \langle -, - \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum,  $G \subseteq V$  eine offene Menge,  $P \in G$  ein Punkt und

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in  $P$  differenzierbare Funktion. Zeige, dass  $f$  und  $(Df)_P$  im Punkt  $P$  den gleichen Gradienten besitzen.

**Aufgabe 47.10.\***

Wir betrachten Dreiecke mit den beiden fixierten Eckpunkten  $(-1, 0)$  und  $(1, 0)$  und dem variablen Eckpunkt  $(x, y)$ .

- (1) Erstelle eine Formel für den Flächeninhalt des Dreieckes mit den Eckpunkten  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(x, y)$ .
- (2) Erstelle eine Formel für den Umfang des Dreieckes mit den Eckpunkten  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(x, y)$ .
- (3) In welche Richtung muss man den dritten Punkt  $(x, y)$  bewegen, damit der Flächeninhalt möglichst schnell wächst?
- (4) In welche Richtung muss man den dritten Punkt  $(x, y)$  bewegen, damit der Umfang möglichst schnell wächst?

**Aufgabe 47.11.\***

Wir betrachten ein Ballspiel, bei dem das Tor durch die Eckpfosten  $(-1, 0)$  und  $(1, 0)$  gegeben ist. Der Ball (bzw. der ballführende Spieler) befindet sich in der variablen Position  $(x, y)$ . Die Wahrscheinlichkeit, von einer bestimmten Position aus ein Tor zu erzielen, hänge direkt vom Winkel (Torschusswinkel) ab, der das Dreieck  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(x, y)$  im Punkt  $(x, y)$  besitzt (man denke an die Situation, wo der Spieler allein vor dem leeren Tor steht und es allein auf die Zielgenauigkeit ankommt).

- (1) Erstelle eine Formel für den Torschusswinkel in Abhängigkeit von der Ballposition  $(x, y)$ .
- (2) Skizziere die Menge der Punkte, für die der Toreinschusswinkel gleich 90 Grad ist.
- (3) In welche Richtung muss der Ball bewegt werden, damit der Torschusswinkel möglichst schnell wächst?

**Aufgabe 47.12.** Es sei  $(V, \langle -, - \rangle)$  ein euklidischer Vektorraum,  $G \subseteq V$  eine offene Menge,  $P \in G$  ein Punkt und

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in  $P$  differenzierbare Funktion. Zeige, dass ein Vektor  $v \in V$  genau dann zum Kern von  $(Df)_P$  gehört, wenn er orthogonal zum Gradienten  $\text{Grad } f(P)$  ist.

**Aufgabe 47.13.** Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + y^2.$$

**Aufgabe 47.14.\***

Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy^2 - x.$$

**Aufgabe 47.15.** Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2y - y^2 + x.$$

**Aufgabe 47.16.** Es seien  $L$  und  $M$  Mengen und  $L \times M$  ihre Produktmenge. Beschreibe die Faser der Projektion

$$L \times M \longrightarrow M, (x, y) \longmapsto y,$$

über einem Punkt  $y \in M$ . Kann die Faser leer sein?

**Aufgabe 47.17.** Seien  $L_1, \dots, L_n$  und  $M_1, \dots, M_n$  Mengen und seien

$$\varphi_i: L_i \longrightarrow M_i$$

Abbildungen. Zu einem Punkt  $P_i \in M_i$  sei  $F_i \subseteq L_i$  die Faser von  $\varphi_i$  über  $P_i$ . Zeige, dass die Faser der Produktabbildung  $\varphi = \varphi_1 \times \dots \times \varphi_n$  über  $P = (P_1, \dots, P_n)$  gleich  $F_1 \times \dots \times F_n$  ist.

## 47.2. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 47.18.** (4 Punkte)

Berechne den Anstieg der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2y - x + y^3,$$

im Punkt  $P = (1, 1)$  in Richtung des Winkels  $\alpha \in [0, 2\pi]$ . Für welchen Winkel ist der Anstieg maximal?

**Aufgabe 47.19.** (5 Punkte)

Betrachte die Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x + \sin(y) - xz.$$

- (1) Bestimme den Gradienten  $G$  von  $f$  im Punkt  $P = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$  bezüglich des Standardskalarprodukts  $\langle -, - \rangle$ .

(2) Es sei

$$E = \{(x, y, z) \mid 2x - y + 3z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

und es sei  $g = f|_E$  die Einschränkung von  $f$  auf  $E$ . Bestimme den Gradienten  $\tilde{G}$  von  $g$  bezüglich der Einschränkung des Standardskalarprodukts auf  $E$ .

(3) Zeige, dass  $\tilde{G}$  die orthogonale Projektion von  $G$  auf  $E$  ist.

**Aufgabe 47.20.** (4 Punkte)

Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy^3 - xy + \sin y.$$

**Aufgabe 47.21.** (5 Punkte)

Bestimme die kritischen Punkte zur Funktion

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 6y^3 - 6x^2y + 8y^2$$

aus Beispiel 46.9.

## 48. VORLESUNG - BILINEARFORMEN

### 48.1. Die Hesse-Form.

Wir sind natürlich auch an hinreichenden Kriterien für das Vorliegen von lokalen Extrema interessiert. Wie schon im eindimensionalen Fall muss man sich die zweiten Ableitungen anschauen, wobei die Situation natürlich dadurch wesentlich verkompliziert wird, dass es zu je zwei Richtungsvektoren  $v$  und  $w$  eine zweite Richtungsableitung  $D_{vw} = D_v D_w$  gibt. Die zweite Richtungsableitung wird dadurch handhabbar, dass man sie in die sogenannte Hesse-Form bzw. Hesse-Matrix zusammenfasst. Als solche ist sie eine symmetrische Bilinearform, die mit Methoden der linearen Algebra analysiert werden kann. Diese Methoden werden wir im Folgenden entwickeln und insbesondere auf die Hesse-Form anwenden, um schließlich hinreichende Kriterien für die Existenz von lokalen Extrema zu erhalten.

**Definition 48.1.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $G \subseteq V$  eine offene Menge und

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zu  $P \in G$  heißt die Abbildung

$$\text{Hess}_P f: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, (u, v) \longmapsto D_u D_v f(P),$$

die *Hesse-Form* im Punkt  $P \in G$ .

**Definition 48.2.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $G \subseteq V$  eine offene Menge und

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Es sei eine Basis  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , von  $V$  gegeben mit den zugehörigen Richtungsableitungen  $D_i := D_{v_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Zu  $P \in G$  heißt dann die Matrix

$$\begin{pmatrix} D_1 D_1 f(P) & \cdots & D_1 D_n f(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n D_1 f(P) & \cdots & D_n D_n f(P) \end{pmatrix}$$

die *Hesse-Matrix* zu  $f$  im Punkt  $P$  bezüglich der gegebenen Basis.

**Definition 48.3.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine Bilinearform auf  $V$ . Die Bilinearform heißt *symmetrisch*, wenn

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$$

für alle  $v, w \in V$  gilt.

**Lemma 48.4.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $G \subseteq V$  eine offene Menge und*

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zu  $P \in G$  ist die Hesse-Form eine symmetrische Bilinearform.*

*Beweis.* Die Symmetrie folgt aus dem Satz von Schwarz. Seien  $u, v \in V$  Vektoren und

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2.$$

Dann gelten unter Verwendung von Satz 46.3, Proposition 46.1 und Lemma 43.6 die Gleichheiten

$$\begin{aligned} D_u(D_v f(P)) &= D_u((Df)_P(v)) \\ &= D_u((Df)_P(a_1 v_1 + a_2 v_2)) \\ &= D_u(a_1 (Df)_P(v_1) + a_2 (Df)_P(v_2)) \\ &= a_1 D_u(D_{v_1} f(P)) + a_2 D_u(D_{v_2} f(P)). \end{aligned}$$

□

## 48.2. Eigenschaften von Bilinearformen.

**Definition 48.5.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine Bilinearform auf  $V$ . Es sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$ . Dann heißt die  $n \times n$ -Matrix

$$\langle v_i, v_j \rangle_{1 \leq i, j \leq n}$$

die *Gramsche Matrix* von  $\langle -, - \rangle$  bezüglich dieser Basis.

Die Hesse-Matrix ist beispielsweise die Gramsche Matrix der Hesse-Form bezüglich der Standardbasis im  $\mathbb{R}^n$ .

**Lemma 48.6.** *Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine Bilinearform auf  $V$ . Es seien  $\mathbf{v} = v_1, \dots, v_n$  und  $\mathbf{w} = w_1, \dots, w_n$  zwei Basen von  $V$  und es seien  $G$  bzw.  $H$  die Gramschen Matrizen von  $\langle -, - \rangle$  bezüglich dieser Basen. Zwischen den Basiselementen gelte die Beziehungen*

$$w_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i,$$

die wir durch die Übergangsmatrix  $A = (a_{ij})_{i,j}$  ausdrücken. Dann besteht zwischen den Gramschen Matrizen die Beziehung

$$H = A^{\text{tr}} G A.$$

*Beweis.* Es ist

$$\begin{aligned} \langle w_r, w_s \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n a_{ir} v_i, \sum_{k=1}^n a_{ks} v_k \right\rangle \\ &= \sum_{1 \leq i, k \leq n} a_{ir} a_{ks} \langle v_i, v_k \rangle \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ir} \left( \sum_{1 \leq k \leq n} a_{ks} \langle v_i, v_k \rangle \right) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ir} (G \circ A)_{is} \\ &= (A^{\text{tr}} \circ (G \circ A))_{rs}. \end{aligned}$$

□

**Definition 48.7.** Es sei  $V$  ein reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform  $\langle -, - \rangle$ . Diese Bilinearform heißt

- (1) *positiv definit*, wenn  $\langle v, v \rangle > 0$  für alle  $v \in V$ ,  $v \neq 0$  ist.
- (2) *negativ definit*, wenn  $\langle v, v \rangle < 0$  für alle  $v \in V$ ,  $v \neq 0$  ist.
- (3) *positiv semidefinit*, wenn  $\langle v, v \rangle \geq 0$  für alle  $v \in V$  ist.
- (4) *negativ semidefinit*, wenn  $\langle v, v \rangle \leq 0$  für alle  $v \in V$  ist.
- (5) *indefinit*, wenn  $\langle -, - \rangle$  weder positiv semidefinit noch negativ semidefinit ist.

Positiv definite symmetrische Bilinearformen nennt man auch Skalarprodukte. Eine indefinite Form liegt vor, wenn es Vektoren  $v$  und  $w$  mit  $\langle v, v \rangle > 0$  und  $\langle w, w \rangle < 0$  gibt.

Eine Bilinearform auf  $V$  kann man auf einen Untervektorraum  $U \subseteq V$  einschränken, wodurch sich eine Bilinearform auf  $U$  ergibt. Wenn die ursprüngliche Form positiv definit ist, so überträgt sich dies auf die Einschränkung. Allerdings kann eine indefinite Form eingeschränkt auf gewisse Unterräume positiv definit werden und auf andere negativ definit. Dies führt zu folgender Definition.

**Definition 48.8.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform  $\langle -, - \rangle$ . Man sagt, dass eine solche Bilinearform den *Typ*

$$(p, q)$$

besitzt, wobei

$$p := \max(\dim_{\mathbb{R}}(U), U \subseteq V, \langle -, - \rangle|_U \text{ positiv definit})$$

und

$$q := \max(\dim_{\mathbb{R}}(U), U \subseteq V, \langle -, - \rangle|_U \text{ negativ definit})$$

ist.

**Beispiel 48.9.** Es seien  $p, q, n$  natürliche Zahlen mit  $p + q \leq n$ . Wir betrachten auf dem  $\mathbb{R}^n$  die Bilinearform  $\langle -, - \rangle$ , die durch

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \cdots - x_{p+q} y_{p+q}$$

gegeben ist. Sie hat den Typ  $(p, q)$ , und zwar ist die Einschränkung auf den Unterraum  $\mathbb{R}e_1 + \cdots + \mathbb{R}e_p$  positiv definit und die Einschränkung auf den Unterraum  $\mathbb{R}e_{p+1} + \cdots + \mathbb{R}e_{p+q}$  negativ definit.

Bei einem Skalarprodukt auf einem  $n$ -dimensionalen reellen Vektorraum ist der Typ  $(n, 0)$ . Wie für Skalarprodukte nennt man Vektoren  $v, w \in V$  *orthogonal* bezüglich einer Bilinearform, wenn  $\langle v, w \rangle = 0$  ist, und ähnlich wie im Fall eines Skalarproduktes kann man zeigen, dass es Orthogonalbasen gibt.



James Joseph Sylvester (1814-1897)

Die folgende Aussage nennt man den *Trägheitssatz von Sylvester*.

**Satz 48.10.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform  $\langle -, - \rangle$  vom Typ  $(p, q)$ . Dann ist die Gramsche Matrix von  $\langle -, - \rangle$  bezüglich einer jeden Orthogonalbasis eine Diagonalmatrix mit  $p$  positiven und  $q$  negativen Einträgen.*

*Beweis.* Bezüglich einer Orthogonalbasis  $u_1, \dots, u_n$  von  $V$  (die es nach Satz 38.15 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)) gibt) hat die Gramsche Matrix natürlich Diagonalgestalt. Es sei  $p'$  die Anzahl der positiven Diagonaleinträge und  $q'$  die Anzahl der negativen Diagonaleinträge. Die Basis sei so geordnet, dass die ersten  $p'$  Diagonaleinträge positiv, die folgenden  $q'$  Diagonaleinträge negativ und die übrigen 0 seien. Auf dem  $p'$ -dimensionalen Unterraum  $U = \langle u_1, \dots, u_{p'} \rangle$  ist die eingeschränkte Bilinearform positiv definit, so dass  $p' \leq p$  gilt. Sei  $W = \langle u_{p'+1}, \dots, u_n \rangle$ , auf diesem Unterraum ist die Bilinearform negativ semidefinit. Dabei ist  $V = U \oplus W$ , und diese beiden Räume sind orthogonal zueinander.

Angenommen, es gebe einen Unterraum  $U'$ , auf dem die Bilinearform positiv definit ist, und dessen Dimension  $p$  größer als  $p'$  ist. Die Dimension von  $W$  ist  $n - p'$  und daher ist  $W \cap U' \neq 0$  nach Korollar 9.8 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)).

Für einen Vektor  $w \in W \cap U'$ ,  $w \neq 0$ , ergibt sich aber direkt der Widerspruch  $\langle w, w \rangle > 0$  und  $\langle w, w \rangle \leq 0$ .  $\square$

### 48.3. Minorenkriterien für symmetrische Bilinearformen.

Es gibt mehrere Methoden, den Typ einer symmetrischen Bilinearform zu bestimmen. Hier besprechen wir das *Minorenkriterium*.

**Satz 48.11.** *Sei  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$  und sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$ . Es sei  $G$  die Gramsche Matrix zu  $\langle -, - \rangle$  bezüglich dieser Basis. Die Determinanten  $D_k$  der quadratischen Untermatrizen*

$$M_k = (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq k}$$

*seien für  $k = 1, \dots, n$  von 0 verschieden. Es sei  $a$  die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge*

$$D_0 = 1, D_1 = \det M_1, D_2 = \det M_2, \dots, D_n = \det M_n = \det G.$$

*Dann ist  $\langle -, - \rangle$  vom Typ  $(n - a, a)$ .*

*Beweis.* Da nach Voraussetzung insbesondere die Determinante der Gramschen Matrix nicht 0 ist, ist nach Aufgabe 48.4 die Bilinearform nicht ausgeartet und daher hat der Typ die Form  $(n - q, q)$ . Wir müssen zeigen, dass  $q = a$  ist. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über die Dimension von  $V$ , wobei der Induktionsanfang trivial ist. Die Aussage sei bis zur Dimension  $n - 1$  bewiesen und es liege ein  $n$ -dimensionaler Raum mit einer Basis

$v_1, \dots, v_n$  mit den angegebenen Eigenschaften vor. Der Untervektorraum

$$U = \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$$

hat die Dimension  $n - 1$  und die Folge der Determinanten der Untermatrizen der Gramschen Matrix zur eingeschränkten Form  $\langle -, - \rangle|_U$  stimmt mit der vorgegebenen Folge überein, wobei lediglich das letzte Glied

$$D_n = \det M_n = \det G$$

weggelassen wird. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt  $\langle -, - \rangle|_U$  den Typ  $(n - 1 - b, b)$ , wobei  $b$  die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge

$$D_0 = 1, D_1, \dots, D_{n-1}$$

ist. Aufgrund der Definition des Typs ist

$$b \leq q \leq b + 1,$$

da ein  $q$ -dimensionaler Untervektorraum  $W \subseteq V$ , auf dem die Bilinearform negativ definit ist, zu einem Untervektorraum

$$W' = U \cap W \subseteq U$$

führt, der die Dimension  $q$  oder  $q - 1$  besitzt und auf dem die eingeschränkte Form ebenfalls negativ definit ist. Nach Aufgabe 48.5 ist das Vorzeichen von  $D_{n-1}$  gleich  $(-1)^b$  und das Vorzeichen von  $D_n$  gleich  $(-1)^q$ . Das bedeutet, dass zwischen  $D_{n-1}$  und  $D_n$  ein zusätzlicher Vorzeichenwechsel (und somit  $a = b + 1$ ) genau dann vorliegt, wenn

$$q = b + 1$$

ist. □

**Korollar 48.12.** *Es sei  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum und sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$ . Es sei  $G$  die Gramsche Matrix zu  $\langle -, - \rangle$  bezüglich dieser Basis und es seien  $D_k$  die Determinanten der quadratischen Untermatrizen*

$$M_k = (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) Genau dann ist  $\langle -, - \rangle$  positiv definit, wenn alle  $D_k$  positiv sind.
- (2) Genau dann ist  $\langle -, - \rangle$  negativ definit, wenn das Vorzeichen in der Folge  $D_0 = 1, D_1, D_2, \dots, D_n$  an jeder Stelle wechselt.

*Beweis.* (1). Wenn die Bilinearform positiv definit ist, so ist nach Aufgabe 39.23 das Vorzeichen der Determinante der Gramschen Matrix gleich  $(-1)^0 = 1$ , also positiv. Da die Einschränkung der Form auf die Unterräume  $U_i = \langle v_1, \dots, v_i \rangle$  ebenfalls positiv definit ist, sind auch die Determinanten zu den Untermatrizen positiv. Wenn umgekehrt die Determinanten alle positiv sind, so folgt aus Satz 48.11, dass die Bilinearform positiv definit ist. (2) folgt aus (1), indem man die negative Bilinearform, also  $-\langle -, - \rangle$ , betrachtet. □

## 48. ARBEITSBLATT

## 48.1. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 48.1.** Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine Bilinearform auf  $V$ . Zeige, dass  $\langle -, - \rangle$  genau dann symmetrisch ist, wenn es eine Basis  $v_1, \dots, v_n$  von  $V$  mit

$$\langle v_i, v_j \rangle = \langle v_j, v_i \rangle$$

für alle  $1 \leq i, j \leq n$  gibt.

**Aufgabe 48.2.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform  $\langle -, - \rangle$  auf  $V$ . Es sei  $u_1, \dots, u_n$  eine Orthogonalbasis auf  $V$  mit der Eigenschaft  $\langle u_i, u_i \rangle > 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Zeige, dass  $\langle -, - \rangle$  positiv definit ist.

**Aufgabe 48.3.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform auf  $V$ . Zeige, dass die Gramsche Matrix zu dieser Bilinearform bezüglich einer geeigneten Basis eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge  $1, -1$  oder  $0$  sind.

**Aufgabe 48.4.** Es sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform auf  $V$ . Zeige, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind.

- (1) Die Bilinearform ist nicht ausgeartet.
- (2) Die Gramsche Matrix der Bilinearform bezüglich einer Basis ist invertierbar.
- (3) Die Bilinearform ist vom Typ  $(p, n - p)$  (mit einem  $p \in \{1, \dots, n\}$ .)

**Aufgabe 48.5.** Es sei  $\langle -, - \rangle$  eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform vom Typ  $(n - q, q)$  auf einem  $n$ -dimensionalen reellen Vektorraum. Es sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$  und es sei  $G$  die Gramsche Matrix zu  $\langle -, - \rangle$  bezüglich dieser Basis. Zeige, dass das Vorzeichen von  $\det G$  gleich  $(-1)^q$  ist.

**Aufgabe 48.6.** Man gebe ein Beispiel einer symmetrischen Bilinearform, das zeigt, dass der Unterraum maximaler Dimension, auf dem die Einschränkung der Form positiv definit ist, nicht eindeutig bestimmt ist.

**Aufgabe 48.7.** Bestimme den Typ der durch die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

gegebenen symmetrischen Bilinearform.

**Aufgabe 48.8.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $G \subseteq V$  eine offene Menge und

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass die Hesse-Form von  $f$  in jedem Punkt  $P \in G$  symmetrisch ist.

**Aufgabe 48.9.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $G \subseteq V$  eine offene Menge und

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Es sei  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum von  $V$ ,  $P \in G \cap U$  und es sei

$$\tilde{f}: G \cap U \longrightarrow \mathbb{R}$$

die Einschränkung von  $f$ . Zeige

$$(\text{Hess}_P f)|_U = \text{Hess}_P \tilde{f}.$$

**Aufgabe 48.10.\***

Man gebe für vorgegebene natürliche Zahlen  $p, q, n$  mit  $p + q \leq n$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

deren Hesse-Form im Nullpunkt den Typ  $(p, q)$  besitzt.

**Aufgabe 48.11.** Bestimme den Typ der Hesse-Form zur Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^3 - xy + y^2,$$

in jedem Punkt.

**Aufgabe 48.12.** Bestimme den Typ der Hesse-Form zur Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2y - xy^2 + x^2 - y^3,$$

in jedem Punkt.

**Aufgabe 48.13.** Es sei

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine  $k$ -fach stetig differenzierbare Funktion,  $P \in \mathbb{R}^n$  ein Punkt und  $v \in \mathbb{R}^n$ .  
Es sei

$$h(t) := f(P + tv).$$

Zeige, dass  $h$   $k$ -fach stetig differenzierbar ist und dass

$$h^{(k)}(0) = D_v \cdots D_v f(P)$$

(mit  $k$  Richtungsableitungen) gilt.

## 48.2. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 48.14.** (2 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$  mit einer symmetrischen Bilinearform  $\langle -, - \rangle$  auf  $V$  und einer Basis  $u_1, \dots, u_n$  von  $V$  derart, dass  $\langle u_i, u_i \rangle > 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$  ist, aber  $\langle -, - \rangle$  nicht positiv definit ist.

**Aufgabe 48.15.** (3 Punkte)

Bestimme die Gramsche Matrix des Standardskalarproduktes im  $\mathbb{R}^3$  bezüglich der Basis  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 48.16.** (5 Punkte)

Bestimme den Typ der Hesse-Form zur Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto xy^3 - x^2 \ln z,$$

im Punkt  $(0, 2, 3)$ .

**Aufgabe 48.17.** (5 Punkte)

Es sei

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und  $P \in \mathbb{R}^n$  ein kritischer Punkt. Die Hesse-Matrix in  $P$  besitze sowohl positive als auch negative Eigenwerte. Zeige, dass  $f$  in  $P$  kein lokales Extremum besitzt.

**Aufgabe 48.18.** (4 Punkte)

Bestimme die globalen Extrema für die Funktion

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + xy,$$

wobei  $D \subset \mathbb{R}^2$  das durch die Eckpunkte  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$  gegebene abgeschlossene (volle) Dreieck ist.

**Aufgabe 48.19.** (6 Punkte)

Bestimme die Hesse-Matrizen zu den kritischen Punkten zur Funktion

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 6y^3 - 6x^2y + 8y^2$$

aus Beispiel 46.9.

## 49. VORLESUNG - TAYLOR-FORMEL

## 49.1. Die Taylor-Formel - Vorbereitungen.

Ein Polynom in  $n$  Variablen,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{N}^n} a_{(r_1, \dots, r_n)} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n}$$

(wobei die Summe endlich ist) lässt sich entlang des Grades des Exponententupels, also

$$|r| = |(r_1, \dots, r_n)| = \sum_{j=1}^n r_j$$

anordnen, also

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{d=0}^e \left( \sum_{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{N}^n, |r|=d} a_{(r_1, \dots, r_n)} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n} \right).$$

Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  kann man dies auch schreiben als

$$f(x_1, \dots, x_n) = T_k(x_1, \dots, x_n) + R_k(x_1, \dots, x_n)$$

mit  $(x = (x_1, \dots, x_n))$

$$T_k(x) = \sum_{d=0}^k \left( \sum_{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{N}^n, |r|=d} a_{(r_1, \dots, r_n)} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n} \right)$$

und

$$R_k(x) = \sum_{d=k+1}^e \left( \sum_{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{N}^n, |r|=d} a_{(r_1, \dots, r_n)} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n} \right).$$

Für  $R_k$  gilt dabei

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|R_k(x)\|}{\|x\|^k} = 0.$$

Bei  $k = 1$  ist

$$T_1(x) = a_{(0,\dots,0)} + a_{(1,0,\dots,0)}x_1 + \dots + a_{(0,\dots,0,1)}x_n$$

die lineare Approximation von  $f$  im Punkt  $0 = (0, \dots, 0)$ , und dabei gilt für die Abweichung in der linearen Approximation die Beziehung

$$r(x) = \frac{R_1(x)}{\|x\|}.$$

Im Allgemeinen liefern die Polynome  $T_k(x)$  bessere Approximationen im Nullpunkt als die lineare Approximation, und mit  $R_k(x)$  kann man die Abweichung kontrollieren. Entscheidend für uns ist, dass man nicht nur für Polynomfunktionen, sondern generell für hinreichend oft differenzierbare Funktionen  $f$  approximierende Polynome finden und die Abweichung gut kontrollieren kann. Dies ist der Inhalt der *Taylor-Formel für Funktionen in mehreren Variablen*.

Zu einem Vektor  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  und einem Tupel  $r = (r_1, \dots, r_n)$  aus natürlichen Zahlen setzt man abkürzend

$$x^r := x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}.$$

Entsprechend schreibt man für eine Polynomfunktion abkürzend

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{N}^n} a_{(r_1, \dots, r_n)} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n} = \sum_{r \in \mathbb{N}^n} a_r x^r.$$

Die gleiche Abkürzungsphilosophie übernimmt man für Richtungsableitungen. Wenn  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit einer Basis  $w_1, \dots, w_n$  ist, so setzt man  $D_i := D_{w_i}$ , und für  $r = (r_1, \dots, r_n)$  setzt man

$$D^r := D_1^{r_1} \circ D_2^{r_2} \circ \dots \circ D_n^{r_n}.$$

Diese Bezeichnung verwendet man insbesondere im  $\mathbb{R}^n$ , versehen mit der Standardbasis und den partiellen Ableitungen. Man beachte, dass man aufgrund des Satzes von Schwarz unter gewissen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen sämtliche Reihenfolgen von Richtungsableitungen in dieser Weise ausdrücken kann. Des weiteren definieren wir für ein Tupel  $r = (r_1, \dots, r_n)$  die *Fakultät* durch

$$r! := r_1! \cdots r_n!$$

und bei  $\sum_{j=1}^n r_j = k$  die *Multinomialkoeffizienten* (oder *Polynomialkoeffizienten*) durch

$$\binom{k}{r} := \frac{k!}{r!} = \frac{k!}{r_1! r_2! \cdots r_n!}.$$

Bevor wir die Taylor-Formel beweisen, die das lokale Verhalten einer Funktion in einer „kleinen“ offenen Ballumgebung eines Punktes beschreibt, wenden wir uns dem lokalen Verhalten in dem Punkt längs einer fixierten Richtung zu, wofür wir die Taylor-Formel in einer Variablen zur Verfügung haben. Zu einer Funktion ( $G \subseteq V$ ,  $V$  endlichdimensionaler reeller Vektorraum)

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist die Differenzierbarkeit im Punkt  $P \in G$  in Richtung  $v \in V$  nach Lemma 43.4 äquivalent zur Differenzierbarkeit der Funktion

$$h: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto h(t) = f(P + tv),$$

für  $t = 0$ , wobei  $I$  ein geeignetes reelles Intervall ist. Wir werden zunächst zeigen, dass eine entsprechende Beziehung auch für höhere Ableitungen gilt.

**Satz 49.1.** *Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,*

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine  $k$ -mal stetig differenzierbare Funktion,  $P \in G$  ein Punkt und  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  eine fixierte Richtung. Es sei*

$$h: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto h(t) = f(P + tv),$$

*wobei  $I$  ein offenes Intervall um 0 sei mit  $P + tv \in G$  für alle  $t \in I$ . Dann ist  $h$  ebenfalls  $k$ -mal stetig differenzierbar, und es gilt*

$$h^{(k)}(t) = \sum_{|r|=k} \frac{k!}{r!} D^r f(P + tv) \cdot v^r$$

für alle  $t \in I$ .

*Beweis.* Wir zeigen durch Induktion über  $k$ , dass

$$h^{(k)}(t) = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k} D_{i_k} \cdots D_{i_1} f(P + tv) \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_k}$$

gilt. Hier wird also über jede Richtungsreihenfolge der Länge  $k$  aufsummiert, später werden wir unter Verwendung des Satzes von Schwarz gleiche Summanden zusammenfassen. Für  $k = 1$  ist

$$\begin{aligned} h'(t) &= (D_v f)(P + tv) \\ &= (Df)_{P+tv}(v) \\ &= (Df)_{P+tv} \left( \sum_{j=1}^n v_j e_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n v_j \cdot (Df)_{P+tv}(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^n v_j \cdot D_j f(P + tv). \end{aligned}$$

Der Induktionsschluss ergibt sich aus

$$\begin{aligned} h^{(k+1)}(t) &= (h^{(k)}(t))' \\ &= \left( \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k} D_{i_k} \cdots D_{i_1} f(P + tv) \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_k} \right)' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n D_j \left( \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k} D_{i_k} \cdots D_{i_1} f(P + tv) \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_k} \right) v_j \\
&= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k} D_j D_{i_k} \cdots D_{i_1} f(P + tv) \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_k} v_j \right) \\
&= \sum_{(i_1, \dots, i_k, j) \in \{1, \dots, n\}^{k+1}} D_j D_{i_k} \cdots D_{i_1} f(P + tv) \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_k} v_j.
\end{aligned}$$

Aufgrund des Satzes von Schwarz kommt es nicht auf die Reihenfolge der Richtungsableitungen an, d.h. zwei Summanden in der obigen Summe stimmen überein, wenn darin die jeweiligen Richtungsableitungen gleichhäufig vorkommen. Die Anzahl der Tupel  $(i_1, \dots, i_k)$  in  $\{1, \dots, n\}^k$ , bei denen die Zahl  $i$  genau  $r_i$ -mal vorkommt, wird durch die Polynomkoeffizienten

$$\binom{k}{r} = \frac{k!}{r!} = \frac{k!}{r_1! \cdots r_n!}$$

beschrieben. Daraus ergibt sich die Behauptung.  $\square$

**Definition 49.2.** Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge,

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine  $k$ -mal stetig-differenzierbare Funktion und  $P \in G$ . Dann heißt

$$\sum_{r=(r_1, \dots, r_n), |r| \leq k} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r$$

das *Taylor-Polynom vom Grad  $\leq k$*  zu  $f$  in  $P$ .

Es liegt also ein Polynom in den (verschobenen) Variablen  $v_1, \dots, v_n$  vor. Wenn  $P = (a_1, \dots, a_n)$  ist, so schreibt man meistens  $x_i - a_i$  statt  $v_i$ , wobei die  $x_i$  die Standardkoordinaten des  $\mathbb{R}^n$  bezeichnen. Man spricht auch vom *Taylor-Polynom der Ordnung  $k$*  oder einfach vom  $k$ -ten Taylor-Polynom.

Das 0-te Taylor-Polynom ist das konstante Polynom, das durch den Funktionswert  $f(P)$  gegeben ist, das 1-te Taylor-Polynom ist die lineare Approximation von  $f$  in  $P$  und das 2-te Taylor-Polynom ist die *quadratische Approximation* von  $f$  in  $P$ .

**Bemerkung 49.3.** Ein Polynom  $f$  vom Grad  $d$  stimmt mit seinem Taylor-Polynom vom Grad  $k \geq d$  im Nullpunkt  $0 = (0, \dots, 0)$  überein. Wegen der Additivität der Richtungsableitungen muss man dies nur für  $f = ax_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}$  überprüfen. Es ist aber

$$D^r f(0) = D_1^{r_1} \cdots D_n^{r_n} f(0) = (r_1!) \cdots (r_n!) a = r! a$$

und

$$D^s f(0) = 0$$

für jedes  $n$ -Tupel  $s = (s_1, \dots, s_n) \neq r$ , siehe Aufgabe 49.2.

Wenn man zu einem Polynom  $f$  die Taylor-Polynome in einem Punkt

$$P = (a_1, \dots, a_n)$$

berechnen möchte, so kann man (neben der Berechnung der Ableitungen) auch folgendermaßen vorgehen: Man schreibt das Polynom  $f$  in den Variablen  $y_i = x_i - a_i$ . Dazu ersetzt man in  $f$  die Variablen  $x_i$  durch

$$x_i = x_i - a_i + a_i = y_i + a_i$$

und rechnet dies aus, bis ein Polynom in  $y_i$  dasteht. Aus diesem Polynom sind die Taylor-Polynome im Entwicklungspunkt  $P$  direkt ablesbar.

**Beispiel 49.4.** Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto e^y \sin x - 3xy,$$

und wollen die Taylor-Polynome bis zur Ordnung 3 dazu im Nullpunkt berechnen. Das Taylor-Polynom der Ordnung 0 ist das konstante Nullpolynom, da  $f(0,0) = 0$  ist. Für das Taylor-Polynom der Ordnung 1 müssen wir die beiden partiellen Ableitungen ausrechnen. Diese sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y \cos x - 3y \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^y \sin x - 3x$$

mit den Werten 1 und 0. Daher ist  $x$  die lineare Approximation zu  $f$ , also das Taylor-Polynom der Ordnung 1. Für das Taylor-Polynom der Ordnung 2 berechnen wir die zweiten Ableitungen, diese sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} &= -e^y \sin x, \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} &= e^y \cos x - 3 \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} = e^y \sin x.$$

Die Werte dieser zweiten partiellen Ableitungen im Nullpunkt sind der Reihe nach  $0, -2, 0$ , sodass das zweite Taylor-Polynom (also die quadratische Approximation) gleich

$$x - 2xy$$

ist. Für das Taylor-Polynom der Ordnung 3 berechnen wir die dritten Ableitungen, diese sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} &= -e^y \cos x, \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} &= -e^y \sin x, \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} &= e^y \cos x, \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} = e^y \sin x.$$

Die Werte dieser dritten partiellen Ableitungen im Nullpunkt sind  $-1, 0, 1, 0$ , sodass (wegen  $(3, 0)! = 6$  und  $(1, 2)! = 2$ ) das dritte Taylor-Polynom gleich

$$x - 2xy - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}xy^2$$

ist.

**Satz 49.5.** *Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,*

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine  $(k + 1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion,  $P \in G$  ein Punkt und  $v \in \mathbb{R}^n$  derart, dass die Strecke von  $P$  nach  $P + v$  ganz in  $G$  liegt. Dann gibt es ein  $c \in [0, 1]$  mit*

$$f(P + v) = \sum_{|r| \leq k} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r + \sum_{|r|=k+1} \frac{1}{r!} D^r f(P + cv) \cdot v^r.$$

*Beweis.* Die Funktion

$$h: ]-\delta, 1 + \delta[ \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto h(t) = f(P + tv),$$

(mit einem geeigneten  $\delta > 0$ ) ist nach Satz 49.1  $(k + 1)$ -mal differenzierbar. Aufgrund der Taylor-Formel für eine Variable gibt es ein  $c \in [0, 1]$ <sup>10</sup> mit

$$h(1) = \sum_{j=0}^k \frac{h^{(j)}(0)}{j!} + \frac{h^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}.$$

Wir drücken die einzelnen Summanden mit Hilfe von Satz 49.1 aus und erhalten

$$\begin{aligned} f(P + v) &= h(1) \\ &= \sum_{j=0}^k \frac{h^{(j)}(0)}{j!} + \frac{h^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} \\ &= \sum_{|r| \leq k} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r + \sum_{|r|=k+1} \frac{1}{r!} D^r f(P + cv) \cdot v^r. \end{aligned}$$

□

## 49.2. Die Taylor-Formel.

**Satz 49.6.** *Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,*

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

<sup>10</sup>Der Beweis der Taylor-Formel für eine Variable zeigt, dass  $c$  zwischen den beiden beteiligten Punkten gewählt werden kann.

eine  $k$ -mal stetig differenzierbare Funktion,  $P \in G$  ein Punkt und  $\epsilon > 0$  derart, dass  $U(P, \epsilon) \subseteq G$  ist. Dann gilt für alle  $v$  mit  $P + v \in U(P, \epsilon)$  die Beziehung

$$f(P + v) = \sum_{|r| \leq k} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r + R_k(v),$$

wobei

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\|R_k(v)\|}{\|v\|^k} = 0$$

ist.

*Beweis.* Nach Satz 49.5 gibt es zu jedem  $v \in U(0, \epsilon)$  ein (von  $v$  abhängiges)  $c \in [0, 1]$  mit

$$\begin{aligned} f(P + v) &= \sum_{|r| \leq k-1} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r + \sum_{|r|=k} \frac{1}{r!} D^r f(P + cv) \cdot v^r \\ &= \sum_{|r| \leq k} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r + \sum_{|r|=k} \frac{1}{r!} (D^r f(P + cv) - D^r f(P)) v^r. \end{aligned}$$

Die rechte Summe ist also die Abweichungsfunktion  $R_k$ , die wir abschätzen müssen. Wegen

$$\begin{aligned} \|R_k(v)\| &\leq \sum_{|r|=k} \frac{1}{r!} \|D^r f(P + cv) - D^r f(P)\| \cdot \|v^r\| \\ &= \sum_{|r|=k} \frac{1}{r!} \|D^r f(P + cv) - D^r f(P)\| \cdot |v_1^{r_1}| \cdots |v_n^{r_n}| \\ &\leq \sum_{|r|=k} \frac{1}{r!} \|D^r f(P + cv) - D^r f(P)\| \cdot \|v\|^{r_1} \cdots \|v\|^{r_n} \\ &= \sum_{|r|=k} \frac{1}{r!} \|D^r f(P + cv) - D^r f(P)\| \cdot \|v\|^k \end{aligned}$$

ist

$$\frac{\|R_k(v)\|}{\|v\|^k} \leq \sum_{|r|=k} \frac{1}{r!} \|D^r f(P + cv) - D^r f(P)\|.$$

Da nach Voraussetzung die  $k$ -ten Richtungsableitungen stetig sind, existiert für jede einzelne Funktion  $D^r f(P + cv) - D^r f(P)$  der Limes für  $v \rightarrow 0$  und ist gleich 0. Daher gilt dies auch für die Summe rechts und damit auch für den Ausdruck links.  $\square$

## 49. ARBEITSBLATT

## 49.1. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 49.1.** Es sei  $X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n}$  ein Monom und es sei  $D_1^{s_1} \cdots D_n^{s_n}$  eine Hintereinanderschaltung von partiellen Ableitungen,  $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ .

(1) Zeige

$$(D_1^{s_1} \cdots D_n^{s_n})(X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n}) = 0,$$

falls  $s_j > r_j$  für ein  $j$  ist.

(2) Zeige

$$(D_1^{s_1} \cdots D_n^{s_n})(X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n}) = \frac{r_1! \cdots r_n!}{(r_1 - s_1)! \cdots (r_n - s_n)!} X_1^{r_1 - s_1} \cdots X_n^{r_n - s_n},$$

falls  $s_j \leq r_j$  für alle  $j$  ist.

**Aufgabe 49.2.** Es sei  $X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n}$  ein Monom und es sei  $D_1^{s_1} \cdots D_n^{s_n}$  eine Hintereinanderschaltung von partiellen Ableitungen,  $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ .

(1) Zeige

$$(D_1^{s_1} \cdots D_n^{s_n})(X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n})(0, \dots, 0) = 0,$$

falls  $s_j \neq r_j$  für ein  $j$  ist.

(2) Zeige

$$(D_1^{r_1} \cdots D_n^{r_n})(X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n})(0, \dots, 0) = r_1! \cdots r_n!.$$

**Aufgabe 49.3.** Bestätige Satz 49.1 für  $f(x, y) = x^a y^b$  in  $(0, 0)$  und  $v = (2, 3)$  bis zur dritten Ableitung.

**Aufgabe 49.4.** Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad  $\leq 3$  für die Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - y \cdot \sin x,$$

im Nullpunkt  $(0, 0)$ .

**Aufgabe 49.5.\***

Bestimme das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto f(x, y) = e^{x-y^2},$$

im Punkt  $(1, 1)$ .

**Aufgabe 49.6.\***

Bestimme das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = e^x y z^2 - xy,$$

im Punkt  $(1, 0, -1)$ .

**Aufgabe 49.7.\***

Bestimme das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto f(x, y) = e^{\sin x - \cos y},$$

im Punkt  $(0, \frac{\pi}{2})$ .

**Aufgabe 49.8.** Notiere das Taylor-Polynom für eine (hinreichend oft differenzierbare) Funktion in 2 oder 3 Variablen für die Grade  $k = 1, 2, 3$ .

**Aufgabe 49.9.** Es sei

$$f(x, y) = x^2 y - 3xy + 5y^2 + 4x.$$

Berechne das Taylor-Polynom der Ordnung 3 im Punkt  $P = (1, -2)$  algebraisch (d.h. man drücke das Polynom in den neuen Variablen  $u = x - 1, v = y + 2$  aus und lese daraus das Taylor-Polynom ab) und über Ableitungen.

**Aufgabe 49.10.** Es sei  $f$  ein Polynom in  $n$  Variablen vom Grad  $\leq k$ . Zeige, dass  $f$  mit dem Taylor-Polynom vom Grad  $\leq k$  von  $f$  im Nullpunkt übereinstimmt.

**Aufgabe 49.11.** Es sei  $x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}$  ein Monom vom Grad  $|r| = \sum_{j=1}^n r_j > k$ . Zeige

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}}{\|x\|^k} = 0.$$

In den folgenden Aufgaben werden einige Eigenschaften der Polynomkoeffizienten besprochen, die eine Verallgemeinerung der Binomialkoeffizienten sind.

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $r = (r_1, \dots, r_n)$  ein  $n$ -Tupel natürlicher Zahlen. Es sei  $k := \sum_{j=1}^n r_j$ . Dann nennt man die Zahl

$$\binom{k}{r} = \frac{k!}{r_1! r_2! \cdots r_n!}$$

einen *Polynomialkoeffizienten*.

**Aufgabe 49.12.** Im Fressnapf von Vorli liegen heute drei Würste, vier Knochen, sieben Trockenbällchen und zwei Kaustangen. In wie vielen Reihenfolgen kann Vorli das auffressen?



**Aufgabe 49.13.** In einem Studium werden 11 Leistungsnachweise verlangt, und zwar 3 Seminarscheine, 5 Klausuren, 2 mündliche Prüfungen und eine Hausarbeit, die in beliebiger Reihenfolge erbracht werden können. Wie viele Reihenfolgen gibt es, um diese Leistungsnachweise zu erbringen?

**Aufgabe 49.14.** Es seien  $n, k \in \mathbb{N}$  und  $r = (r_1, \dots, r_k)$  mit  $n$ . Zeige, dass die Anzahl der Abbildungen

$$\{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, k\},$$

bei denen das Urbild zu  $j \in \{1, \dots, n\}$  aus genau  $r_j$  Elementen besteht, gleich dem Multinomialkoeffizienten

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r_1! \cdots r_k!}$$

ist.

**Aufgabe 49.15.** Es seien  $k, n \in \mathbb{N}$  und  $r = (r_1, \dots, r_n)$  mit  $\sum_{j=1}^k r_j = n$ . Zeige, dass die Anzahl der  $n$ -Tupel

$$(j_1, \dots, j_n) \in \{1, \dots, k\}^n,$$

in denen die Zahl  $j$  genau  $r_j$ -mal vorkommt, gleich

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r_1! \cdots r_k!}$$

ist.

**Aufgabe 49.16.** Zeige, dass die Anzahl der geordneten Partitionen mit eventuell leeren Blöcken zum Anzahltupel  $r = (r_1, \dots, r_k)$  einer  $n$ -elementigen Menge gleich

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r_1! \cdots r_k!}$$

ist.

**Aufgabe 49.17.** Es seien  $a_1, \dots, a_n$  reelle Zahlen. Beweise den *Polynomial-satz*, das ist die Gleichung

$$(a_1 + \cdots + a_n)^k = \sum_{r=(r_1, \dots, r_n), \sum_{i=1}^n r_i=k} \binom{k}{r} a_1^{r_1} a_2^{r_2} \cdots a_n^{r_n}.$$

**Aufgabe 49.18.\***

Es sei

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, wobei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge sei. Zeige, dass für  $P \in G$  und  $v \in V$  die Beziehung

$$\sum_{r \in \mathbb{N}^n, |r|=2} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r = \frac{1}{2} \text{Hess}_P f(v, v)$$

gilt.

**Aufgabe 49.19.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $G \subseteq V$  offen,  $P \in G$  und seien

$$f, g: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Zeige durch ein Beispiel, dass das Taylor-Polynom zum Produkt  $fg$  im Punkt  $P$  vom Grad  $\leq 2$  nicht das Produkt der beiden Taylor-Polynome von  $f$  und  $g$  in  $P$  vom Grad  $\leq 1$  sein muss.

**Aufgabe 49.20.** Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $0 \in G$  und

$$R: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Zeige, falls für eine Konstante  $c > 0$  und alle  $v$  in einer offenen Umgebung von  $0$  die Abschätzung  $\|R(v)\| \leq c\|v\|^{k+1}$  gilt, dass dann  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\|R(v)\|}{\|v\|^k} = 0$  folgt.

Zeige umgekehrt durch ein Beispiel, dass aus  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\|R(v)\|}{\|v\|^k} = 0$  im Allgemeinen nicht die Abschätzung  $\|R(v)\| \leq c\|v\|^{k+1}$  folgt.

**Aufgabe 49.21.\***

Finde ein reelles Polynom  $f$  in zwei Variablen vom Grad  $\leq 2$ , das die folgenden Eigenschaften besitzt. Ist die Lösung eindeutig?

(1) Es ist  $f((0,0)) = 0$ .

(2) Es ist  $f((1,1)) = 2$ .

(3) Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}((0,0)) = 1.$$

(4) Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial y}((0,0)) = -2.$$

(5) Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}((1,1)) = 2.$$

(6) Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial y}((1,1)) = 3.$$

**Aufgabe 49.22.\***

Gibt es ein reelles Polynom  $f$  in zwei Variablen vom Grad  $\leq 2$ , das die folgenden Eigenschaften besitzt?

(1) Es ist  $f((0,0)) = 0$ .

(2) Es ist  $f((0,1)) = 0$ .

(3) Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}((0,0)) = 1.$$

(4) Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial y}((0,0)) = -2.$$

(5) Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}((0,1)) = -1.$$

(6) Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial y}((0,1)) = 1.$$

**Aufgabe 49.23.\***

Zeige, dass es kein reelles Polynom  $f$  in zwei Variablen vom Grad  $\leq 2$  gibt, das die folgenden Eigenschaften besitzt.

(1) Es ist  $f((0,0)) = 0$ .

(2) Es ist  $f((1,1)) = 0$ .

(3) Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}((0, 0)) = 1.$$

(4) Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial y}((0, 0)) = -2.$$

(5) Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}((1, 1)) = -1.$$

(6) Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial y}((1, 1)) = 1.$$

## 49.2. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 49.24.** (5 Punkte)

Bestätige Satz 49.1 anhand des folgenden Beispiels.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 y^3 - \cos(x - y^2),$$

$$P = (1, -3), v = (5, -2), k = 2.$$

**Aufgabe 49.25.** (4 Punkte)

Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad  $\leq 3$  für die Funktion

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto z \cdot \exp(xy),$$

im Nullpunkt  $(0, 0, 0)$ .

**Aufgabe 49.26.** (4 Punkte)

Es sei

$$f(x, y) = -2xy^3 - 5x^2y^2 + 4xy^2 - 7y + 3.$$

Berechne das Taylor-Polynom der Ordnung 3 im Punkt  $P = (-3, 4)$  algebraisch (d.h. man drücke das Polynom in den neuen Variablen  $u = x+3, v = y-4$  aus und lese daraus das Taylor-Polynom ab) und über Ableitungen.

**Aufgabe 49.27.** (5 Punkte)

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $G \subseteq V$  offen,  $P \in G$  und seien

$$f, g: G \rightarrow \mathbb{R}$$

zwei  $k$ -mal stetig differenzierbare Funktionen mit den Taylor-Polynomen  $T_k(f)$  und  $T_k(g)$  in  $P$  vom Grad  $\leq k$ . Zeige, dass das Produkt  $fg$  ebenfalls  $k$ -mal stetig differenzierbar ist, und dass für das Taylor-Polynom  $T_k(fg)$  von  $fg$  in  $P$  vom Grad  $\leq k$  die Beziehung

$$T_k(fg) = (T_k(f) \cdot T_k(g))_{\leq k}$$

besteht, wobei der Subskript  $\leq k$  bedeutet, dass das Polynom bis zum Grad  $k$  genommen wird.

**Aufgabe 49.28.** (5 Punkte)

Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $P \in G$  ein Punkt und

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Zeige, dass es maximal ein Polynom  $p(x_1, \dots, x_n)$  vom Grad  $\leq k$  mit der Eigenschaft geben kann, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|f(x) - p(x)\|}{\|x\|^k} = 0$$

gilt.

## 50. VORLESUNG - LOKALE EXTREMA

### 50.1. Hinreichende Kriterien für lokale Extrema.

Wir besprechen hinreichende Kriterien für die Existenz von lokalen Extrema einer Funktion

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R},$$

die auf Eigenschaften der zweiten Richtungsableitungen, genauer der Hesse-Form, beruhen und die entsprechenden Kriterien in einer Variablen verallgemeinern. Zunächst brauchen wir ein Lemma, das beschreibt, wie die Definitheit (oder der „Definitheitstyp“) der Hesse-Form vom Punkt abhängt.

**Lemma 50.1.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge und*

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Es sei  $P \in G$  ein Punkt, in dem die Hesse-Form  $\text{Hess}_P f$  positiv (negativ) definit sei. Dann gibt es eine offene Umgebung  $U$ ,  $P \in U \subseteq G$ , derart, dass die Hesse-Form  $\text{Hess}_Q f$  in jedem Punkt  $Q \in U$  positiv (negativ) definit ist.*

*Beweis.* Sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$ , und sei  $H(Q)$  die Gramsche Matrix zur Hesse-Form  $\text{Hess}_Q f$  im Punkt  $Q \in G$  bezüglich dieser Basis. Aufgrund der Differenzierbarkeitsvoraussetzungen hängt  $H(Q)$  stetig von  $Q$  ab. Daher

hängen auch die Determinanten der quadratischen Untermatrizen von  $H(Q)$  stetig von  $Q$  ab. Die Determinanten

$$D_k(P) = \det((H(P)_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k})$$

sind nach Satz 48.12 alle von 0 verschieden. Daher gibt es eine offene Umgebung  $U$ ,  $P \in U \subseteq G$ , derart, dass für alle  $Q \in U$  die Determinanten

$$D_k(Q) = \det((H(Q)_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k})$$

das gleiche Vorzeichen haben wie  $D_k(P)$ . Da diese Vorzeichen nach Satz 48.12 über die Definitheit entscheiden, folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 50.2.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge und*

$$f: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Es sei  $P \in G$  mit  $(Df)_P = 0$ . Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Wenn  $\text{Hess}_P f$  negativ definit ist, so besitzt  $f$  ein isoliertes lokales Maximum in  $P$ .*
- (2) *Wenn  $\text{Hess}_P f$  positiv definit ist, so besitzt  $f$  ein isoliertes lokales Minimum in  $P$ .*
- (3) *Wenn  $\text{Hess}_P f$  indefinit ist, so besitzt  $f$  in  $P$  weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum.*

*Beweis.* (1). Aufgrund von Lemma 50.1 gibt es ein  $\delta > 0$  derart, dass die Hesse-Form  $\text{Hess}_Q f$  für alle  $Q \in U(P, \delta)$  negativ definit ist. Für alle Vektoren  $v \in V$ ,  $v \in U(0, \delta)$ , gibt es nach Satz 49.5 ein  $c = c(v) \in [0, 1]$  mit

$$f(P+v) = f(P) + \sum_{|r|=2} \frac{1}{r!} D^r f(P+cv) \cdot v^r = f(P) + \frac{1}{2} \text{Hess}_{P+cv} f(v, v),$$

wobei die erste Formulierung sich auf eine fixierte Basis bezieht und wobei die zweite Identität auf Aufgabe 49.18 beruht. Da die Hesse-Form negativ definit ist, steht rechts für  $v \neq 0$  eine Zahl, die echt kleiner als  $f(P)$  ist. Daher liegt ein isoliertes lokales Maximum vor. (2) wird wie (1) bewiesen oder durch betrachten von  $-f$  darauf zurückgeführt. (3). Sei  $\text{Hess}_P f$  indefinit. Dann gibt es Vektoren  $v$  und  $w$  mit

$$\text{Hess}_P f(v, v) > 0 \text{ und } \text{Hess}_P f(w, w) < 0.$$

Wegen der stetigen Abhängigkeit der Hesse-Form gelten diese Abschätzungen auch für  $\text{Hess}_Q f$  für  $Q$  aus einer offenen Umgebung von  $P$  (mit den gleichen Vektoren  $v$  und  $w$ ). Wir können durch Skalierung von  $v$  und  $w$  annehmen, dass  $P+v$  und  $P+w$  zu dieser Umgebung gehören. Wie im Beweis zu Teil (1) gilt daher ( $v$  und  $w$  sind nicht 0)

$$f(P+v) = f(P) + \frac{1}{2} \text{Hess}_{P+cv} f(v, v) > f(P)$$

und

$$f(P+w) = f(P) + \frac{1}{2} \text{Hess}_{P+dw} f(w, w) < f(P)$$

mit  $c, d \in [0, 1]$ . Also kann in  $P$  kein lokales Extremum vorliegen.  $\square$

**Beispiel 50.3.** Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x + 3x^2 - 2xy - y^2 + y^3.$$

Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + 6x - 2y \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x - 2y + 3y^2.$$

Zur Berechnung der kritischen Punkte dieser Funktion eliminieren wir  $x$  und erhalten die Bedingung

$$9y^2 - 8y + 1 = 0,$$

die zu

$$y = \frac{\pm\sqrt{7}}{9} + \frac{4}{9}$$

führt. Die kritischen Punkte sind also

$$P_1 = \left( \frac{2\sqrt{7}-1}{54}, \frac{\sqrt{7}}{9} + \frac{4}{9} \right) \quad \text{und} \quad P_2 = \left( \frac{-2\sqrt{7}-1}{54}, \frac{-\sqrt{7}}{9} + \frac{4}{9} \right).$$

Die Hesse-Form ist in einem Punkt  $Q = (x, y)$  gleich

$$\text{Hess}_Q f = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & -2 + 6y \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung des Definitheitstyps ziehen wir Satz 48.12 heran, wobei der erste Minor, also 6, natürlich positiv ist. Die Determinante der Hesse-Matrix ist

$$-16 + 36y,$$

was genau bei  $y > \frac{4}{9}$  positiv ist. Dies ist im Punkt  $P_1$  der Fall, aber nicht im Punkt  $P_2$ . Daher ist die Hesse-Matrix im Punkt  $P_1$  nach Satz 48.12 positiv definit und somit besitzt die Funktion  $f$  im Punkt  $P_1$  nach Satz 50.2 ein isoliertes lokales Minimum, das zugleich ein globales Minimum ist. In  $P_2$  ist die Determinante negativ, so dass dort die Hesse-Form indefinit ist und somit, wiederum nach Satz 50.2, kein Extremum vorliegen kann.

**Beispiel 50.4.** Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^y.$$

Es ist

$$x^y = e^{(\ln x) \cdot y}.$$

Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{y}{x} \cdot e^{(\ln x) \cdot y} = \frac{y}{x} \cdot x^y \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (\ln x) \cdot e^{(\ln x) \cdot y} = (\ln x) \cdot x^y.$$

Da die Exponentialfunktion stets positiv ist, ist  $P = (1, 0)$  der einzige kritische Punkt. Die Hesse-Matrix in einem Punkt  $(x, y)$  ist

$$\begin{pmatrix} \frac{-y+y^2}{x^2} \cdot e^{(\ln x) \cdot y} & \frac{1+y \ln x}{x} \cdot e^{(\ln x) \cdot y} \\ \frac{1+y \ln x}{x} \cdot e^{(\ln x) \cdot y} & (\ln x)^2 \cdot e^{(\ln x) \cdot y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-y+y^2}{x^2} \cdot x^y & \frac{1+y \ln x}{x} \cdot x^y \\ \frac{1+y \ln x}{x} \cdot x^y & (\ln x)^2 \cdot x^y \end{pmatrix}.$$

In  $P$  ist dies

$$\text{Hess}_P \varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 48.12 ist daher die Hesse-Form im kritischen Punkt weder positiv definit noch negativ definit. Man kann direkt zeigen, dass diese Matrix indefinit ist (vom Typ  $(1, 1)$ ), da diese Bilinearform auf  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  positiv und auf  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  negativ definit ist. Nach Satz 50.2 liegt in diesem Punkt also kein Extremum vor.

Dies kann man auch ohne Differentialrechnung erkennen. Für  $x = 1$  oder  $y = 0$  ist  $x^y = 1$ . Ansonsten gelten die folgenden Beziehungen.

- (1) Für  $0 < x < 1$  und  $y > 0$  ist  $x^y < 1$ .
- (2) Für  $x > 1$  und  $y > 0$  ist  $x^y > 1$ .
- (3) Für  $0 < x < 1$  und  $y < 0$  ist  $x^y > 1$ .
- (4) Für  $x > 1$  und  $y < 0$  ist  $x^y < 1$ .

Daher gibt es in jeder Umgebung von  $(1, 0)$  Punkte, an denen die Funktionswerte größer bzw. kleiner als 1 sind.

**Bemerkung 50.5.** Es sei

$$g: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion und

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$$

eine Unterteilung des Intervalls durch  $n$  Zwischenpunkte (in  $n + 1$  Teilintervalle). Dazu gehört die Treppenfunktion, die auf  $[x_i, x_{i+1}[$  den konstanten Wert  $g(x_i)$  annimmt. Wenn  $g$  monoton wachsend ist, so ist dies eine untere Treppenfunktion, und das zugehörige Treppenintegral ist eine untere Schranke für das bestimmte Integral  $\int_a^b g(t) dt$ . Das Treppenintegral ist durch

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n g(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

gegeben. Wir fragen uns, für welche Intervallunterteilung mit  $n$  Teilpunkten das Treppenintegral maximal oder minimal wird. Dazu kann man die differentiellen Methoden zur Bestimmung von Extrema für Funktionen in mehreren Variablen verwenden (nämlich den variablen Unterteilungspunkten

$x_1, \dots, x_n$ ), vorausgesetzt, dass  $g$  (hinreichend oft) differenzierbar (in einer Variablen) ist. In diesem Fall sind die partiellen Ableitungen von  $f$  gleich

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = g'(x_i)(x_{i+1} - x_i) - g(x_i) + g(x_{i-1})$$

für  $i = 1, \dots, n$  (wobei  $x_0 = a$  und  $x_{n+1} = b$  zu lesen ist). Als Definitionsbereich von  $f$  kann man die offene Menge

$$\{(x_1, \dots, x_n) \mid a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

oder aber  $[a, b]^n$  wählen. Es ist im Allgemeinen schwierig, die kritischen Punkte dieser Abbildung zu bestimmen.

**Beispiel 50.6.** Wir wollen für die Funktion

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto g(t) = 1 - t^3,$$

und das Einheitsintervall  $[0, 1]$  bestimmen, für welche zwei Unterteilungspunkte  $0 < x < y < 1$  das Treppenintegral der zugehörigen (dreistufigen) unteren Treppenfunktion maximal wird. Das Treppenintegral wird durch die Funktion

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x(1 - x^3) + (y - x)(1 - y^3) \\ &= x - x^4 + y - y^4 - x + xy^3 \\ &= -x^4 + y - y^4 + xy^3 \end{aligned}$$

beschrieben. Die partiellen Ableitungen dieser Funktion sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -4x^3 + y^3$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 - 4y^3 + 3xy^2.$$

Wir bestimmen die kritischen Punkte. Aus der ersten partiellen Ableitung ergibt sich die Bedingung

$$y = \sqrt[3]{4x}$$

und daraus ergibt sich mit der zweiten partiellen Ableitung die Bedingung

$$1 - 16x^3 + 3 \cdot 4^{2/3}x^3 = 0,$$

also

$$(16 - 3 \cdot 4^{2/3})x^3 = 1$$

bzw.

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{16 - 3 \cdot 4^{2/3}}}.$$

Somit ist

$$P = \left( \frac{1}{\sqrt[3]{16 - 3 \cdot 4^{2/3}}}, \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{16 - 3 \cdot 4^{2/3}}} \right) \cong (0,4911, 0,7796)$$

der einzige kritische Punkt. Wir bestimmen die Hesse-Matrix in diesem Punkt, sie ist

$$\text{Hess}_P f = \begin{pmatrix} -12x^2 & 3y^2 \\ 3y^2 & -12y^2 + 6xy \end{pmatrix}$$

und in  $P$  gleich

$$\begin{pmatrix} -2,8942 & 1,8233 \\ 1,8233 & -4,9961 \end{pmatrix},$$

also negativ definit nach Satz 48.12. Daher liegt in  $P$  ein Maximum nach Satz 50.2 vor.

**Beispiel 50.7.** Wir wollen für die Funktion

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto t,$$

und das Einheitsintervall  $[0, 1]$  bestimmen, für welche  $n$  Unterteilungspunkte  $0 < x_1 < \dots < x_n < 1$  das Treppenintegral der zugehörigen ( $(n + 1)$ -stufigen) unteren Treppenfunktion maximal wird. Das Treppenintegral wird durch die Funktion

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= x_1(x_2 - x_1) + x_2(x_3 - x_2) + \dots \\ &\quad + x_{n-1}(x_n - x_{n-1}) + x_n(1 - x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} + x_n - \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{aligned}$$

beschrieben. Die partiellen Ableitungen dieser Funktion sind

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 - 2x_1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = x_{i-1} + x_{i+1} - 2x_i$$

für  $i = 2, \dots, n - 1$  und

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = x_{n-1} + 1 - 2x_n.$$

Wir bestimmen die kritischen Punkte, indem wir die partiellen Ableitungen gleich 0 setzen. Die ersten  $n - 1$  Gleichungen ergeben sukzessive die Bedingungen

$$x_i = ix_1$$

für alle  $i$ . Dies zeigt man durch Induktion, der Induktionsanfang ( $i = 1$ ) ist trivial,  $i = 2$  folgt direkt aus der ersten Gleichung und der Induktionsschritt ergibt sich aus

$$x_{i+1} = -x_{i-1} + 2x_i = -(i-1)x_1 + 2ix_1 = (i+1)x_1.$$

Aus der letzten Gleichung folgt schließlich

$$0 = x_{n-1} + 1 - 2x_n = 1 + (n-1-2n)x_1 = 1 - (n+1)x_1$$

und somit  $x_1 = \frac{1}{n+1}$ . Der einzige kritische Punkt liegt also in der äquidistanten Unterteilung vor. Die Hesse-Matrix ist (unabhängig vom Punkt) gleich

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist negativ definit nach Satz 48.12. Daher liegt in der äquidistanten Unterteilung nach Satz 50.2 das Maximum vor.

## 50. ARBEITSBLATT

### 50.1. Übungsaufgaben.

Wenn in den folgenden Aufgaben nach Extrema gefragt wird, so ist damit gemeint, dass man die Funktionen auf (isolierte) lokale und globale Extrema untersuchen soll. Zugleich soll man, im differenzierbaren Fall, die kritischen Punkte bestimmen.

**Aufgabe 50.1.** Untersuche die Addition

$$+ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x + y,$$

und die Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

auf kritische Punkte und auf Extrema.

**Aufgabe 50.2.** Untersuche die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - y^2,$$

auf Extrema.

**Aufgabe 50.3.** Untersuche die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - y^4,$$

auf Extrema.

**Aufgabe 50.4.** Untersuche die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto 2x^2 + 3y^2 + 5xy,$$

auf Extrema.

**Aufgabe 50.5.** Untersuche die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto 2x^2 + 3y^2 + 4xy,$$

auf Extrema.

**Aufgabe 50.6.** Untersuche die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto 4x^2 - xy + 5y^2,$$

auf Extrema.

**Aufgabe 50.7.\***

Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto 3x^2 - 2xy - y^2 + 5x,$$

und entscheide, ob in diesen kritischen Punkten ein lokales Extremum vorliegt.

**Aufgabe 50.8.\***

Wir betrachten die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto \frac{xz}{x^2 + y^2},$$

(es ist also  $y > 0$ ).

- a) Berechne die partiellen Ableitungen von  $f$  und stelle den Gradienten zu  $f$  auf.
- b) Bestimme die isolierten lokalen Extrema von  $f$ .

**Aufgabe 50.9.\***

Untersuche die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto -3x^2 + 2xy - 7y^2 + x,$$

auf Extrema.

**Aufgabe 50.10.** Man untersuche die Funktion

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^y,$$

auf Extrema (vergleiche Beispiel 50.4), indem man die Funktion als Hintereinanderschaltung

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit  $(x, y) \mapsto (\ln x, y)$ ,  $(u, v) \mapsto (uv)$ ,  $z \mapsto e^z$  auffasst und Aufgabe 46.19 und Aufgabe 46.20 heranzieht.

**Aufgabe 50.11.\***

Wir betrachten die Funktion

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto xyz.$$

- (1) Bestimme die Jacobi-Matrix zu  $\varphi$  in einem Punkt  $(x, y, z)$ .
- (2) Bestimme die kritischen Punkte von  $\varphi$ .
- (3) Bestimme die Hesse-Matrix zu  $\varphi$  in einem Punkt  $(x, y, z)$ .
- (4) Bestimme die Eigenräume der Hesse-Matrix zu  $\varphi$  im Punkt  $(1, 1, 1)$ .
- (5) Bestimme den Typ der Hesse-Form zu  $\varphi$  im Punkt  $(1, 1, 1)$  mit Hilfe des Eigenwertkriteriums.

**Aufgabe 50.12.\***

Wir betrachten die Determinante für  $2 \times 2$ -Matrizen als Funktion

$$\det: \text{Mat}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \longmapsto xw - zy.$$

- (1) Bestimme die Jacobi-Matrix zu  $\det$  und die kritischen Punkte.
- (2) Untersuche  $\det$  auf lokale Extrema. Bestimme insbesondere den Typ der Hesse-Matrix im Nullpunkt.
- (3) Finde einen zweidimensionalen Untervektorraum

$$U \subseteq \text{Mat}_2(\mathbb{R}),$$

auf dem die (Einschränkung der) Determinante ein lokales Minimum besitzt.

**Aufgabe 50.13.** Es sei

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und  $P \in \mathbb{R}^n$  ein kritischer Punkt. Es sei  $v \in \mathbb{R}^n$  ein Eigenvektor zur Hesse-Matrix in  $P$  mit einem positiven Eigenwert. Zeige, dass  $f$  in  $P$  kein lokales Maximum besitzt.

**Aufgabe 50.14.** Untersuche die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy^2 - x^3y,$$

auf Extrema.

**Aufgabe 50.15.\***

Untersuche die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + xy - 6y^2 - y,$$

auf kritische Punkte und Extrema.

**Aufgabe 50.16.\***

Es sei

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion mit

$$f(P) = f(-P)$$

für alle  $P \in \mathbb{R}^n$ .

- a) Zeige, dass  $f$  in 0 einen kritischen Punkt besitzt.
- b) Man gebe ein Beispiel für eine solche Funktion, die in 0 ein isoliertes lokales Maximum besitzt.
- c) Man gebe ein Beispiel für eine solche Funktion, die in 0 kein Extremum besitzt.

**Aufgabe 50.17.\***

Bestimme die lokalen und globalen Extrema der auf der abgeschlossenen Kreisscheibe  $B(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  definierten Funktion

$$f: B(0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + y^3 - y^2 - y.$$

**Aufgabe 50.18.\***

Prof. Knopfloch, Dr. Eisenbeis und Vorli machen Urlaub in den Bergen. Das Gebirge wird in einer geeigneten Umgebung durch die Funktion (alles in Meter)

$$f(x, y) = 3000 - \frac{1}{1000}x^2 - \frac{1}{1000}y^2 + \frac{1}{100}x$$

beschrieben.

- (1) In welchem Punkt (welchen Punkten) besitzt das Gebirge einen Gipfel? Wie hoch ist es in den Gipfeln?
- (2) Vorli hat Höhenangst und möchte nicht auf den Gipfel. Deshalb wählen sie einen Rundgang, der zum Punkt  $(0, 0)$  konstant den Grundabstand 1000 besitzt. Bestimme die größte und die niedrigste Höhe, die die drei auf ihrer Wanderung erreichen.



**Aufgabe 50.19.** Bestimme für die Funktion

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy\sqrt{3 - x^2 - y^2},$$

den maximalen Definitionsbereich  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  und untersuche die Funktion auf Extrema.

**Aufgabe 50.20.** Wir betrachten die Funktion

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto 1 - t^2.$$

Für welches  $x \in [0, 1]$  besitzt die zugehörige zweistufige (maximale) untere Treppenfunktion zu  $f$  den maximalen Flächeninhalt? Welchen Wert besitzt er?

**Aufgabe 50.21.\***

Wir betrachten die Funktion

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto 1 - t^2.$$

Für welche  $x, y \in [0, 1]$ ,  $x < y$ , besitzt die zugehörige dreistufige (maximale) untere Treppenfunktion zu  $f$  den maximalen Flächeninhalt? Welchen Wert besitzt er?

**Aufgabe 50.22.\***

Wir betrachten die Funktion

$$[1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto g(t) = \frac{1}{t}.$$

- (1) Beschreibe den Flächeninhalt zur unteren maximalen Treppenfunktion zu  $g$  zur Intervallunterteilung  $1 \leq x \leq y \leq 2$  in Abhängigkeit von  $x$  und  $y$ .
- (2) Bestimme das Punktepaar  $(x, y)$  zwischen 1 und 2, für das der Flächeninhalt zur unteren maximalen Treppenfunktion zu  $g$  zur Intervallunterteilung  $1 \leq x \leq y \leq 2$  maximal wird. Welchen Wert hat dieser Flächeninhalt?

**Aufgabe 50.23.** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $G \subseteq V$  offen, und  $P \in G$ . Man gebe ein Beispiel von zwei zweimal stetig differenzierbaren Funktionen

$$f, g: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

an derart, dass ihre quadratischen Approximationen in  $P$  übereinstimmen, und die eine Funktion ein Extremum in  $P$  besitzt, die andere nicht.

**Aufgabe 50.24.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,

$$\dim(V) \geq 2,$$

$G \subseteq V$  offen, und  $P \in G$ . Man gebe ein Beispiel von zwei zweimal stetig differenzierbaren Funktionen

$$f, g: G \longrightarrow \mathbb{R}$$

an derart, dass ihre quadratischen Approximationen in  $P$  übereinstimmen, und die eine Funktion ein Extremum in  $P$  besitzt, die andere nicht.

## 50.2. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 50.25.** (4 Punkte)

Untersuche die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + 9y^2 + 6xy,$$

auf Extrema.

**Aufgabe 50.26.** (4 Punkte)

Sei  $I = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Untersuche die Funktion

$$f: I \times I \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{\cos x}{\cos y},$$

auf Extrema.

**Aufgabe 50.27.** (5 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto t^2.$$

Für welche  $x, y \in ]0, 1[$ ,  $x < y$ , besitzt die zugehörige dreistufige (maximale) untere Treppenfunktion zu  $f$  den maximalen Flächeninhalt? Welchen Wert besitzt er?

**Aufgabe 50.28.** (5 Punkte)

Sei

$$h: \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion und betrachte

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto h(x^2 + y^2).$$

Zeige, dass  $f$  allenfalls im Nullpunkt  $(0, 0)$  ein isoliertes lokales Extremum besitzen kann, und dass dies genau dann der Fall ist, wenn  $h$  in 0 ein isoliertes lokales Extremum besitzt.

**Aufgabe 50.29.** (5 Punkte)

Es sei

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion und es sei  $P \in \mathbb{R}^2$  ein isolierter Punkt, d.h. es gebe eine offene Umgebung  $P \in U$  derart, dass  $\varphi(Q) \neq \varphi(P)$  ist für alle  $Q \in U$ ,  $Q \neq P$ . Zeige, dass dann  $\varphi$  in  $P$  ein isoliertes lokales Extremum besitzt.

## 51. VORLESUNG - SATZ ÜBER DIE UMKEHRABBILDUNG

Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein reelles Intervall und

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion mit  $f'(x_0) \neq 0$  in einem Punkt  $x_0 \in I$ . Nehmen wir an es gelte  $f'(x_0) > 0$ . Da die Ableitung stetig ist, gibt es auch ein offenes Intervall  $J = ]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[ \subseteq I$  derart, dass  $f'(x) > 0$  für alle  $x \in J$  ist. Aufgrund von Satz 19.5 (2) ist somit  $f$  auf  $J$  streng wachsend. Daher ist insbesondere  $f$  auf  $J$  injektiv. Das Bild  $J' = f(J)$  ist nach dem Zwischenwertsatz ein Intervall und daher liegt eine Bijektion

$$f|_J: J \longrightarrow J'$$

vor. Nach Satz 18.10 ist die Umkehrfunktion

$$g: J' \longrightarrow J$$

ebenfalls differenzierbar, und ihre Ableitung in  $y \in J'$  ist  $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$ . Daher ist die Umkehrfunktion auf  $J'$  auch stetig differenzierbar. Eine ähnliche Argumentation ist durchführbar, wenn  $f'(x_0) < 0$  ist. Insgesamt bedeutet dies, dass aus dem Nichtverschwinden der Ableitung in einem Punkt folgt, dass die Funktion sich in einer kleinen offenen Umgebung des Punktes bijektiv verhält mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung.

Diese Aussage verallgemeinern wir auf höhere Dimensionen.

## 51.1. Der Satz über die Umkehrabbildung.

**Beispiel 51.1.** Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x + y, xy).$$

Diese Abbildung ist nicht injektiv, da  $(x, y)$  und  $(y, x)$  auf das gleiche Tupel abgebildet werden, und auch nicht surjektiv, da beispielsweise  $(0, 1)$  nicht im Bild liegt. Trotzdem kann man das Gleichungssystem  $u = x + y$  und  $v = xy$  in gewisser Hinsicht auflösen, also  $x$  und  $y$  durch  $u$  und  $v$  ausdrücken. Zunächst ist

$$x = u - y$$

und damit

$$v = xy = (u - y)y = uy - y^2$$

oder

$$y^2 - uy + v = 0.$$

Damit ist

$$y = \pm \sqrt{\frac{u^2}{4} - v} + \frac{u}{2}$$

und somit

$$x = \mp \sqrt{\frac{u^2}{4} - v} + \frac{u}{2}.$$

Bis auf die Wahl der Vorzeichen kann man also die Urbilder zu  $(u, v)$  rekonstruieren. Dies zeigt erneut, dass es manchmal mehrere Urbilder und manchmal keine Urbilder gibt (wenn die Wurzel keine reelle Lösung hat). Ein eindeutiges Urbild existiert genau dann, wenn der Radikand gleich 0 ist, also bei

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{u^2}{4} - v \\ &= \frac{(x+y)^2}{4} - xy \\ &= \frac{x^2 + 2xy + y^2 - 4xy}{4} \\ &= \frac{x^2 - 2xy + y^2}{4} = \frac{(y-x)^2}{4}, \end{aligned}$$

d.h. bei  $x = y$ . In einem Punkt  $(x, x)$  verhält sich die Abbildung  $\varphi$  insofern gut, dass das Bild davon (also  $(2x, x^2)$ ) nur ein Urbild (nämlich  $(x, x)$ ) besitzt. Diese Eigenschaft überträgt sich aber auf keine offene Umgebung des Punktes, da ja  $(x+h, x-h)$  und  $(x-h, x+h)$  beide auf  $(2x, x^2 - h^2)$  abgebildet werden. In dieser Hinsicht verhalten sich die anderen Punkte besser. Sei  $(x_0, y_0)$  gegeben mit (sagen wir)

$$y_0 > x_0.$$

Dann besitzt

$$(u_0, v_0) = (x_0 + y_0, x_0 y_0)$$

wie oben ausgerechnet zwei Urbildpunkte, und zwar ist (der Startpunkt legt die Vorzeichen fest)

$$(x_0, y_0) = \left( -\sqrt{\frac{u_0^2}{4} - v_0} + \frac{u_0}{2}, \sqrt{\frac{u_0^2}{4} - v_0} + \frac{u_0}{2} \right).$$

Diese Formeln kann man unter der Bedingung, dass

$$\frac{u^2}{4} - v > 0,$$

als „lokale Umkehrabbildung“ interpretieren, und dies ist in einer offenen Umgebung  $U_2$  von  $(u_0, v_0)$  erfüllt. Das Bild von  $U_2$  unter dieser lokalen Umkehrabbildung ist eine offene Umgebung  $U_1$  von  $(x_0, y_0)$ , und die Einschränkung

führt zu einer bijektiven Abbildung

$$\varphi|_{U_1}: U_1 \longrightarrow U_2$$

mit der angegebenen Umkehrabbildung.

Der *Satz über die (lokale) Umkehrabbildung* gehört zu den wichtigsten Sätzen der mehrdimensionalen Analysis. Er besagt, dass eine stetig differenzierbare Abbildung  $\varphi$  zwischen endlichdimensionalen reellen Vektorräumen, für die das totale Differential in einem Punkt  $P$  bijektiv ist (was voraussetzt, dass die Dimension des Definitionsraum mit der Dimension des Zielraums übereinstimmt), die Abbildung selbst auf geeigneten kleinen offenen Umgebungen von  $P$  und von  $\varphi(P)$  eine Bijektion ist. D.h. die Abbildung verhält sich *lokal* so wie das totale Differential.

Wir brauchen einige Vorbereitungen. Der Beweis des folgenden Lemmas ist schon eine gute Einstimmung für den Beweis des folgenden Hauptsatzes.

**Lemma 51.2.** *Es seien  $V_1$  und  $V_2$  endlichdimensionale reelle Vektorräume,  $U_1 \subseteq V_1$  und  $U_2 \subseteq V_2$  offene Teilmengen und sei*

$$\varphi: U_1 \longrightarrow U_2 \subseteq V_2$$

*eine bijektive differenzierbare Abbildung. Sei  $P \in U_1$ . Das totale Differential*

$$(D\varphi)_P$$

*sei bijektiv und die Umkehrabbildung*

$$\psi: U_2 \longrightarrow U_1$$

*sei stetig in  $Q = \varphi(P)$ . Dann ist die Umkehrabbildung differenzierbar in  $Q$  und für ihre Ableitung gilt*

$$(D\psi)_Q = ((D\varphi)_P)^{-1}.$$

*Beweis.* Zuerst kann man durch Verschiebungen im Definitionsraum und im Zielraum annehmen, dass  $P = 0$  und  $\varphi(P) = 0$  ist. Es sei  $D = (D\varphi)_P$  die durch das totale Differential gegebene bijektive lineare Abbildung mit der linearen Umkehrabbildung  $D^{-1}$ . Wir betrachten die Gesamtabbildung

$$U_1 \xrightarrow{\varphi} V_2 \xrightarrow{D^{-1}} V_1.$$

Diese ist wieder differenzierbar, und das totale Differential davon ist  $D^{-1} \circ D = \text{Id}$  nach der Kettenregel. Wenn wir für diese zusammengesetzte Abbildung die Aussage zeigen können, so folgt die Aussage auch für  $\varphi$ , da eine lineare Abbildung differenzierbar ist. Wir können also annehmen, dass  $\varphi$  eine differenzierbare Abbildung mit  $\varphi(0) = 0$  ist, deren totales Differential in 0 die Identität ist. Nach diesen Reduktionen bedeutet die Differenzierbarkeit von  $\varphi$  in 0, dass der Limes

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\varphi(v) - v}{\|v\|} = 0$$

ist. Wir müssen entsprechend für die Umkehrabbildung  $\psi$  die Beziehung

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{\psi(w) - w}{\|w\|} = 0$$

zeigen. Es genügt, dies für jede Folge  $w_n \rightarrow 0$  nachzuweisen. Eine solche Folge kann man eindeutig als  $w_n = \varphi(v_n)$  (mit  $v_n = \psi(w_n)$ ) schreiben und aufgrund der vorausgesetzten Stetigkeit von  $\psi$  konvergiert auch die Folge  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen 0. Also ist

$$\begin{aligned} \frac{\|\psi(w_n) - w_n\|}{\|w_n\|} &= \frac{\|\psi(\varphi(v_n)) - \varphi(v_n)\|}{\|\varphi(v_n)\|} \\ &= \frac{\|v_n - \varphi(v_n)\|}{\|\varphi(v_n)\|} \\ &= \frac{\|\varphi(v_n) - v_n\|}{\|\varphi(v_n)\|}. \end{aligned}$$

Wegen  $\varphi(v) = v + \|v\| \cdot r(v)$  mit  $\lim_{v \rightarrow 0} r(v) = 0$  gibt es eine hinreichend kleine Umgebung von 0 derart, dass

$$\|\varphi(v)\| = \|v + \|v\| \cdot r(v)\| \geq \frac{1}{2}\|v\|.$$

Daher lässt sich die obere Gleichungskette (für  $n$  hinreichend groß) fortsetzen durch

$$\leq 2 \cdot \frac{\|\varphi(v_n) - v_n\|}{\|v_n\|},$$

und dies konvergiert gegen 0. □

Im Allgemeinen ist eine differenzierbare Abbildung nicht bijektiv. Man kann das Lemma aber häufig anwenden, indem man zu einer kleineren offenen Umgebung des Punktes  $P$  übergeht und für diese die Bijektivität auf das Bild zeigt.

Im Beweis des folgenden Satzes geht die folgende Version des Mittelwertsatzes ein. Wir versehen Homomorphismenräume  $\text{Hom}(V, W)$  zu endlichdimensionalen reellen Vektorräumen mit der Norm

$$\|\psi\| := \sup(\|\psi(v)\|, \|v\| = 1).$$

**Lemma 51.3.** *Es seien  $V$  und  $W$  euklidische Vektorräume,  $G \subseteq V$  sei offen und enthalte mit je zwei Punkten die Verbindungsstrecke. Es sei*

$$\varphi: G \rightarrow W$$

*eine differenzierbare Abbildung und es gelte*

$$\|(D\varphi)_P\| \leq b$$

*für alle  $P \in G$ . Dann gilt für  $P, Q \in G$  die Abschätzung*

$$\|\varphi(Q) - \varphi(P)\| \leq \|Q - P\| \cdot b.$$

*Beweis.* Bei  $P = Q$  ist nichts zu zeigen, sei also  $P \neq Q$ . Wir betrachten die Abbildung

$$h: [0, \|Q - P\|] \longrightarrow W, t \longmapsto \varphi\left(P + t \frac{Q - P}{\|Q - P\|}\right).$$

Da nach Voraussetzung  $P + t \frac{Q - P}{\|Q - P\|} \in G$  ist, ist dies eine differenzierbare Kurve in  $W$ . Daher gibt es nach der Mittelwertabschätzung für Kurven ein  $c \in [0, \|Q - P\|]$  mit

$$\begin{aligned} \|\varphi(P) - \varphi(Q)\| &\leq \|Q - P\| \cdot \|h'(c)\| \\ &= \|Q - P\| \cdot \|(D\varphi)_{P+c \frac{Q-P}{\|Q-P\|}}\left(\frac{Q - P}{\|Q - P\|}\right)\| \\ &= \|Q - P\| \cdot \|(D\varphi)_{P+c \frac{Q-P}{\|Q-P\|}}\| \cdot \left\|\frac{Q - P}{\|Q - P\|}\right\| \\ &\leq \|Q - P\| \cdot \|(D\varphi)_{P+c \frac{Q-P}{\|Q-P\|}}\| \\ &\leq \|Q - P\| \cdot b. \end{aligned}$$

□

Der folgende Satz, der *Satz über die lokale Umkehrabbildung*, besagt, dass eine stetig differenzierbare Abbildung in einer geeigneten offenen Umgebung eines Punktes bijektiv ist, wenn die Ableitung in diesem Punkt bijektiv ist. D.h., dass sich die Abbildung lokal so verhält wie die lineare Approximation. Die Bedingung, dass das totale Differential in einem Punkt bijektiv ist, lässt sich einfach mit der Determinante überprüfen.

**Satz 51.4.** *Es seien  $V_1$  und  $V_2$  endlichdimensionale reelle Vektorräume, sei  $G \subseteq V_1$  offen und es sei*

$$\varphi: G \longrightarrow V_2$$

*eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei  $P \in G$  ein Punkt derart, dass das totale Differential*

$$(D\varphi)_P$$

*bijektiv ist. Dann gibt es eine offene Menge  $U_1 \subseteq G$  und eine offene Menge  $U_2 \subseteq V_2$  mit  $P \in U_1$  und mit  $\varphi(P) \in U_2$  derart, dass  $\varphi$  eine Bijektion*

$$\varphi|_{U_1}: U_1 \longrightarrow U_2$$

*induziert, und dass die Umkehrabbildung*

$$(\varphi|_{U_1})^{-1}: U_2 \longrightarrow U_1$$

*ebenfalls stetig differenzierbar ist.*

*Beweis.* Wir beginnen mit einigen Reduktionen. Zuerst kann man durch Verschiebungen im Definitionsraum und im Zielraum annehmen, dass  $P = 0$

und  $\varphi(P) = 0$  ist. Es sei  $D = (D\varphi)_P$  die durch das totale Differential gegebene bijektive lineare Abbildung mit der linearen Umkehrabbildung  $D^{-1}$ . Wir betrachten die Gesamtabbildung

$$G \xrightarrow{\varphi} V_2 \xrightarrow{D^{-1}} V_1.$$

Diese ist wieder stetig differenzierbar, und das totale Differential davon ist  $D^{-1} \circ D = \text{Id}$ . Wenn wir für diese zusammengesetzte Abbildung die Aussage zeigen können, so folgt die Aussage auch für  $\varphi$ , da eine lineare Abbildung stetig differenzierbar ist. Wir können also annehmen, dass  $\varphi: V_1 \rightarrow V_1 = V_2$  eine stetig differenzierbare Abbildung mit  $\varphi(0) = 0$  ist, deren totales Differential in 0 die Identität ist. Wir werden dennoch von  $V_1$  und  $V_2$  sprechen, um klar zu machen, ob sich etwas im Definitionsraum oder im Zielraum abspielt. Sei  $y \in V_2$  fixiert. Wir betrachten die Hilfsabbildung

$$H_y: G \longrightarrow V_2, x \longmapsto H_y(x) = x - \varphi(x) + y.$$

Diese Hilfsabbildung erfüllt folgende Eigenschaft: Ein Punkt  $x \in G$  ist genau dann ein Fixpunkt von  $H_y$ , also ein Punkt mit  $H_y(x) = x - \varphi(x) + y = x$ , wenn  $\varphi(x) = y$  ist, d.h. wenn  $x$  ein Urbild von  $y$  unter  $\varphi$  ist. Die Abbildungen  $H_y$  sind selbst stetig differenzierbar und es gilt  $(DH_y)_x = \text{Id} - (D\varphi)_x$ . Wir möchten den Banachschen Fixpunktsatz auf  $H_y$  anwenden, um dafür einen Fixpunkt zu gewinnen und diesen als Urbildpunkt von  $y$  unter  $\varphi$  nachweisen zu können. Wir fixieren eine euklidische Norm. Wegen der Stetigkeit von  $x \mapsto (D\varphi)_x$  und wegen

$$(D\varphi)_0 = \text{Id}$$

gibt es ein  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ , derart, dass für alle  $x \in B(0, r)$  die Abschätzung

$$\|(DH_y)_x\| = \|\text{Id} - (D\varphi)_x\| \leq \frac{1}{2}$$

gilt. Für jedes  $x \in B(0, r)$  gilt daher nach der Mittelwertabschätzung die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|x - \varphi(x)\| &= \|H_0(x)\| \\ &= \|H_0(x) - H_0(0)\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|x\|. \end{aligned}$$

Für  $y \in B(0, \frac{r}{2})$  und  $x \in B(0, r)$  gilt

$$\begin{aligned} \|H_y(x)\| &= \|x - \varphi(x) + y\| \\ &\leq \|x - \varphi(x)\| + \|y\| \\ &\leq \frac{\|x\|}{2} + \frac{r}{2} \\ &\leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \\ &= r. \end{aligned}$$

Für jedes  $y \in B(0, \frac{r}{2})$  liegt also eine Abbildung

$$H_y: B(0, r) \longrightarrow B(0, r)$$

vor. Wegen der oben formulierten Ableitungseigenschaft und aufgrund der Mittelwertabschätzung gilt für zwei Punkte  $x_1, x_2 \in B(0, r)$  die Abschätzung

$$\|H_y(x_1) - H_y(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|,$$

so dass  $H_y$  eine stark kontrahierende Abbildung ist. Da ein euklidischer Vektorraum und damit auch die abgeschlossene Kugel  $B(0, r)$  vollständig sind (siehe Aufgabe 36.8 und Aufgabe 36.21), besitzt jede Abbildung  $H_y$  aufgrund des Banachschen Fixpunktsatzes genau einen Fixpunkt aus  $B(0, \frac{r}{2})$ , den wir mit  $\psi(y)$  bezeichnen. Aufgrund der eingangs gemachten Überlegung ist  $\varphi(\psi(y)) = y$ . Zu  $y \in U(0, \frac{r}{2})$  gehört das eindeutige Urbild  $x \in B(0, r)$  zur offenen Kugel  $U(0, r)$ , wie die obige Abschätzung zeigt. Wir setzen  $U_2 = U(0, \frac{r}{2})$  und  $U_1 = \varphi^{-1}(U_2) \cap U(0, r)$ , wobei  $U_1$  aufgrund der Stetigkeit von  $\varphi$  offen ist. Die eingeschränkte Abbildung

$$\varphi|_{U_1}: U_1 \longrightarrow U_2, x \longmapsto \varphi(x)$$

ist wieder stetig und bijektiv. Insbesondere gibt es eine Umkehrabbildung

$$\psi: U_2 \longrightarrow U_1,$$

die wir als stetig differenzierbar nachweisen müssen. Wir zeigen zuerst, dass  $\psi$  Lipschitz-stetig ist mit der Lipschitz-Konstanten 2. Seien  $y_1, y_2 \in U_2$  gegeben mit den eindeutigen Elementen  $x_1, x_2 \in U_1$  mit  $\varphi(x_1) = y_1$  und  $\varphi(x_2) = y_2$ . Es gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|x_2 - x_1\| &= \|H_0(x_2) + \varphi(x_2) - H_0(x_1) - \varphi(x_1)\| \\ &\leq \|H_0(x_2) - H_0(x_1)\| + \|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|x_2 - x_1\| + \|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)\|, \end{aligned}$$

wobei die letzte Abschätzung auf obiger Überlegung beruht. Durch Umstellung ergibt sich

$$\|\psi(y_2) - \psi(y_1)\| = \|x_2 - x_1\| \leq 2\|y_2 - y_1\|.$$

Aufgrund von Lemma 51.2 ist  $\psi$  auch differenzierbar und es gilt die Formel

$$(D\psi)_y = ((D\varphi)_{\psi(y)})^{-1}.$$

Aus dieser Darstellung lässt sich auch die stetige Abhängigkeit der Ableitung von  $y$  ablesen, da  $\psi$  stetig ist, da das totale Differential von  $\varphi$  nach Voraussetzung stetig von  $x = \psi(y)$  abhängt und da das Bilden der Umkehrmatrix ebenfalls stetig ist.  $\square$

## 51. ARBEITSBLATT

## 51.1. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 51.1.\***

Finde zwei natürliche Zahlen, deren Summe 65 und deren Produkt 1000 ist.

**Aufgabe 51.2.** Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, (x, y) \longmapsto (x + y, xy),$$

surjektiv ist.

**Aufgabe 51.3.\***

Man gebe ein Beispiel einer bijektiven differenzierbaren Abbildung

$$\varphi: U_1 \longrightarrow U_2$$

mit einer stetigen Umkehrabbildung  $\psi$  derart, dass  $\psi$  nicht differenzierbar ist.

**Aufgabe 51.4.\***

Man gebe ein Beispiel einer Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

das zeigt, dass im Satz über die (lokale) Umkehrbarkeit die Bijektivität im Allgemeinen nur auf echten Teilintervallen besteht.

**Aufgabe 51.5.** Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, (x, y) \longmapsto (x, e^{x+y}),$$

bijektiv ist. Man gebe explizit eine Umkehrabbildung an.

**Aufgabe 51.6.** Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x),$$

eine Funktion. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x, y + f(x)),$$

bijektiv ist. Bestimme explizit eine Umkehrabbildung.

Was besagt in der vorstehenden Aufgabe der Satz über die Umkehrabbildung, wenn  $f$  differenzierbar ist?

**Aufgabe 51.7.** Es seien

$$f_1, \dots, f_n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig differenzierbare Funktionen. Betrachte die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)),$$

Zeige:

- (1) Die Abbildung  $f$  ist differenzierbar.
- (2) Das totale Differential von  $f$  in 0 ist genau dann bijektiv, wenn von sämtlichen Funktionen  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , die Ableitungen in 0 nicht 0 sind.
- (3)  $f$  ist genau dann auf einer offenen Umgebung von 0 bijektiv, wenn die einzelnen  $f_i$  in einer geeigneten Umgebung bijektiv sind.

**Aufgabe 51.8.** Betrachte die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (\sin xy, yz \cos(x^2), e^{xyz}).$$

Zeige, dass  $\varphi$  im Punkt  $P = (1, \pi, 1)$  lokal umkehrbar ist, und bestimme das totale Differential der Umkehrabbildung im Punkt  $Q = \varphi(P)$ .

**Aufgabe 51.9.** Es seien  $P = a + bX + cY + \dots$  und  $Q = d + eX + fY + \dots$  Polynome in zwei Variablen und

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (P(x, y), Q(x, y)),$$

die zugehörige Abbildung. Wann besitzt  $\varphi$  in  $\varphi(0, 0)$  lokal eine Umkehrabbildung? Wie sieht in diesem Fall das totale Differential der Umkehrabbildung im Punkt  $\varphi(0, 0)$  aus?

**Aufgabe 51.10.\***

Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine nullstellenfreie stetig differenzierbare Funktion und sei  $g$  eine Stammfunktion zu  $f$ . Es sei

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$\varphi(x, y) = \left( \frac{x}{f(y)}, g(y) \right).$$

- a) Bestimme die Jacobi-Matrix zu  $\varphi$ .
- b) Zeige, dass man auf  $\varphi$  in jedem Punkt den Satz über die lokale Umkehrbarkeit anwenden kann.
- c) Zeige, dass  $\varphi$  injektiv ist.

**Aufgabe 51.11.\***

Es sei

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine total differenzierbare Abbildung derart, dass es eine reelle Zahl  $c \in [0, 1[$  gibt mit

$$\|(D\varphi)_P\| \leq c$$

für alle  $P \in \mathbb{R}^n$ . Zeige, dass  $\varphi$  die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

Im Beweis des Umkehrsatzes wurde mit folgender Definition gearbeitet.

Es seien  $V$  und  $W$  euklidische Vektorräume und sei

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann nennt man

$$\|\varphi\| := \sup(\|\varphi(v)\|, \|v\| = 1)$$

die *Norm* von  $\varphi$ .

**Aufgabe 51.12.** Begründe, warum die Norm einer linearen Abbildung zwischen euklidischen Vektorräumen wohldefiniert ist.

**Aufgabe 51.13.** Es seien  $V$  und  $W$  euklidische Vektorräume und sei

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass es einen Vektor  $v \in V$ ,  $\|v\| = 1$ , mit

$$\|\varphi(v)\| = \|\varphi\|$$

gibt.

**Aufgabe 51.14.** Zeige, dass die Norm einer linearen Abbildung zwischen euklidischen Vektorräumen folgende Eigenschaften erfüllt.

- (1) Es ist  $\|\varphi(v)\| \leq \|\varphi\| \cdot \|v\|$ .
- (2) Es ist  $\|\varphi\| = 0$  genau dann, wenn  $\varphi = 0$  ist.
- (3) Es ist  $\|c\varphi\| = |c| \cdot \|\varphi\|$ .
- (4) Es ist  $\|\varphi_1 + \varphi_2\| \leq \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|$ .

**Aufgabe 51.15.** Sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum und sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei  $\lambda \in \mathbb{R}$  ein Eigenwert von  $\varphi$ . Zeige, dass die Abschätzung

$$|\lambda| \leq \|\varphi\|$$

gilt.

**Aufgabe 51.16.** Sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum und sei

$$\varphi: V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung derart, dass eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren von  $\varphi$  existiert. Zeige, dass

$$\|\varphi\| = \max(|\lambda|, \lambda \text{ ist Eigenwert von } \varphi)$$

gilt.

**Aufgabe 51.17.** Es sei

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i,$$

eine lineare Abbildung  $\neq 0$ . Bestimme einen Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  auf der abgeschlossenen Kugel mit Mittelpunkt  $0$  und Radius  $1$ , an dem die Funktion

$$B(0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, v \longmapsto |\varphi(v)|,$$

ihr Maximum annimmt. Bestimme die Norm von  $\varphi$ .

## 51.2. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 51.18.** (4 Punkte)

Man konstruiere ein Beispiel, das zeigt, dass Lemma 51.3 ohne die Voraussetzung, dass mit je zwei Punkten auch die Verbindungsgerade zur Definitionsmenge gehört, nicht gilt.

(Tipp: Man denke daran, wie man flach auf einen steilen Berg kommt.)

**Aufgabe 51.19.** (2 Punkte)

Seien  $U_1$  und  $U_2$  offene Mengen in euklidischen Vektorräumen  $V_1$  und  $V_2$ . Es sei

$$\varphi: U_1 \longrightarrow U_2$$

eine bijektive Abbildung, die in einem Punkt  $P \in U_1$  differenzierbar sei derart, dass die Umkehrabbildung in  $Q = \varphi(P)$  auch differenzierbar ist. Zeige, dass das totale Differential  $(D\varphi)_P$  bijektiv ist.

**Aufgabe 51.20.** (3 Punkte)

Seien  $V_1$  und  $V_2$  endlichdimensionale reelle Vektorräume,  $G \subseteq V_1$  offen und sei

$$\varphi: G \longrightarrow V_2$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei  $U \subseteq G$  eine offene Teilmenge derart, dass für jeden Punkt  $P \in U$  das totale Differential  $(D\varphi)_P$  bijektiv ist. Zeige, dass dann das Bild  $\varphi(U)$  offen in  $V_2$  ist.

**Aufgabe 51.21.** (4 Punkte)

Bestimme die Umkehrabbildung zur Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x + y^2, -y^4 - 2xy^2 - x^2 + y^2 + x + y).$$

## 52. VORLESUNG - DIFFEOMORPHISMEN

## 52.1. Reguläre Punkte.

Der Rang einer linearen Abbildung

$$L: V \longrightarrow W$$

ist definiert als die Dimension des Bildraumes  $L(V)$ . Mit diesem Begriff können wir die Regularität einer Abbildung in einem Punkt allgemein definieren.

**Definition 52.1.** Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale reelle Vektorräume, sei  $G \subseteq V$  offen, sei  $P \in G$  und sei

$$\varphi: G \longrightarrow W$$

eine in  $P$  differenzierbare Abbildung. Dann heißt  $P$  ein *regulärer Punkt* von  $\varphi$ , wenn

$$\text{rang } (D\varphi)_P = \min(\dim(V), \dim(W))$$

ist. Andernfalls heißt  $P$  ein *kritischer Punkt* oder ein *singulärer Punkt*.

**Bemerkung 52.2.** Eine differenzierbare Abbildung  $\varphi: G \rightarrow W$  ist genau dann regulär in einem Punkt  $P \in G$ , wenn das totale Differential  $(D\varphi)_P$  den maximal möglichen Rang besitzt. Der Rang ist nach Lemma 12.14 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)) und nach Lemma 12.15 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)) gleich dem Spalten- bzw. Zeilenrang einer beschreibenden Matrix. Daher ist der Rang maximal gleich der Anzahl der Zeilen und maximal gleich der Anzahl der Spalten, also maximal gleich dem Minimum der beiden Dimensionen.

Bei  $\dim(W) = 1$  ist  $P$  ein regulärer Punkt genau dann, wenn  $(D\varphi)_P$  nicht die Nullabbildung ist. Daher stimmt diese Definition von regulär mit Definition 47.13 überein. Bei  $\dim(V) = 1$  bedeutet die Regularität wiederum, dass  $(D\varphi)_P \neq 0$  ist. Generell bedeutet bei  $\dim(V) \leq \dim(W)$  die Regularität, dass  $(D\varphi)_P$  injektiv ist, und bei  $\dim(V) \geq \dim(W)$  bedeutet die Regularität, dass  $(D\varphi)_P$  surjektiv ist. Insbesondere bedeutet bei  $\dim(V) = \dim(W)$  die Regularität in  $P$ , dass das totale Differential bijektiv ist und dass daher die Voraussetzung im Satz über die lokale Umkehrbarkeit erfüllt ist.

**Beispiel 52.3.** Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^2 - y, x + xy).$$

Diese Abbildung ist differenzierbar und die Jacobi-Matrix in einem Punkt  $P = (x, y)$  ist

$$\begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1 + y & x \end{pmatrix}.$$

Die Determinante davon ist

$$2x^2 + 1 + y,$$

so dass die Bedingung

$$y \neq -2x^2 - 1$$

die regulären Punkte der Abbildung charakterisiert. Im Nullpunkt  $(0, 0)$  liegt beispielsweise ein regulärer Punkt vor, so dass dort aufgrund des Satzes über die lokale Umkehrbarkeit lokal eine Bijektion vorliegt, d.h. es gibt offene Umgebungen  $U_1$  und  $U_2$  von  $(0, 0)$  derart, dass die eingeschränkte Abbildung

$$\varphi|_{U_1}: U_1 \longrightarrow U_2$$

bijektiv ist (mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung).

Wie groß kann dabei  $U_1$  gewählt werden? Wir beschränken uns auf offene Ballumgebungen  $U((0, 0), r)$ . Bei  $r > 1$  enthält eine solche Kreisscheibe zwei Punkte der Form

$$(\pm x, -1).$$

Diese werden unter  $\varphi$  auf

$$\varphi(\pm x, -1) = (x^2 - (-1), x + x(-1)) = (x^2 + 1, 0)$$

abgebildet, also auf den gleichen Punkt. Daher ist die Einschränkung der Abbildung auf eine solche Kreisscheibe nicht injektiv, und auf einer solchen Menge kann es keine Umkehrabbildung geben.

Betrachten wir hingegen

$$U_1 = U((0, 0), 1)$$

und

$$U_2 := \varphi(U_1)$$

Da  $U_1$  keine kritischen Punkte enthält, ist nach Aufgabe 51.20 das Bild  $U_2$  offen. Die eingeschränkte Abbildung  $\varphi|_{U_1}: U_1 \rightarrow U_2$  ist nach Definition von  $U_2$  surjektiv, so dass nur die Injektivität zu untersuchen ist.

Das Gleichungssystem

$$x^2 - y = u \text{ und } x + xy = v$$

führt auf

$$y = x^2 - u$$

und auf

$$x(1 + x^2 - u) = x^3 + (1 - u)x = v.$$

Seien  $(x, y)$  und  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  aus  $U((0, 0), 1)$  mit

$$\varphi(x, y) = \varphi(\tilde{x}, \tilde{y})$$

gegeben. Dann ist

$$x^3 + (1 - u)x = v = \tilde{x}^3 + (1 - u)\tilde{x}$$

und somit

$$0 = x^3 - \tilde{x}^3 + (1 - u)(x - \tilde{x}) = (x - \tilde{x})(x^2 + x\tilde{x} + \tilde{x}^2 + 1 - u).$$

Bei  $x = \tilde{x}$  folgt direkt  $y = \tilde{y}$ . Bei  $x \neq \tilde{x}$  muss

$$x^2 + x\tilde{x} + \tilde{x}^2 + 1 - u = 0$$

sein. Dies bedeutet  $y = x^2 - u = -x\tilde{x} - \tilde{x}^2 - 1$  und ebenso  $\tilde{y} = -x\tilde{x} - x^2 - 1$ . Wegen

$$x(y + 1) = v$$

und  $y + 1 > 0$  müssen  $x$  und  $v$  das gleiche Vorzeichen besitzen. Daher müssen auch  $x$  und  $\tilde{x}$  das gleiche Vorzeichen besitzen. Daraus folgt aber

$$y = -x\tilde{x} - \tilde{x}^2 - 1 \leq -1,$$

so dass es in der offenen Kreisumgebung mit Radius 1 keine zwei verschiedenen Urbilder geben kann.<sup>11</sup> Mit  $U_1 = U((0, 0), 1)$  liegt also eine Bijektion  $U_1 \rightarrow U_2$  vor.

## 52.2. Diffeomorphismen.

Der Satz über die lokale Umkehrbarkeit gibt Anlass zu folgender Definition.

**Definition 52.4.** Es seien  $V_1$  und  $V_2$  endlichdimensionale reelle Vektorräume und  $U_1 \subseteq V_1$  und  $U_2 \subseteq V_2$  offene Teilmengen. Eine Abbildung

$$\varphi: U_1 \longrightarrow U_2$$

heißt  $C^k$ -*Diffeomorphismus*, wenn  $\varphi$  bijektiv und  $k$ -mal stetig differenzierbar ist, und wenn die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1}: U_2 \longrightarrow U_1$$

ebenfalls  $k$ -mal stetig differenzierbar ist.

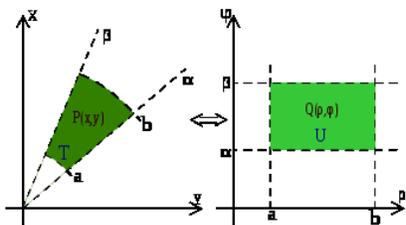
<sup>11</sup>Man kann auch folgendermaßen argumentieren: Die Ableitung von  $x^3 + (1 - u)x$  nach  $x$  ist  $3x^2 + (1 - u) = 3x^2 + 1 - (x^2 - y) = 2x^2 + 1 + y$ . Wegen  $|y| < 1$  ist dies positiv. Somit ist  $x^3 + (1 - u)x$  streng wachsend in  $x$  nach Satz 19.5. Daher gibt es zu einem vorgegebenen Punkt  $(u, v) \in U_2$  nur ein  $x$ , das die Bedingung

$$x^3 + (1 - u)x = v$$

erfüllt. Wegen  $y = x^2 - u$  ist auch die zweite Komponente  $y$  eindeutig bestimmt.

Der Satz über die lokale Umkehrbarkeit besagt also, dass eine stetig differenzierbare Abbildung mit invertierbarem totalen Differential lokal (!) ein  $C^1$ -Diffeomorphismus ist (es gibt auch  $C^k$ -Versionen von diesem Satz). Zwei offene Mengen  $U_1$  und  $U_2$  heißen  $C^k$ -diffeomorph, wenn es einen  $C^k$ -Diffeomorphismus zwischen ihnen gibt. Hier werden wir uns auf  $C^1$ -Diffeomorphismen beschränken und prominente Beispiele besprechen.

Wir haben schon für die komplexen Zahlen Polarkoordinaten verwendet, siehe Satz 21.6. Hier besprechen wir Polarkoordinaten in Hinblick auf lokale Umkehrbarkeit.



**Beispiel 52.5.** Die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (r, \alpha) \longmapsto (r \cos \alpha, r \sin \alpha),$$

heißt *Polarkoordinatenauswertung*. Sie ordnet einem Radius  $r$  und einem Winkel  $\alpha$  (wegen diesen Bedeutungen schränkt man den Definitionsbereich häufig ein) denjenigen Punkt der Ebene (in kartesischen Koordinaten) zu, zu dem man gelangt, wenn man in Richtung des Winkels (gemessen von der  $x$ -Achse aus gegen den Uhrzeigersinn) die Strecke  $r$  zurücklegt. Sie ist in jedem Punkt  $(r, \alpha)$  stetig differenzierbar mit der Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -r \sin \alpha \\ \sin \alpha & r \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung ist nicht injektiv, da die Abbildung im zweiten Argument, also im Winkel  $\alpha$ , periodisch mit der Periode  $2\pi$  ist. Bei  $r = 0$  ist - unabhängig von  $\alpha$  - das Bild gleich  $(0, 0)$ . Ferner ist  $\varphi(-r, \alpha + \pi) = \varphi(r, \alpha)$ . Die Abbildung kann also nicht global invertierbar sein.

Die Determinante der Jacobi-Matrix ist

$$r(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = r.$$

Bei  $r \neq 0$  liegt also nach Satz 16.11 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)) ein bijektives totales Differential vor. Nach dem Satz über die lokale Umkehrabbildung gibt es zu jedem Punkt  $(r, \alpha)$  mit  $r \neq 0$  eine offene Umgebung  $(r, \alpha) \in U_1$  und eine bijektive Abbildung

$$\varphi|_{U_1}: U_1 \longrightarrow U_2 = \varphi(U_1).$$

Bei  $r > 0$  kann man beispielsweise als offene Umgebung das offene Rechteck

$$U_1 = ]r - \delta, r + \delta[ \times ]\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon[$$

mit  $r > \delta > 0$  und mit  $\pi > \epsilon > 0$  wählen. Das Bild davon, also  $U_2$ , ist der Schnitt des (offenen) Kreisringes zu den Radien  $r - \delta$  und  $r + \delta$  und dem (offenen) Kreissektor, der durch die beiden Winkel  $\alpha - \epsilon$  und  $\alpha + \epsilon$  begrenzt ist.

Man kann diese Abbildung zu einer bijektiven Abbildung, und zwar zu einem Diffeomorphismus, auf großen offenen Mengen einschränken, beispielsweise zu

$$\mathbb{R}_+ \times ]-\pi, \pi[ \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}, (r, \alpha) \longmapsto (r \cos \alpha, r \sin \alpha).$$

Die Bijektivität folgt dabei aus den grundlegenden Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen, siehe insbesondere Satz 21.3. Wenn man das offene Intervall  $]-\pi, \pi[$  durch das halboffene Intervall  $]-\pi, \pi]$  ersetzt, so bekommt man eine Bijektion zwischen  $\mathbb{R}_+ \times ]-\pi, \pi]$  und  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Man kann aber nicht von einem Diffeomorphismus sprechen, da dies nur für offene Mengen definiert ist. Die Umkehrabbildung ist übrigens noch nicht einmal stetig.

**Beispiel 52.6.** Eine räumliche Variante der Polarkoordinaten sind die *Zylinderkoordinaten*. Die zugehörige Abbildung wird durch

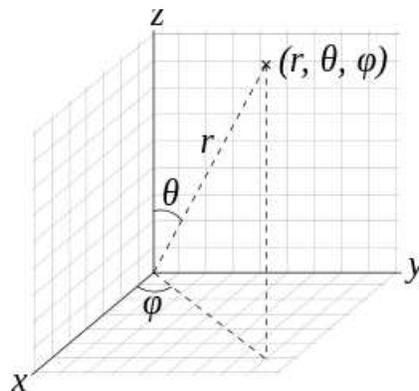
$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (r, \alpha, z) \longmapsto (r \cos \alpha, r \sin \alpha, z),$$

beschrieben. Für jedes feste  $z$  werden  $(r, \alpha)$  als Polarkoordinaten ausgewertet und die Höhe  $z$  wird einfach übernommen.

**Beispiel 52.7.** Die Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (r, \theta, \varphi) \longmapsto (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta),$$

(bzw. die Einschränkung davon auf Teilmengen wie  $\mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ ) nennt man *Kugelkoordinatenauswertung*. Diese Abbildung bildet die *Kugelkoordinaten*  $(r, \theta, \varphi)$  auf die zugehörigen kartesischen Koordinaten  $(x, y, z)$  ab.



Die Bedeutung der Kugelkoordinaten sind folgendermaßen:  $r$  ist der Abstand von  $(x, y, z)$  zum Nullpunkt. Bei  $r = 1$  definieren die beiden Winkel  $\varphi$  und  $\theta$  einen Punkt auf der Einheitskugel, und zwar bestimmt  $\varphi$  einen Punkt auf dem Einheitskreis in der  $x - y$ -Ebene (auf dem Äquator) und  $\theta$  bestimmt einen Punkt auf dem zugehörigen Halbkreis (der durch den Äquatorpunkt und Nord- und Südpol festgelegt ist), wobei der Winkel zum Nordpol gemessen wird. Für ( $r = 1$  und) einen festen Winkel  $\theta$  parametrisiert  $\varphi$  einen *Breitenkreis*, wobei  $\theta = \frac{\pi}{2}$  den Äquator beschreibt. Bei einem festen Winkel  $\varphi$  hingegen parametrisiert  $\theta$  den oben angesprochenen Halbkreis, einen *Längenkreis*. In der Geographie herrschen übrigens etwas andere Konventionen, man wählt den zweiten Winkel aus  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  (statt  $+$  und  $-$  spricht man von nördlicher und südlicher Breite) und nimmt  $-\sin \theta$ .

Die Jacobi-Matrix der Abbildung ist

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

und die Determinante davon ist

$$r^2 \sin \theta.$$

D.h. bei  $r \neq 0$  und  $\theta \notin \mathbb{Z}\pi$  ist das totale Differential invertierbar und daher liegt nach Satz 51.4 ein lokaler Diffeomorphismus vor. Die inhaltliche Interpretation der Abbildung zeigt, dass hier überhaupt ein Diffeomorphismus zwischen  $\mathbb{R}_+ \times ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[$  und  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$  vorliegt.

## 52. ARBEITSBLATT

### 52.1. Übungsaufgaben.

Mit diffeomorph ist im Folgenden stets  $C^1$ -diffeomorph gemeint.

**Aufgabe 52.1.** Definiere explizit einen Diffeomorphismus zwischen  $\mathbb{R}^n$  und einer offenen Kugel  $U(0, r) \subseteq \mathbb{R}^n$ .

**Aufgabe 52.2.** Zeige, dass eine offene Kreisscheibe  $U(P, r) \subseteq \mathbb{R}^2$  ( $r > 0$ ) und ein offenes Rechteck  $]a, b[ \times ]c, d[$  ( $b > a, d > c$ ) diffeomorph sind.

**Aufgabe 52.3.** Zeige die folgenden Aussagen.

- (1) Die Identität ist ein Diffeomorphismus.
- (2) Eine lineare bijektive Abbildung ist ein Diffeomorphismus.
- (3) Die Umkehrabbildung eines Diffeomorphismus ist wieder ein Diffeomorphismus.

- (4) Die Hintereinanderschaltung von Diffeomorphismen ist ein Diffeomorphismus.

**Aufgabe 52.4.** Es seien  $U_1 \subseteq V_1$ ,  $U_2 \subseteq V_2$ ,  $U_3 \subseteq V_3$ , und  $U_4 \subseteq V_4$  offene Teilmengen in reellen endlichdimensionalen Vektorräumen. Es seien

$$\varphi: U_1 \longrightarrow U_3$$

und

$$\psi: U_2 \longrightarrow U_4$$

$C^1$ -Diffeomorphismen. Zeige, dass auch die Produktabbildung

$$\varphi \times \psi: U_1 \times U_3 \longrightarrow U_2 \times U_4$$

ein  $C^1$ -Diffeomorphismus ist.

**Aufgabe 52.5.** Es sei

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

und

$$U_2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 > 4v\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

- Skizziere  $U_1$  und  $U_2$ .
- Zeige, dass  $U_1$  und  $U_2$  offen sind.
- Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi: U_1 \longrightarrow U_2, (x, y) \longmapsto (x + y, xy),$$

ein Diffeomorphismus ist.

**Aufgabe 52.6.** Bestimme die regulären Punkte der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^2y, x - \sin y).$$

Zeige, dass  $\varphi$  in  $P = (1, 0)$  regulär ist und bestimme das totale Differential der Umkehrabbildung von  $\varphi|_U$  in  $\varphi(P)$ , wobei  $U$  eine offene Umgebung von  $P$  sei (die nicht explizit angegeben werden muss).

**Aufgabe 52.7.\***

Man gebe für jedes  $n \in \mathbb{N}_+$  eine bijektive, total differenzierbare Abbildung

$$\varphi_n: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

an, für die das totale Differential in mindestens einem Punkt nicht regulär ist.

**Aufgabe 52.8.** Es seien  $U, V, W$  euklidische Vektorräume und seien  $\varphi : U \rightarrow V$  und  $\psi : V \rightarrow W$  differenzierbare Abbildungen. Es sei  $\varphi$  regulär in  $P \in U$  und  $\psi$  regulär in  $Q = \varphi(P) \in V$ . Ist dann  $\psi \circ \varphi$  regulär in  $P$ ? Unter welchen Voraussetzungen stimmt dies?

**Aufgabe 52.9.** Das komplexe Quadrieren

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^2,$$

kann man reell als

$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, x + iy = (x, y) \mapsto (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = (x^2 - y^2, 2xy)$ , schreiben. Untersuche  $\varphi$  auf reguläre Punkte. Auf welchen (möglichst großen) offenen Teilmengen ist  $\varphi$  umkehrbar?

**Aufgabe 52.10.** Finde möglichst große offene Teilmengen  $G \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  und  $H \subseteq \mathbb{C}$  derart, dass die Abbildung

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^3,$$

einen Diffeomorphismus von  $G$  nach  $H$  induziert.

**Aufgabe 52.11.\***

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \left( \frac{y^2}{x}, \frac{y^3}{x^2} \right).$$

- Bestimme die regulären Punkte der Abbildung  $\varphi$ .
- Zeige, dass  $\varphi$  in  $P = (1, 2)$  lokal eine differenzierbare Umkehrabbildung  $\psi = \varphi^{-1}$  besitzt, und bestimme das totale Differential von  $\psi$  im Punkt  $\varphi(P)$ .
- Man gebe alle Punkte  $Q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$  an, in denen  $\varphi$  nicht lokal invertierbar ist.

**Aufgabe 52.12.** Zeige, dass die Transformation

$$[0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow B(0, 1), (\alpha, w) \mapsto (\sqrt{w} \cos \alpha, \sqrt{w} \sin \alpha),$$

auf geeigneten offenen Teilmengen ein Diffeomorphismus ist und berechne die Jacobi-Determinante in jedem Punkt.

**Aufgabe 52.13.** Es seien  $P_1, \dots, P_n$  und  $Q_1, \dots, Q_n$  Punkte in der Ebene  $\mathbb{R}^2$ . Zeige, dass die beiden offenen Mengen  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\}$  und  $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{Q_1, \dots, Q_n\}$  zueinander diffeomorph sind.

**Aufgabe 52.14.** Es sei

$$T = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+ \right\} \cup \{0\},$$

$$U = \mathbb{R} \setminus T$$

und

$$V = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}.$$

Zeige, dass  $U$  und  $V$  zueinander diffeomorph sind.

**Aufgabe 52.15.** Es sei

$$T = \left\{ \left( \frac{1}{n}, 0 \right) \mid n \in \mathbb{N}_+ \right\} \cup \{(0, 0)\},$$

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus T$$

und

$$V = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N}.$$

Zeige, dass  $U$  und  $V$  zueinander nicht homöomorph sind.

**Aufgabe 52.16.\***

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^4, (a, b, c, d, u, v) \longmapsto (au + bv + c + d, ad - bc, ac - b^2, bd - c^2).$$

- Bestimme die Jacobi-Matrix zu dieser Abbildung.
- Zeige, dass  $\varphi$  im Nullpunkt nicht regulär ist.
- Zeige, dass  $\varphi$  in  $(1, 1, 0, 0, 1, 1)$  regulär ist.

**Aufgabe 52.17.\***

Wir betrachten die Abbildung

$$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (x + y + z, xy + xz + yz, xyz).$$

Zeige, dass ein Punkt  $P = (x, y, z)$  genau dann ein regulärer Punkt von  $F$  ist, wenn die Koordinaten von  $P$  paarweise verschieden (also  $x \neq y$ ,  $x \neq z$  und  $y \neq z$ ) sind.

**Aufgabe 52.18.\***

Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und

$$\varphi: G \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Zeige, dass die Menge der regulären Punkte von  $\varphi$  offen ist.

**Aufgabe 52.19.** Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, (u, v) \longmapsto \left( \frac{-u}{u^2 + v^2}, \frac{-v}{u^2 + v^2} \right),$$

ein Diffeomorphismus ist.

**Aufgabe 52.20.\***

Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale reelle Vektorräume,  $U \subseteq V$  und  $U' \subseteq W$  offene Teilmengen und

$$\varphi: U \longrightarrow U'$$

ein Diffeomorphismus. Es sei

$$F: I \times U \longrightarrow V, (t, x) \longmapsto F(t, x),$$

ein Vektorfeld auf  $U$ . Es sei  $G$  das durch

$$G(t, y) := (D\varphi)_{\varphi^{-1}(y)}(F(t, \varphi^{-1}(y)))$$

definierte Vektorfeld auf  $U'$ . Zeige, dass

$$\alpha: J \longrightarrow U$$

genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = F(t, x) \text{ mit } x(t_0) = x_0,$$

wenn  $\varphi \circ \alpha$  eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = G(t, y) \text{ mit } y(t_0) = \varphi(x_0)$$

ist.

## 52.2. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 52.21.** (5 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (x + y + z, xy + xz + yz, xyz).$$

Zeige, dass ein Punkt  $(x, y, z)$  genau dann ein kritischer Punkt von  $\varphi$  ist, wenn in  $(x, y, z)$  zwei Zahlen doppelt vorkommen.

**Aufgabe 52.22.** (5 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \longmapsto (x^2 - y^2z, y + \sin xz).$$

Zeige, dass die Menge der kritischen Punkte von  $\varphi$  eine Gerade umfasst, aber auch noch weitere (mindestens einen) Punkte enthält.

**Aufgabe 52.23.** (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x, xy).$$

Bestimme die regulären Punkte, die Fasern (also die Urbilder zu einem Punkt  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ), das Bild und das Bild aller regulären Punkte dieser Abbildung. Man gebe möglichst große offene Mengen  $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^2$  derart an, dass

$$\varphi|_{U_1}: U_1 \longrightarrow U_2$$

ein Diffeomorphismus ist.

**Aufgabe 52.24.** (4 Punkte)

Es seien  $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^k$  und  $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  offene Teilmengen mit  $0 \in V_1, V_2$  und es sei

$$\varphi: U_1 \times V_1 \longrightarrow U_2 \times V_2$$

ein Diffeomorphismus, der eine Bijektion zwischen  $U_1 \times \{0\}$  und  $U_2 \times \{0\}$  induziert. Zeige, dass dann auch die Einschränkung von  $\varphi$  auf  $U_1 \cong U_1 \times \{0\}$  nach  $U_2 \cong U_2 \times \{0\}$  ein Diffeomorphismus ist.

**Aufgabe 52.25.** (3 Punkte)

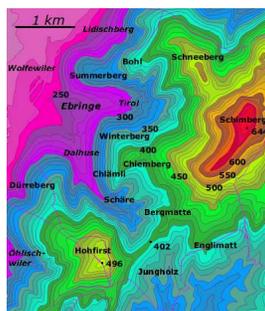
Beschreibe das komplexe Potenzieren

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto z^n,$$

in Polarkoordinaten.

## 53. VORLESUNG - SATZ ÜBER IMPLIZITE ABBILDUNGENINTEGRIERBARKEIT

### 53.1. Der Satz über implizite Abbildungen.



In einer topographischen Karte wird ein Gebirge durch seine Niveaulinien (Höhenlinien) repräsentiert.



Die Küstenlinie ist die Nullfaser der Höhenabbildung. In den regulären Punkten der Küste kann man eine Tangente anlegen und die Küste lokal als einen Graphen einer Funktion beschreiben. Ein singulärer Punkt einer Küste ergibt sich beispielsweise bei einer Meereshöhe, die genau in einem Punkt an die Wasseroberfläche stößt, oder einem Sattelpunkt zwischen „zwei“ Inseln, der sich auf Meeressniveau befindet.<sup>12</sup>

**Definition 53.1.** Zu einer Abbildung

$$\varphi: L \longrightarrow M$$

zwischen zwei Mengen  $L$  und  $M$  heißt zu  $y \in M$  die Menge

$$F_y = \{x \in L \mid \varphi(x) = y\}$$

die *Faser* von  $\varphi$  über  $y$ .

Die Faser zu einem Punkt ist also einfach das Urbild  $\varphi^{-1}(\{y\})$  von  $y$ . Zu einem Punkt  $P \in L$  nennt man die Faser über  $\varphi(P)$  auch die *Faser durch*  $P$ . Bei  $M = \mathbb{R}$  sagt man statt Fasern auch *Niveaumengen* oder, insbesondere bei  $L = \mathbb{R}^2$ , auch *Höhenlinien*. In meteorologischen Kontexten spricht man von Isothermen oder von Isobaren.

**Beispiel 53.2.** Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + y^2.$$

Da diese nur nichtnegative Werte annimmt, sind die Fasern zu  $z \in \mathbb{R}_-$  leer. Die Faser zum Wert 0 besteht aus dem einzigen Punkt  $(0, 0)$ . Die Faser zu einem positiven Wert  $z \in \mathbb{R}_+$  ist

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = z\},$$

das ist der Kreis mit dem Radius  $\sqrt{z}$ . Zu jedem Punkt  $P = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$  ist die Faser (oder die Niveaumenge) durch diesen Punkt also ein Kreis  $Z$ . Eine hinreichend kleine offene Ballumgebung  $U(P, \delta)$  von  $P$  enthält nur einen Teil des Kreisbogens, der homöomorph zu einem offenen Intervall ist. Die differenzierbare Abbildung

$$]a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto \sqrt{x_0^2 + y_0^2} (\cos t, \sin t)$$

<sup>12</sup>Dass man solche singulären Punkte in der Natur nur selten antrifft, liegt daran, dass das Höhenprofil der Erde nur endlich viele kritische Punkte und damit nur endlich viele Gipfel und Sattelpunkte besitzt. Es ist daher unwahrscheinlich, dass der Meeresspiegel genau auf der Höhe eines solchen kritischen Punktes liegt. Wenn man aber Ebbe und Flut betrachtet, so werden solche Punkte immer wieder durchlaufen.

(mit geeignet gewählten Intervallgrenzen) induziert dabei eine Homöomorphie zwischen  $]a, b[$  und dem Kreisbogenausschnitt  $Z \cap U(P, \delta)$ .

**Beispiel 53.3.** Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x)$ , eine Funktion in einer Variablen. Dazu kann man die Funktion in zwei Variablen,

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto y - f(x),$$

betrachten. Die Fasern von  $\varphi$  über  $c \in \mathbb{R}$  sind durch

$$F_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x) + c\}$$

charakterisiert. D.h. die Faser über  $c$  ist einfach der Graph der durch  $x \mapsto f(x) + c$  definierten Funktion. Alle Fasern gehen durch eine Verschiebung ineinander über, sie sind parallel zueinander. Die Punkte einer jeden Faser stehen in Bijektion mit der  $x$ -Achse, indem nämlich  $x$  auf  $(x, f(x) + c)$  abgebildet wird.

Der *Satz über implizite Abbildungen* wird zeigen, dass unter gewissen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen die Fasern einer Abbildung sich *lokal* als Graphen von Abbildungen realisieren lassen.

Eine Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = (\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)) = (y_1, \dots, y_m)$$

führt unmittelbar zu einem Gleichungssystem

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_n).$$

Die Lösungsmenge eines solchen Gleichungssystems ist gerade die Faser über  $y = (y_1, \dots, y_m)$ . Man kann sich fragen, wie zu gegebenem  $y = (y_1, \dots, y_m)$  die Lösungsmenge aussieht, welche Struktur sie hat und wie sie sich mit  $y$  verändert. Das „grobe Muster“ zeigt sich schon deutlich bei einem *linearen Gleichungssystem* in  $n$  Variablen und  $m$  Gleichungen. Dort sind bei

$$n \geq m$$

und wenn die Gleichungen linear unabhängig sind, die Lösungsmengen  $(n - m)$ -dimensionale affine Untervektorräume des  $\mathbb{R}^n$ . Insbesondere sind alle Lösungsmengen gleich und besitzen die gleiche Dimension.

Das Bestimmen der Lösungsmengen ist im Allgemeinen sehr viel schwieriger als im linearen Fall und auch gar nicht effektiv durchführbar. Dennoch vermittelt die lineare Approximation durch das totale Differential den richtigen Ansatz für das Studium allgemeiner Fasern. Eine reichhaltige Strukturaussage über die Gestalt der Faser in einem Punkt  $P$  ist nur dann zu erwarten, wenn das totale Differential in  $P$  surjektiv ist. In diesem Fall ist der Kern des totalen Differentials, also die Lösungsmenge des durch diese lineare Abbildung gegebenen linearen Gleichungssystems, *tangential* an die Faser durch  $P$ , und man kann auf hinreichend kleinen offenen Mengen eine Bijektion zwischen dem Kern und der Faser stiften.



Der Querschnitt eines Achats. Die chemische Zusammensetzung variiert mit dem Ort und damit variiert auch die Frequenz des reflektierten Lichts, also die optische Erscheinung, mit dem Ort. Man sieht also die (verdickten) Fasern der Lichtabbildung.

**Beispiel 53.4.** Wir betrachten die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto f(x, y) = x + y^2 + x^2y.$$

Der Punkt  $(0, 0)$  gehört zur Faser über 0, was kann man über die Gestalt der Faser durch diesen Punkt sagen? Die partiellen Ableitungen sind

$$(1 + 2xy, 2y + x^2).$$

Im Nullpunkt ist dies  $(1, 0)$ , der Kern dieser linearen Abbildung ist somit  $\mathbb{R}(0, 1)$ . Die Gleichung

$$x + y^2 + x^2y = 0$$

lässt sich sowohl nach  $x$  als auch nach  $y$  in gewissen Umgebungen der 0 auflösen. Für  $y = 0$  muss  $x = 0$  sein. Für  $y \neq 0$  ist

$$x^2 + \frac{x}{y} + y = 0$$

bzw. (für  $y \leq \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ )

$$x = \pm \sqrt{\frac{1 - 4y^3}{4y^2}} - \frac{1}{2y}.$$

Dabei konvergiert die Lösung

$$x_1(y) = \sqrt{\frac{1 - 4y^3}{4y^2}} - \frac{1}{2y} = \frac{\sqrt{1 - 4y^3} - 1}{2y}$$

für  $y \rightarrow 0$  gegen  $(0, 0)$ , die Lösung

$$x_1(y) = -\sqrt{\frac{1 - 4y^3}{4y^2}} - \frac{1}{2y} = \frac{-\sqrt{1 - 4y^3} - 1}{2y}$$

divergiert hingegen für  $y \rightarrow 0$  gegen  $-\infty$ . Daher liegt der Nullpunkt auf dem ersten „Lösungsstrang“, und in einer gewissen kleinen Umgebung des Nullpunktes wird die Faser vollständig durch den ersten Strang beschrieben

(für  $y = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$  gehen diese beiden Stränge ineinander über). Die Auflösung nach  $y$  ist durch

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^4}{4} - x - \frac{x^2}{2}}$$

gegeben. Hier treffen sich beide Stränge im Nullpunkt. Die Projektion der Faser auf die  $x$ -Achse ist in keiner noch so kleinen Umgebung der 0 eine Bijektion.

Die folgende Aussage heißt *Satz über implizite Abbildungen*.

**Satz 53.5.** *Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sei*

$$\varphi: G \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

*eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei  $a \in G$  und es sei*

$$Z = \varphi^{-1}(\varphi(a))$$

*die Faser durch  $a$ . Das totale Differential  $(D\varphi)_a$  sei surjektiv. Dann gibt es eine offene Menge  $W \subseteq G$ , eine offene Menge  $V \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$  und eine stetig differenzierbare Abbildung*

$$\psi: V \longrightarrow W$$

*derart, dass  $\psi(V) \subseteq Z \cap W$  ist und  $\psi$  eine Bijektion*

$$\psi: V \longrightarrow Z \cap W$$

*induziert. Die Abbildung  $\psi$  ist in jedem Punkt  $Q \in V$  regulär und für das totale Differential von  $\psi$  gilt*

$$(D\varphi)_{\psi(Q)} \circ (D\psi)_Q = 0.$$

*Beweis.* Es sei  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  der Kern des totalen Differentials  $(D\varphi)_a$ . Aufgrund der vorausgesetzten Surjektivität und der Dimensionsformel ist dies ein  $(n-m)$ -dimensionaler Untervektorraum von  $\mathbb{R}^n$ . Durch einen Basiswechsel können wir annehmen, dass  $K$  von den ersten  $n-m$  Standardvektoren  $e_1, \dots, e_{n-m}$  erzeugt ist (Der Unterraum  $\langle e_{n-m+1}, \dots, e_n \rangle$  wird dann bijektiv auf  $\mathbb{R}^m$  abgebildet). Es sei

$$p: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-m} = K, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_{n-m})$$

die lineare Projektion auf  $K$  und es sei

$$p \times \varphi: G \longrightarrow \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m, \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_{n-m}, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)),$$

die zusammengesetzte Abbildung. Diese ist selbst stetig differenzierbar und das totale Differential davon im Punkt  $a = (a_1, \dots, a_n)$  ist bijektiv, so dass wir darauf den Satz über die Umkehrabbildung anwenden können. Es gibt

also offene Umgebungen  $a \in U_1$ ,  $U_1 \subseteq G$ , und  $(p(a), \varphi(a)) \in U_2$ ,  $U_2 \subseteq \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$ , derart, dass die eingeschränkte Abbildung

$$(p \times \varphi)|_{U_1}: U_1 \longrightarrow U_2$$

bijektiv ist mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung. Für die offene Menge  $U_2$  gibt es offene Mengen

$$(a_1, \dots, a_{n-m}) \in V \subseteq \mathbb{R}^{n-m} \text{ und } \varphi(a) = (b_1, \dots, b_m) \in V' \subseteq \mathbb{R}^m$$

mit

$$V \times V' \subseteq U_2.$$

Wir können den Diffeomorphismus  $(p \times \varphi)|_{U_1}$  auf das (offene) Urbild  $W$  von  $V \times V'$  einschränken. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathbb{R}^m \end{array}$$

bzw. die Einschränkung davon

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & V \times V' \\ & \searrow & \downarrow \\ & & V' \end{array} .$$

Die Faser über  $b = \varphi(a)$  ist  $V \times \{(b_1, \dots, b_m)\}$ . Diese Menge steht über die horizontale Abbildung  $p \times \varphi$  in Bijektion mit der Faser von  $\varphi$  über  $b$ , also mit  $Z \cap W$ . Wir betrachten nun die Abbildung

$$\psi: V \longrightarrow W, (x_1, \dots, x_{n-m}) \longmapsto (p \times \varphi)^{-1}(x_1, \dots, x_{n-m}, b_1, \dots, b_m).$$

Es ist

$$\begin{aligned} \varphi(\psi(x_1, \dots, x_{n-m})) &= \varphi((p \times \varphi)^{-1}(x_1, \dots, x_{n-m}, b_1, \dots, b_m)) \\ &= (b_1, \dots, b_m), \end{aligned}$$

so dass das Bild von  $\psi$  in der Tat in  $Z \cap W$  landet. Die Injektivität von  $\psi$  ist klar. Sei nun  $(x_1, \dots, x_n) \in Z \cap W$ . Dann ist

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = (b_1, \dots, b_m)$$

und daher ist

$$(p \times \varphi)(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-m}, b_1, \dots, b_m).$$

Also ist

$$\psi(x_1, \dots, x_{n-m}) = (x_1, \dots, x_n)$$

im Bild von  $\psi$ . Die Abbildung

$$\psi: V \longrightarrow W$$

ist nach Konstruktion stetig differenzierbar und das totale Differential ist in jedem Punkt  $Q \in V$  injektiv, da  $\psi$  die Hintereinanderschaltung einer affinen Injektion und eines Diffeomorphismus ist. Da  $\psi(V)$  in der Faser von  $\varphi$  über  $b$  liegt, ist  $\varphi \circ \psi = b$  konstant. Nach der Kettenregel ist

$$(D\varphi)_{\psi(Q)} \circ (D\psi)_Q = 0.$$

□

Die Bedingung, dass das totale Differential surjektiv ist, kann man auch so ausdrücken, dass  $n \geq m$  ist und dass der Punkt  $P$  regulär ist.

**Bemerkung 53.6.** Den Satz über implizite Abbildungen kann man auch so formulieren: Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale reelle Vektorräume,  $G \subseteq V$  offen und es sei  $\varphi: G \rightarrow W$  eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei  $a \in G$  ein Punkt, in dem das totale Differential  $(D\varphi)_a$  surjektiv sei, und es sei  $V = E_1 \oplus E_2$  eine direkte Summenzerlegung von  $V$  in Untervektorräume  $E_1$  und  $E_2$  (mit  $a = (a_1, a_2)$ ) derart, dass  $E_1 = \ker (D\varphi)_a$  und  $(D\varphi)_a|_{E_2}$  surjektiv (und damit bijektiv ist) ist (dadurch ist  $E_1$ , aber nicht  $E_2$  eindeutig festgelegt). Dann gibt es offene Mengen  $U_1 \subseteq E_1$  und  $U_2 \subseteq E_2$  mit  $U_1 \times U_2 \subseteq G$  und eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\theta: U_1 \longrightarrow U_2$$

derart, dass der Graph von  $\theta$ , also

$$\Gamma = \{(x, \theta(x)) \mid x \in U_1\},$$

mit der Faser über  $b = \varphi(a)$ , geschnitten mit  $U_1 \times U_2$ , also

$$\{(x, v) \in U_1 \times U_2 \mid \varphi(x, v) = b\},$$

übereinstimmt. Sind auf  $E_1$  und  $E_2$  jeweils Basen fixiert mit Koordinaten  $(x_1, \dots, x_{n-m})$  bzw.  $(v_1, \dots, v_m)$  ( $n$  und  $m$  seien die Dimensionen von  $V$  und  $W$ ), so wird lokal die Faser durch den Graphen von  $m$  Funktionen  $\theta_1, \dots, \theta_m$  in den  $n - m$  Variablen  $(x_1, \dots, x_{n-m})$  gegeben. Die Faser ist dann nach den Variablen  $(v_1, \dots, v_m)$  „aufgelöst“, d.h. diese Koordinaten lassen sich unter der impliziten Bedingung, dass die Punkte zur Faser gehören sollen, explizit durch die anderen, frei wählbaren Koordinaten  $(x_1, \dots, x_{n-m})$  ausdrücken.

**Definition 53.7.** Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale reelle Vektorräume, es sei  $G \subseteq V$  offen und sei

$$\varphi: G \longrightarrow W$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei  $P \in G$  ein Punkt, in dem das totale Differential  $(D\varphi)_P$  surjektiv sei, und sei  $Y$  die Faser von  $\varphi$  durch  $P$ . Dann nennt man

$$T_P Y := \ker (D\varphi)_P = \{v \in V \mid (D\varphi)_P(v) = 0\}$$

den *Tangentialraum* an die Faser  $Y$  in  $P$ .

Häufig wird auch der an  $P$  angelegte affine Raum

$$P + \ker (D\varphi)_P = \{P + v \mid (D\varphi)_P(v) = 0\}$$

als Tangentialraum bezeichnet. In diesem Sinne ist der Tangentialraum kein Untervektorraum von  $V$ , da er nicht durch den Nullpunkt verlaufen muss, er ist aber die Verschiebung eines Untervektorraums. Solche Räume nennt

man *affin-lineare Unterräume*. Sie besitzen eine sinnvoll definierte Dimension, nämlich die Dimension des zugehörigen Vektorraumes. Der Tangentialraum an einem regulären Punkt zu einer Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  besitzt die Dimension  $n - m$ . Der Satz über implizite Abbildungen besagt, dass eine offene Teilmenge des Tangentialraumes an  $P$  sich bijektiv und differenzierbar auf eine offene Umgebung von  $P$  auf der Faser abbilden lässt. Der Tangentialraum ist also eine *lineare Approximation* der Faser.

**Beispiel 53.8.** Wir betrachten die differenzierbare Funktion

$$\varphi: \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \frac{x}{y}.$$

Die Jacobi-Matrix dieser Funktion ist

$$\left( \frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2} \right),$$

so dass die Funktion in jedem Punkt regulär ist und der Satz über implizite Abbildungen anwendbar ist. In diesem Fall kann man die Fasern auch direkt bestimmen. Die Bedingung

$$\frac{x}{y} = c$$

mit  $c \in \mathbb{R}$  führt auf  $x = cy$ , so dass die Fasern der Abbildung die *punktierten Geraden* (d.h. ein Punkt ist rausgenommen) durch den Nullpunkt sind (außer der  $x$ -Achse, auf der die Abbildung nicht definiert ist). Damit hat man explizit eine Auflösung der Faser nach  $x$  gegeben. Dass die Fasern unter dieser *Divisionsabbildung* (punktierter) Geraden sind ist ein Ausdruck davon, dass man Brüche erweitern kann, ohne ihren Wert zu ändern.

Der Tangentialraum in  $P = (x, y)$  wird nach der Definition durch den Kern der Jacobi-Matrix gegeben, und dieser wird durch den Vektor  $(x, y)$  selbst aufgespannt. Der Tangentialraum an  $P$  ist hier also die Gerade, die durch  $P$  und den Nullpunkt definiert ist, und stimmt (bis auf den Nullpunkt) mit der Faser überein.

**Beispiel 53.9.** Wir betrachten die Abbildung

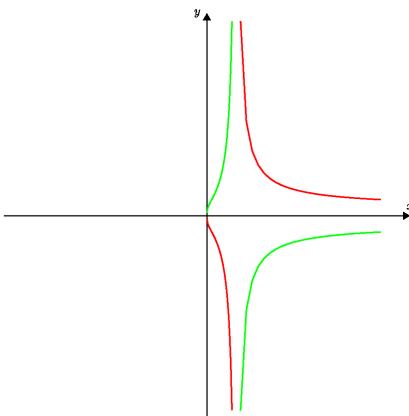
$$\varphi: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^y$$

und knüpfen an Beispiel 50.4 an. Der einzige kritische Punkt ist  $P = (1, 0)$ , ansonsten ist die Abbildung in jedem Punkt regulär und daher lassen sich lokal die Fasern als Graphen beschreiben. Die Faser über 1 besteht aus der durch  $x = 1$  gegebenen Geraden und der durch  $y = 0$  gegebenen Halbgeraden, die sich im kritischen Punkt senkrecht schneiden. Ansonsten sind die Fasern durch die Gleichung

$$x^y = c$$

mit einem  $c \in \mathbb{R}_+, c \neq 1$ , bestimmt (für nichtpositives  $c$  sind die Fasern leer). Wir schreiben diese Bedingung als  $e^{(\ln x)y} = c$  und daher als

$$(\ln x)y = \ln c.$$



Die Fasern der Abbildung  $(x, y) \mapsto x^y$  für  $c = e$  (rot) und  $c = -e$  (grün).

Wegen  $x \neq 1$  kann man dies zu  $y = \frac{\ln c}{\ln x}$  auflösen und wegen  $y \neq 0$  zu

$$x = e^{\frac{\ln c}{y}}.$$

Die Faser besteht jeweils aus zwei Komponenten, die  $x > 1$  bzw.  $x < 1$  entsprechen.

## 53. ARBEITSBLATT

### 53.1. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 53.1.** Formuliere und beweise den „Satz über die surjektive Abbildung“.

**Aufgabe 53.2.** Betrachte die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^3 - x^2 - 2x + 2.$$

Für welche Punkte  $P \in \mathbb{R}$  ist  $\varphi$  regulär? Was besagt der Satz über implizite Abbildungen in dieser Situation? Wie sieht lokal die Faser in einem regulären Punkt aus? Kann es leere Fasern geben? Bestimme die Faser über 0.

**Aufgabe 53.3.** Was besagt der Satz über implizite Abbildungen für den Fall einer stetig differenzierbaren Funktion  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ? Für welche Punkte  $P \in \mathbb{R}$  sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt? Wie sieht es aus, wenn  $\varphi$  ein Polynom ist?

**Aufgabe 53.4.** Was besagt der Satz über implizite Abbildungen für den Fall einer stetig differenzierbaren Funktion  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ? Für welche Punkte  $P \in \mathbb{R}^n$  sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt?

**Aufgabe 53.5.** Es seien

$$f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetig differenzierbare Funktionen, deren Ableitungen  $f'$  und  $g'$  stets positiv seien. Zeige, dass die Funktion

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto f(x) + g(y),$$

stetig differenzierbar und in jedem Punkt regulär ist. Man gebe explizit eine Beschreibung der Fasern von  $\varphi$  als Graph an.

**Aufgabe 53.6.** Beschreibe die Fasern der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy.$$

Man gebe, falls dies möglich ist, Diffeomorphismen zwischen  $\mathbb{R}$  und den Fasern von  $\varphi$  an.

**Aufgabe 53.7.** Beschreibe den Tangentialraum an die Faser in jedem regulären Punkt der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy.$$

**Aufgabe 53.8.** Beschreibe die Fasern der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + y^2.$$

Man gebe, falls dies möglich ist, Diffeomorphismen zwischen offenen Intervallen  $I \subseteq \mathbb{R}$  und (möglichst großen) offenen Teilmengen der Fasern von  $\varphi$  an.

**Aufgabe 53.9.** Beschreibe den Tangentialraum an die Faser in jedem regulären Punkt der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + y^2.$$

**Aufgabe 53.10.** Finde für die folgenden Kurven

$$\gamma: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

Abbildungen

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass das Bild von  $\gamma$  genau die Faser von  $\varphi$  über 0 ist.

- (1)  $\gamma(t) = (t, t^3)$ .
- (2)  $\gamma(t) = (t^3, t^3 + 1)$ .
- (3)  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ .

**Aufgabe 53.11.\***

Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion.

a) Realisiere den Graphen von  $f$  als Faser zu einer Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

über 0.

b) Sei  $f$  stetig differenzierbar. Zeige, dass die Punkte auf dem Graphen von  $f$  regulär sind.

**Aufgabe 53.12.** Es sei

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2.$$

Man fertige eine Skizze an, die die Fasern, die Tangentialräume und lokale Diffeomorphismen zwischen Tangentialraum und Faser sichtbar macht.

**Aufgabe 53.13.** Es sei

$$\varphi: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^y.$$

Man fertige Skizzen für den (1) Graph und (2) die Fasern und die Tangentialräume dieser Abbildung an.

**Aufgabe 53.14.** Es sei

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine stetige Abbildung und  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  die Faser über  $P \in \mathbb{R}^m$ . Zeige, dass es auch eine stetige Abbildung

$$\psi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

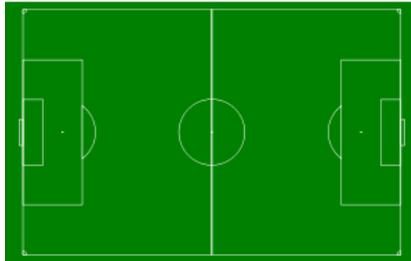
derart gibt, dass  $F$  die Faser von  $\psi$  über einem Punkt  $a \in \mathbb{R}$  ist.

**Aufgabe 53.15.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum. Zeige, dass es eine lineare Abbildung

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

in einen weiteren reellen endlichdimensionalen Vektorraum  $W$  derart gibt, dass  $U$  die Faser über  $0 \in W$  ist und dass  $\varphi$  in jedem Punkt  $v \in V$  regulär ist.

**Aufgabe 53.16.** Ein Fußballfeld soll in einen Park mit Erhebungen und mit Senken umgewandelt werden. Dabei sollen die Linien unverändert bleiben und alle anderen Punkte sollen ihre Höhe ändern. Ist dabei jede Vorgabe, welche umrandeten Gebiete erhöht oder gesenkt werden sollen, möglich? Ist jedes solche Vorhaben durch eine stetige oder eine differenzierbare Höhenfunktion durchführbar? Können im differenzierbaren Fall alle Punkte regulär sein?



**Aufgabe 53.17.** Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und

$$\varphi: G \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine stetig differenzierbare Abbildung, die im Punkt  $P \in G$  ein surjektives totales Differential besitze. Es sei

$$\psi: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

(mit  $U \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$  offen) ein lokaler Diffeomorphismus auf die Faser durch  $P$ , bei dem  $Q \in U$  auf  $P$  abgebildet wird. Zeige, dass man den Tangentialraum an die Faser durch  $P$  auch als

$$\left\{ P + (D\psi)_Q(u) \mid u \in \mathbb{R}^{n-m} \right\}$$

beschreiben kann.

Die nächste Aufgabe knüpft an Aufgabe 34.27 an.

**Aufgabe 53.18.** Im Nullpunkt  $0 \in \mathbb{R}^3$  befinde sich die Pupille eines Auges (oder eine Linse) und die durch  $x = -1$  bestimmte Ebene sei die Netzhaut  $N \cong \mathbb{R}^2$  (oder eine Fotoplatte). Bestimme die Abbildung

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die das Sehen (oder Fotografieren) beschreibt (d.h. einem Punkt des Halbraumes wird durch den Lichtstrahl ein Punkt der Netzhaut zugeordnet). Ist diese Abbildung differenzierbar? Für welche Punkte ist diese Abbildung regulär, wie sehen die Fasern aus?

**Aufgabe 53.19.** Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (t, x, y) \longmapsto -t^2 + x^2 + y^2.$$

Bestimme die regulären Punkte und die Fasern dieser Abbildung.

**Aufgabe 53.20.** Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \longmapsto (xy, yz).$$

Bestimme die regulären Punkte, die Fasern, das Bild und das Bild aller regulären Punkte dieser Abbildung.

**Aufgabe 53.21.** Beschreibe den Tangentialraum an die Faser in jedem regulären Punkt der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2.$$

**Aufgabe 53.22.\***

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \longmapsto (x^2 + y^2 + z^2, 2x + 3y + 4z).$$

a) Bestimme die regulären Punkte der Abbildung  $\varphi$ . Zeige, dass

$$P = (1, -2, 1)$$

regulär ist.

b) Beschreibe für den Punkt  $P = (1, -2, 1)$  den Tangentialraum an die Faser  $F$  von  $\varphi$  durch  $P$ .

c) Man gebe für  $P = (1, -2, 1)$  einen lokalen Diffeomorphismus zwischen einem offenen Intervall und einer offenen Umgebung von  $P$  in der Faser  $F$  durch  $P$  an.

### 53.2. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 53.23.** (4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 \cdot \sin y - y \cdot \cos(xy).$$

Zeige, dass die Faser durch den Punkt  $P = (2, 3)$  sich lokal durch eine differenzierbare Kurve

$$\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto \gamma(t),$$

mit  $\gamma(0) = P$  parametrisieren lässt, und bestimme die möglichen Werte der Ableitung  $\gamma'(0)$ .

**Aufgabe 53.24.** (4 Punkte)

Bestimme den Tangentialraum an die Faser im Punkt  $(2, -1, 3)$  der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \longmapsto \left( x^2 e^z - y^3, \frac{x}{e^{yz}} \right),$$

und zwar sowohl durch lineare Gleichungen als auch durch eine parametrisierte Gerade.

**Aufgabe 53.25.** (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2,$$

im Punkt  $P = (1, -1, 2)$ . Man gebe eine differenzierbare Abbildung

$$\psi: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

an, wobei  $U$  eine möglichst große offene Teilmenge des Tangentialraumes  $T_P F$  an die Faser  $F_P$  von  $\varphi$  durch  $P$  ist, die eine Bijektion zwischen  $U$  und  $V \cap F_P$  stiftet ( $P \in V \subseteq \mathbb{R}^3$  offen).

**Aufgabe 53.26.** (4 Punkte)

Es seien

$$\varphi_1, \varphi_2: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Abbildungen und seien  $F_1$  und  $F_2$  Fasern dieser Abbildungen, d.h. es sei  $F_1 = \varphi_1^{-1}(b_1)$  und  $F_2 = \varphi_2^{-1}(b_2)$  (für gewisse  $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ ). Zeige, dass es eine stetige Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

und ein  $a \in \mathbb{R}$  derart gibt, dass  $F_1 \cup F_2 = \varphi^{-1}(a)$  ist.

**Aufgabe 53.27.** (4 Punkte)

Man gebe explizit eine stetige Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

derart, dass die Faser von  $\varphi$  über 0 gleich  $I = \{(x, 0) \mid x \in [0, 1]\}$  ist.

**Aufgabe 53.28.** (5 Punkte)

Zeige, dass die Fasern der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - y^3,$$

in jedem Punkt  $P = (x, y)$  lokal homöomorph zu einem offenen reellen Intervall sind. D.h. dass es zu jedem Punkt  $P = (x, y)$  eine offene Umgebung  $(x, y) \in U$ , ein offenes Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  und eine stetige Bijektion

$$I \longrightarrow U \cap F_P,$$

gibt (wobei  $F_P$  die Faser von  $\varphi$  durch  $P$  bezeichnet), deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist.

## 54. VORLESUNG - EXTREMA UNTER NEBENBEDINGUNGEN

### 54.1. Extrema unter Nebenbedingungen.



**Beispiel 54.1.** Ein Nilpferd hat die ganze Nacht an Land gegrast und befindet sich gerade im Punkt  $P = (r, s) \in \mathbb{R}^2$ . Jetzt kommt plötzlich die heiße Sonne hervor und es muss möglichst schnell zurück in seinen Teich. Es sucht also den Punkt  $a = (x, y) \in M$  des Teichufers  $M$ , der seiner momentanen Position am nächsten ist, d.h. es soll die Abstandsfunktion

$$h(x, y) = d(P, (x, y)) = \sqrt{(x - r)^2 + (y - s)^2}$$

minimiert werden, wobei allerdings nur die Punkte  $(x, y) \in M$  relevant sind. Es geht also um ein Minimierungsproblem, wobei die Punkte die *Nebenbedingung* erfüllen müssen, zum Teichufer zu gehören. Das Teichufer werde mit Hilfe der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

als

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = b\}$$

zu einem gewissen  $b \in \mathbb{R}$  beschrieben, d.h., es liegt als Faser einer Funktion vor. Wenn der Teich beispielsweise eine Ellipse ist, so ist  $f(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2$ . Wir nehmen weiter an, dass die Funktion  $f$  stetig differenzierbar ist und jeder Punkt der Faser regulär ist. Kann man die Punkte des Teichufers, in denen ein lokales Extremum vorliegt, mit Mitteln der Differentialrechnung

charakterisieren? Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es lokal eine differenzierbare Parametrisierung des Teichufers, d.h. eine Funktion

$$\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

auf einem offenen Intervall  $I$ , deren Bild gerade ein Ausschnitt aus dem Teichufer ist. Insgesamt erhält man die zusammengesetzte Funktion

$$h \circ \gamma: I \longrightarrow \mathbb{R},$$

und genau dann besitzt  $h$  in  $a \in M$  ein lokales Extremum, wenn  $h \circ \gamma$  ein lokales Extremum in  $\gamma^{-1}(a) \in I$  besitzt. Auf  $h \circ \gamma$  kann man die Kriterien für lokale Extrema (also Satz 47.12 bzw. Satz 19.1) anwenden, da jetzt der Definitionsbereich (man hat die Nebenbedingung sozusagen eliminiert) eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ist. Wenn ein lokales Extremum vorliegt, so ist einerseits

$$(h \circ \gamma)'(\gamma^{-1}(a)) = (Dh)_a(\gamma'(\gamma^{-1}(a))) = 0.$$

Andererseits bestimmt  $\gamma'(\gamma^{-1}(a))$  den (eindimensionalen) Tangentialraum  $T_a M$ , und dieser ist wiederum der Kern des totalen Differentials  $(Df)_a$ . Daher müssen  $(Dh)_a$  und  $(Df)_a$  linear abhängig sein. Das Nilpferd muss also nach Punkten  $a \in M$  Ausschau halten, für die es ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit

$$(Dh)_a = \lambda (Df)_a$$

gibt.

**Satz 54.2.** *Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und sei*

$$f: U \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

*eine stetig differenzierbare Abbildung,  $n \geq m$ . Es sei  $M = f^{-1}(b)$  die Faser von  $f$  über  $b \in \mathbb{R}^m$ . Es sei*

$$h: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine differenzierbare Funktion und die eingeschränkte Funktion  $h|_M$  besitze im Punkt  $a \in M$  ein lokales Extremum auf  $M$  und  $a$  sei ein regulärer Punkt von  $f$ . Dann ist*

$$T_a M \subseteq \text{kern}(Dh)_a,$$

*d.h. die Linearform  $(Dh)_a$  verschwindet auf dem Tangentialraum an der Faser von  $f$  durch  $a$ . Die Linearform  $(Dh)_a$  ist eine Linearkombination aus den Linearformen*

$$(Df_1)_a, \dots, (Df_m)_a.$$

*Beweis.* Wir wenden den Satz über implizite Abbildungen auf den Punkt  $a \in M$  an. Es gibt also eine offene Menge  $a \in W$ ,  $W \subseteq U$ , eine offene Menge  $V \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$  und eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\psi: V \longrightarrow W$$

derart, dass  $\psi(V) \subseteq M \cap W$  ist und  $\psi$  eine Bijektion

$$\psi: V \longrightarrow M \cap W$$

induziert. Dabei ist  $\psi$  in jedem Punkt  $Q \in V$  regulär und für das totale Differential von  $\psi$  gilt

$$(Df)_{\psi(Q)} \circ (D\psi)_Q = 0.$$

Da  $h|_M$  in  $a$  ein lokales Extremum besitzt, besitzt auch  $h \circ \psi$  in  $Q = \psi^{-1}(a)$  (also  $a = \psi(Q)$ ) ein lokales Extremum. Nach Satz 47.12 (2) ist daher

$$(D(h \circ \psi))_Q = (Dh)_{\psi(Q)} \circ (D\psi)_Q = 0.$$

Somit ist einerseits

$$\text{bild}(D\psi)_Q \subseteq \text{kern}(Dh)_a$$

und andererseits

$$\text{bild}(D\psi)_Q = \text{kern}(Df)_a = T_a M.$$

Der Zusatz folgt, da  $\text{kern}(Df)_a$  der Durchschnitt der  $\text{kern}(Df_i)_a$ ,  $i = 1, \dots, m$ , ist und somit

$$\bigcap_{i=1}^m \text{kern}(Df_i)_a \subseteq \text{kern}(Dh)_a$$

gilt. Nach Aufgabe 54.1 folgt daraus, dass  $(Dh)_a$  zu dem von  $(Df_1)_a, \dots, (Df_m)_a$  erzeugten Untervektorraum gehört.  $\square$

Man beachte, dass dieser Satz nur ein notwendiges Kriterium für lokale Extrema angibt, kein hinreichendes. Die auf dem Satz über implizite Abbildungen beruhende Existenz der Bijektion  $\psi$  wird zwar im Beweis verwendet, sie muss aber nicht explizit bekannt sein, um die Kandidaten für lokale Extrema zu bestimmen. Eine explizite Bijektion kann aber helfen zu entscheiden, ob in den Kandidaten ein lokales Extremum vorliegt oder nicht. Wenn es nur endliche viele Kandidaten gibt, so kann man die Funktionswerte ausrechnen und auf diesem Weg zumindest die globalen Extrema finden.

**Korollar 54.3.** *Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und seien*

$$f: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$h: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig differenzierbare Funktionen. Es sei  $b \in \mathbb{R}$  und  $M = f^{-1}(b)$  die Faser von  $f$  über  $b$ . Die eingeschränkte Funktion  $h|_M$  besitze im Punkt  $a \in M$  ein lokales Extremum auf  $M$  und  $a$  sei ein regulärer Punkt von  $f$ . Dann ist  $(Dh)_a$  ein Vielfaches von  $(Df)_a$ , d.h. es gibt ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit

$$(Dh)_a = \lambda (Df)_a.$$

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus Satz 54.2.  $\square$

Den Faktor  $\lambda$  nennt man *Lagrange-Multiplikator*. Diese Aussage legt folgendes Verfahren nahe, Kandidaten für lokale Extrema (unter Nebenbedingung) zu finden: Man untersucht einfach, für welche (bezüglich  $f$ ) regulären Punkte  $a \in M$  eine lineare Abhängigkeit zwischen  $(Df)_a$  und  $(Dh)_a$  vorliegt.

**Beispiel 54.4.** Wir betrachten die Funktion

$$h(x, y) = x^3 - xy^2$$

auf dem Einheitskreis

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

und interessieren uns für die Punkte  $a \in K$ , auf denen  $h$  ein lokales Extremum annehmen kann. Das totale Differential von  $h$  ist

$$(3x^2 - y^2, -2xy)$$

und das totale Differential von

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

ist

$$(2x, 2y).$$

Gemäß Korollar 54.3 müssen wir die Punkte  $a \in K$  bestimmen, für die die beiden Differentiale linear abhängig sind. Die Determinante ist

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 3x^2 - y^2 & -2xy \end{pmatrix} &= -4x^2y - 6x^2y + 2y^3 \\ &= -10x^2y + 2y^3 \\ &= 2y(-5x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Somit liegt bei  $y = 0$  und bei  $y = \pm\sqrt{5}x$  lineare Abhängigkeit vor. Die Kreisbedingung führt somit auf die Punkte

$$\begin{aligned} a_1 = (1, 0), a_2 = (-1, 0), a_3 = \left( \sqrt{\frac{1}{6}}, \sqrt{5}\sqrt{\frac{1}{6}} \right), a_4 = \left( \sqrt{\frac{1}{6}}, -\sqrt{5}\sqrt{\frac{1}{6}} \right), \\ a_5 = \left( -\sqrt{\frac{1}{6}}, \sqrt{5}\sqrt{\frac{1}{6}} \right), a_6 = \left( -\sqrt{\frac{1}{6}}, -\sqrt{5}\sqrt{\frac{1}{6}} \right). \end{aligned}$$

**Korollar 54.5.** Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge, sei

$$f: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Linearform und sei  $M = f^{-1}(b)$  die (affin-lineare) Faser von  $f$  über  $b \in \mathbb{R}$ . Es sei  $h: U \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion auf  $U$ , deren Einschränkung  $h|_M$  auf  $M$  im Punkt  $a \in M$  ein lokales Extremum besitze. Dann ist  $(Dh)_a$  ein Vielfaches von  $f$ , d.h. es gibt ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit

$$(Dh)_a = \lambda f.$$

*Beweis.* Dies folgt bei  $f \neq 0$  wegen

$$(Df)_a = f$$

unmittelbar aus Korollar 54.3. Bei  $f = 0$  ist  $M = U$  (da ja  $M$  nach Voraussetzung nicht leer ist) und die Aussage folgt aus Satz 47.12 (2).  $\square$

**Beispiel 54.6.** Wenn man ein bestimmtes Budget  $b$  zur Verfügung hat und  $n$  verschiedene Produkte zum fixierten Stückpreis  $a_i$  kaufen möchte, wobei noch nicht feststeht, wie viel man von jedem Produkt kaufen möchte, so ergibt sich die Nebenbedingung

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

auf  $U = \mathbb{R}_+^n$ . Unter dieser Nebenbedingung möchte man den Nutzen optimieren. Betrachten wir eine Zielfunktion der Form

$$h(x_1, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Nach Korollar 54.5 ergibt sich die Bedingung

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \\ \alpha_2 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2-1} \dots x_n^{\alpha_n} \\ \vdots \\ \alpha_n x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Wir multiplizieren die  $i$ -te Bedingung mit  $x_i$  und erhalten die Bedingungen

$$\alpha_i x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} = \lambda a_i x_i.$$

Mit dem Ansatz

$$\lambda = c x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

ergibt sich

$$x_i = \frac{\alpha_i}{c a_i},$$

wobei man  $c$  so bestimmt, dass der Punkt auf dem affin-linearen Unterraum liegt, also

$$c = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{b}.$$

**Korollar 54.7.** Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge, sei

$$f: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion und sei  $M = f^{-1}(b)$  die Faser von  $f$  über  $b \in \mathbb{R}$ . Es sei  $h$  eine Linearform auf  $\mathbb{R}^n$ , deren Einschränkung  $h|_M$  auf  $M$  im (zu  $f$ ) regulären Punkt  $a \in M$  ein lokales Extremum besitze. Dann ist  $h$  ein Vielfaches von  $(Df)_a$ , d.h. es gibt ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit

$$h = \lambda (Df)_a.$$

*Beweis.* Dies folgt wegen

$$(Dh)_a = h$$

unmittelbar aus Korollar 54.3.  $\square$

**Beispiel 54.8.** Wir betrachten die Linearform

$$h(x, y, z) = 3x - 2y + 5z$$

auf der Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^4 = 1\}.$$

Die Lagrange-Bedingung wird zu

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 4z^3 \end{pmatrix}.$$

Dies führt auf  $x \neq 0$  und

$$\lambda = \frac{3}{2x}.$$

Damit ist

$$y = -\frac{1}{\lambda} = -\frac{2x}{3}$$

und

$$z = \sqrt[3]{\frac{5}{4\lambda}} = \sqrt[3]{\frac{5}{6}}x.$$

Dies führt insgesamt zur Bedingung

$$x^2 + \frac{4}{9}x^2 + \frac{5}{6}x^3\sqrt[3]{\frac{5}{6}} = 1,$$

die nach dem Zwischenwertsatz mindestens zwei Lösungen hat, die allerdings nicht so einfach explizit anzugeben sind.

**Korollar 54.9.** *Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und sei*

$$f: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine stetig differenzierbare Funktion. Die Faser  $M = f^{-1}(b)$  von  $f$  zu einem Punkt  $b \in \mathbb{R}$  sei kompakt und in jedem Punkt regulär. Dann ist jeder  $(n-1)$ -dimensionale Unterraum  $V \subset \mathbb{R}^n$  für mindestens einen Punkt  $a \in M$  gleich dem Tangentialraum  $T_aM$ .*

*Beweis.* Der  $(n-1)$ -dimensionale Untervektorraum  $V \subset \mathbb{R}^n$  wird durch eine Linearform beschrieben, sagen wir  $V = \text{kern } h$  mit

$$h(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n,$$

wobei nicht alle  $c_i$  gleich 0 sind. Die Funktion  $h$  nimmt nach Satz 36.12 auf der kompakten Teilmenge  $M$  ihr Maximum an, d.h. es gibt einen Punkt  $a \in M$  derart, dass  $h|_M$  in  $a$  insbesondere ein lokales Extremum besitzt. Da  $a$  ein regulärer Punkt ist, folgt nach Korollar 54.7, dass

$$h = (Dh)_a = \lambda(Df)_a$$

ist ( $\lambda \neq 0$ ) und somit ist

$$V = \text{kern } h = \text{kern } (Df)_a = T_aM.$$

□

Ohne die Kompaktheitsvoraussetzung und ohne die Regularitätsvoraussetzung ist die vorstehende Aussage nicht richtig, wie einfache Beispiele zeigen.

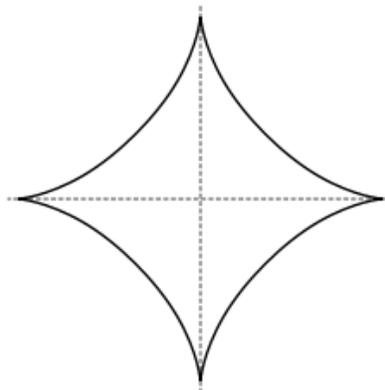
**Beispiel 54.10.** Es sei

$$f(x, y) = xy$$

und

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 1\}$$

die Standardhyperbel, realisiert als Faser einer Funktion. Jeder Punkt der Hyperbel ist ein regulärer Punkt von  $f$ , die Hyperbel ist nicht kompakt. Die beiden Linearformen  $x$  bzw.  $y$  besitzen kein lokales Extremum auf  $M$  und die beiden Koordinatenrichtungen treten nicht als Tangentialräume der Hyperbel auf.



**Beispiel 54.11.** Wir betrachten

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^3 + 27x^2y^2$$

und das zugehörige Nullstellengebilde, also

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}.$$

Dieses nennt man eine *Astroide*<sup>13</sup>. Dieses Nullstellengebilde liegt innerhalb der abgeschlossenen Kreisscheibe und ist daher kompakt. Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x^2 + y^2 - 1)^2 \cdot 2x + 54xy^2 = 6x \left( (x^2 + y^2 - 1)^2 + 27y^2 \right)$$

<sup>13</sup>Solche Gebilde werden im Rahmen der algebraischen Geometrie studiert, siehe den Kurs über algebraische Kurven auf Wikiversity.

und

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3(x^2 + y^2 - 1)^2 \cdot 2y + 54x^2y = 6y\left((x^2 + y^2 - 1)^2 + 27x^2\right).$$

Beide partiellen Ableitungen verschwinden genau für die vier Punkte

$$(0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0),$$

die alle zu  $Z$  gehören. Die  $x$ -Achse  $\mathbb{R}(1, 0)$  tritt nicht als Tangente von  $Z$  auf. Die zweite partielle Ableitung verschwindet nämlich nur bei  $y = 0$  oder  $(x, y) = (0, \pm 1)$ , in diesen Fällen verschwinden aber bereits beide partielle Ableitungen.

## 54. ARBEITSBLATT

### 54.1. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 54.1.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum über einem Körper  $K$  und es seien  $L, L_1, \dots, L_m$  Linearformen auf  $V$ . Zeige, dass die Beziehung

$$\bigcap_{i=1}^m \text{kern } L_i \subseteq \text{kern } L$$

genau dann gilt, wenn  $L$  zu dem von den  $L_1, \dots, L_m$  erzeugten Untervektorraum (im Dualraum) gehört.

**Aufgabe 54.2.** Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$h(x, y) = 5x + 3y$$

auf der Ellipse

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 = 1\}.$$

**Aufgabe 54.3.** Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$h(x, y) = x^2y^3$$

unter der Nebenbedingung

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x + 7y = 100\}.$$

**Aufgabe 54.4.\***

Für eine Party soll eine Bowle gemischt werden, wobei 100 Euro zur Verfügung stehen. Die Zutaten sind Orangensaft, Erdbeeren, Rum und Sekt. Die Preisfunktion ist

$$\mathbb{R}_+^4 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z, w) \longmapsto x + y + 5z + 3w.$$

Die Stimmungsfunktion  $h$  wird durch

$$h: \mathbb{R}_+^4 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z, w) \longmapsto x^3 y \sqrt{z} w,$$

beschrieben. Bei welchem Mischungsverhältnis wird die Stimmung optimiert? (Es genügt, den (die) kritischen Punkt(e) für die Lagrange-Bedingung auszurechnen).

**Aufgabe 54.5.** Man beweise die Formel aus Beispiel 54.6, indem man den durch die Linearform  $f$  gegebenen affinen Unterraum linear parametrisiert und das Optimierungsproblem für  $h$  auf dem zugehörigen  $\mathbb{R}^{n-1}$  betrachtet.

Man löse die folgende Aufgabe direkt und als eine Extremwertaufgabe unter Nebenbedingungen.

**Aufgabe 54.6.** Für welche Punkte  $(t, t^2)$  der Standardparabel wird der Abstand zum Punkt  $(0, 1)$  minimal?

**Aufgabe 54.7.** Bestimme sämtliche Tangenten an die Hyperbel

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}.$$

**Aufgabe 54.8.** Zeige, dass durch

$$[0, 2\pi[ \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (\cos^3 t, \sin^3 t),$$

eine bijektive Parametrisierung der Standardastroide

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - 1)^3 + 27x^2y^2 = 0\}$$

gegeben ist.

**Aufgabe 54.9.** Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$h(x, y) = x$$

auf der Standardastroide

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - 1)^3 + 27x^2y^2 = 0\}.$$

**Aufgabe 54.10.** Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$h(x, y) = x$$

auf der Standardastroide

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - 1)^3 + 27x^2y^2 = 0 \right\}$$

unter Verwendung der durch  $(x, y) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$  gegebenen Parametrisierung (siehe Aufgabe 54.8) von  $M$ .

**Aufgabe 54.11.** Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

auf

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20 \right\}.$$

**Aufgabe 54.12.** Bestimme die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 8(x^2 + y^2)$$

auf

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9 \right\}.$$

**Aufgabe 54.13.** Bestimme die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - x$$

auf

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

**Aufgabe 54.14.\***

Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$h(x, y) = 3x - 7y$$

auf der Ellipse

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + 2y^2 = 1 \right\}.$$

**Aufgabe 54.15.\***

Es sei

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion.

a) Zeige, dass  $g$  in einem Punkt  $a \in \mathbb{R}$  genau dann ein lokales Maximum besitzt, wenn die Einschränkung der Funktion

$$y: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto y,$$

auf den Graphen

$$\Gamma = \{(x, y) \mid y = g(x)\}$$

im Punkt  $(a, g(a))$  ein lokales Maximum besitzt.

b) Wie steht in dieser Situation der Satz über Extrema mit Nebenbedingungen mit dem eindimensionalen notwendigen Kriterium für ein lokales Extremum in Verbindung?

c) Man gebe ein Beispiel von zwei stetig differenzierbaren Funktionen

$$f, h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

und einem Punkt  $P \in \mathbb{R}^2$  derart, dass  $(Df)_P$  und  $(Dh)_P$  linear abhängig sind und dass  $h$  auf der Faser zu  $f$  durch  $P$  kein lokales Extremum besitzt.

**Aufgabe 54.16.\***

Es soll eine (quaderförmige) Schachtel mit den Seitenlängen  $a, b, c \in \mathbb{R}_+$  angefertigt werden, deren Inhalt gleich

$$abc = 1000 \text{ cm}^3$$

sein soll.

a) Wie müssen  $a, b, c$ , gewählt werden, damit der Materialaufwand für die sechs Seiten kritisch (also extremal sein könnte) wird?

b) Ist der Materialaufwand unter der in a) beschriebenen Situation minimal oder maximal?

c) Für die Luxusversion der Schachtel aus Teil a) soll die kleinste Seitenfläche (vorne und hinten) mit einer Goldfolie bedeckt werden. Die Materialkosten für eine solche Seite sind dreimal so hoch wie für eine normale Seite. Für welche Seitenlängen sind nun die Materialkosten extremal?

**54.2. Aufgaben zum Abgeben.****Aufgabe 54.17.** (4 Punkte)

Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$h(x, y, z) = 3x + 4y + 2z$$

auf dem Ellipsoid

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + y^2 + 3z^2 = 4\}.$$

**Aufgabe 54.18.** (4 Punkte)

Bestimme sämtliche Tangenten an die Astroide

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - 1)^3 + 27x^2y^2 = 0\}.$$

**Aufgabe 54.19.** (6 (1+1+1+3) Punkte)

Wir betrachten im Einheitswürfel  $E = [-1, 1]^3 \subseteq \mathbb{R}^3$  eingeschriebene Vierecke mit den Eckpunkten  $(-1 \leq a, b \leq 1)$

$$(1, a, -1), (b, 1, -1), (-1, -a, 1), (-b, -1, 1).$$

- (1) Zeige, dass die vier Punkte in einer Ebene liegen.
- (2) Unter welcher Bedingung an  $a, b$  handelt es sich um ein Raute?
- (3) Unter welcher Bedingung an  $a, b$  handelt es sich um ein Quadrat?
- (4) Für welche  $a, b$  erhält man eine Raute mit maximalem Flächeninhalt?

**Aufgabe 54.20.** (6 Punkte)

Es seien

$$f, g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig differenzierbare Funktionen derart, dass die Nullfasern

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\} \text{ und } N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$$

disjunkt sind und beide nur reguläre Punkte besitzen. Es sei

$$(P, Q) \in M \times N \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

ein Punktepaar, für das der Abstand zwischen solchen Punkten minimal wird. Zeige, dass die zugehörigen Tangenten parallel sind.

## 55. VORLESUNG - LIPSCHITZ-BEDINGUNG

### 55.1. Der Satz über die injektive Abbildung.

Als ein weiteres Korollar aus dem Satz über die Umkehrabbildung besprechen wir die Situation, wo das totale Differential injektiv ist.

**Satz 55.1.** *Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale reelle Vektorräume, sei  $G \subseteq V$  offen und sei*

$$\varphi: G \longrightarrow W$$

*eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei  $P \in G$  ein Punkt, in dem das totale Differential  $(D\varphi)_P$  injektiv sei. Dann gibt es eine offene Umgebung  $U$ ,  $P \in U \subseteq G$ , derart, dass  $\varphi|_U$  injektiv ist.*

*Beweis.* Es sei  $\dim(V) = k$  und  $\dim(W) = n$ . Es sei  $B = (D\varphi)_P(V)$  das Bild des totalen Differentials  $(D\varphi)_P$ . Nach Lemma 11.1 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)) (1) ist  $B \subseteq W$  ein Untervektorraum der Dimension  $\dim(B) = k$ . Wir ergänzen eine Basis von  $B$  durch  $w_1, \dots, w_{n-k}$  zu einer Basis von  $W$  und setzen  $C = \langle w_1, \dots, w_{n-k} \rangle$ . Wir betrachten die Abbildung

$$\psi: G \times C \longrightarrow W, (v, w) \longmapsto \varphi(v) + w,$$

wobei links und rechts zwei  $n$ -dimensionale Vektorräume stehen. Diese Abbildung kann man als die Hintereinanderschaltung

$$G \times C \xrightarrow{\varphi \times \text{Id}_C} W \times C \xrightarrow{+} W$$

auffassen. Daher ist die Gesamtabbildung stetig differenzierbar und das totale Differential ist  $(D\varphi)_P + i_C$ , wobei  $i_C: C \rightarrow W$  die lineare Einbettung des Unterraums ist. Dieses totale Differential ist surjektiv im Punkt  $(P, 0)$ , da sowohl  $B$  als auch  $C$  zum Bild gehören, und somit bijektiv. Wir können also den Satz über die Umkehrabbildung anwenden und erhalten offene Mengen  $U_1 \subseteq G \times C$  und  $U_2 \subseteq W$  derart, dass  $(\varphi \times \text{Id}_C)|_{U_1}$  ein Diffeomorphismus zwischen  $U_1$  und  $U_2$  ist. Dies können wir einschränken auf eine offene Menge der Form  $U_3 \times U_4 \subseteq U_1$  mit  $P \in U_3 \subseteq G$  und  $0 \in U_4 \subseteq C$ . Dann ist die Abbildung

$$\varphi|_{U_3}: U_3 \longrightarrow W$$

injektiv, da dies die Hintereinanderschaltung

$$U_3 \longrightarrow U_3 \times U_4 \longrightarrow U_2 \subseteq W$$

mit  $Q \mapsto (Q, 0)$  ist. □

## 55.2. Lipschitz-Bedingungen.



Rudolf Lipschitz (1832-1903)

Wir kehren zu Differentialgleichungen zurück und wollen den Satz von Picard-Lindelöf beweisen, einen wichtigen Existenz- und Eindeigkeitssatz für Lösungen. Dafür wird die Voraussetzung wesentlich sein, dass das Vektorfeld lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt.

**Definition 55.2.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein reelles Intervall,  $U \subseteq V$  eine offene Menge und

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf  $U$ . Man sagt, dass das Vektorfeld  $f$  einer *Lipschitz-Bedingung* genügt, wenn es eine reelle Zahl  $L \geq 0$  mit

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq L \cdot \|u - v\|$$

für alle  $t \in I$  und  $u, v \in U$  gibt.

Die reelle Zahl  $L$  nennt man auch eine *Lipschitz-Konstante* für das Vektorfeld  $f$ .

**Definition 55.3.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein reelles Intervall,  $U \subseteq V$  eine offene Menge und

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf  $U$ . Man sagt, dass das Vektorfeld  $f$  *lokal* einer *Lipschitz-Bedingung* genügt, wenn es zu jedem Punkt  $(t, v) \in I \times U$  eine offene Umgebung

$$(t, v) \in I' \times U' \subseteq I \times U$$

derart gibt, dass das auf  $I' \times U'$  eingeschränkte Vektorfeld einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Die folgende Aussage liefert ein wichtiges und leicht überprüfbares hinreichendes Kriterium, wann ein Vektorfeld lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt.

**Lemma 55.4.** *Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein reelles offenes Intervall,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und*

$$f: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n, (t, v_1, \dots, v_n) \longmapsto f(t, v_1, \dots, v_n),$$

*ein Vektorfeld auf  $U$  derart, dass die partiellen Ableitungen nach  $v_j$  existieren und stetig sind. Dann genügt  $f$  lokal einer Lipschitz-Bedingung.*

*Beweis.* Sei  $P = (t, v) = (t, v_1, \dots, v_n)$  ein Punkt in  $I \times U$  und sei

$$U(t, \epsilon) \times U(v, \epsilon)$$

eine offene Umgebung von  $P$  innerhalb von  $I \times U$  derart, dass auch

$$B = B(t, \epsilon) \times B(v, \epsilon) \subseteq I \times U$$

ist. Dieses  $B$  ist eine abgeschlossene Umgebung von  $P$  und daher kompakt. Da die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f_i}{\partial v_j}$  nach Voraussetzung stetig sind, gibt es nach Satz 36.12 eine gemeinsame Schranke  $c \in \mathbb{R}$  mit

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial v_j}(Q) \right\| \leq c$$

für alle  $Q \in B$ . Daher gibt es für die Matrizen  $\left( \frac{\partial f_i}{\partial v_j}(Q) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$  eine Schranke  $L$  mit

$$\left\| \left( \frac{\partial f_i}{\partial v_j}(Q) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right\| \leq L.$$

Man kann daher zu jedem festen Zeitpunkt  $s \in U(t, \epsilon)$  Lemma 51.3 anwenden und erhält für  $u, u' \in U(v, \epsilon)$  die Abschätzung

$$\|f(s, u) - f(s, u')\| \leq L \cdot \|u - u'\|.$$

□

### 55.3. Abbildungsräume und Supremumsnorm.

Wir stellen noch einige funktionalanalytische Hilfsmittel für den Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf bereit. Wir verallgemeinern den Begriff der punktwweisen (gleichmäßigen) Konvergenz von Funktionenfolgen auf metrische Räume.

**Definition 55.5.** Es sei  $T$  eine Menge,  $M$  ein metrischer Raum und

$$f_n: T \longrightarrow M$$

( $n \in \mathbb{N}$ ) eine Folge von Abbildungen. Man sagt, dass die Abbildungsfolge *punktweise konvergiert*, wenn für jedes  $x \in T$  die Folge

$$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$$

konvergiert.

**Definition 55.6.** Es sei  $T$  eine Menge,  $M$  ein metrischer Raum und

$$f_n: T \longrightarrow M$$

( $n \in \mathbb{N}$ ) eine Folge von Abbildungen, die punktweise konvergiert. Dann nennt man die Abbildung

$$T \longrightarrow M, x \longmapsto f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

die *Grenzabbildung* der Abbildungsfolge.

**Definition 55.7.** Es sei  $T$  eine Menge,  $M$  ein metrischer Raum und

$$f_n: T \longrightarrow M$$

( $n \in \mathbb{N}$ ) eine Folge von Abbildungen. Man sagt, dass die Abbildungsfolge *gleichmäßig konvergiert*, wenn es eine Abbildung

$$f: T \longrightarrow M$$

derart gibt, dass es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $n_0$  gibt mit

$$d(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon \text{ f\"ur alle } n \geq n_0 \text{ und alle } x \in T.$$

Bei gleichmäßiger Konvergenz liegt insbesondere punktweise Konvergenz vor und  $f$  ist die Grenzabbildung.

**Lemma 55.8.** *Es seien  $L$  und  $M$  metrische Räume und es sei*

$$f_n: L \longrightarrow M$$

*eine Folge von stetigen Abbildungen, die gleichmäßig gegen die Abbildung  $f$  konvergiert. Dann ist  $f$  stetig.*

*Beweis.* Sei  $x \in L$  und  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz gibt es ein  $n_0$  mit  $d(f_n(y), f(y)) \leq \epsilon/3$  für alle  $n \geq n_0$  und alle  $y \in L$ . Wegen der Stetigkeit von  $f_{n_0}$  in  $x$  gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) \leq \epsilon/3$  für alle  $y \in L$  mit  $d(x, y) \leq \delta$ . Für diese  $y$  gilt somit

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq d(f(x), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) + d(f_{n_0}(y), f(y)) \\ &\leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

□

Wir erinnern an die Definition der Supremumsnorm.

Es sei  $T$  eine Menge und

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann nennt man

$$\|f\| := \|f\|_T = \sup(|f(x)| \mid x \in T)$$

das *Supremum* (oder die *Supremumsnorm*) von  $f$ . Es ist eine nichtnegative reelle Zahl oder  $\infty$ .

Diese Definition kann man direkt verallgemeinern, wenn die Werte der Abbildungen in einem euklidischen Vektorraum liegen. Es sei also  $T$  eine Menge und  $E$  sei ein euklidischer Vektorraum. In dieser Situation definiert man zu einer Abbildung

$$f: T \longrightarrow E$$

$$\|f\| := \|f\|_T = \sup(\|f(x)\|, x \in T)$$

und nennt dies das *Supremum* (oder die *Supremumsnorm*) von  $f$  (falls das Supremum nicht existiert, ist dies als  $\infty$  zu interpretieren).

Wir setzen  $M = \text{Abb}(T, E)$ ; dies ist ein (i.A. unendlichdimensionaler) reeller Vektorraum. Die Supremumsnorm erfüllt die folgenden Eigenschaften (die geeignet zu interpretieren sind, falls  $\infty$  auftritt).

- (1) Es ist  $\|f\| \geq 0$  für alle  $f \in M$ .
- (2) Es ist  $\|f\| = 0$  genau dann, wenn  $f = 0$  ist.

(3) Für  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $f \in M$  gilt

$$\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|.$$

(4) Für  $g, f \in M$  gilt

$$\|g + f\| \leq \|g\| + \|f\|.$$

Wenn  $T$  ein metrischer Raum ist, so betrachtet man

$$C = \{f : T \rightarrow E \mid f \text{ stetig}\}.$$

Dieser ist ein reeller Untervektorraum von  $M$ . Wenn  $T \subseteq \mathbb{R}^k$  nichtleer, abgeschlossen und beschränkt ist, so ist nach Satz 36.12 das Supremum von  $\|f(x)\|$ ,  $x \in T$ , gleich dem Maximum, d.h. es gibt ein  $x \in T$  derart, dass  $\|f(x')\| \leq \|f(x)\|$  für alle  $x' \in T$  gilt. Daher ist in diesem Fall das Supremum stets eine reelle Zahl, und stimmt mit dem Maximum überein. Man spricht daher auch von der *Maximumsnorm*.

**Satz 55.9.** *Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}^k$  eine kompakte Teilmenge, es sei  $E$  ein euklidischer Vektorraum und es sei  $C = C(T, E)$  der Vektorraum der stetigen Abbildungen von  $T$  nach  $E$ . Dann ist  $C$ , versehen mit der Maximumsnorm, ein vollständiger metrischer Raum.*

*Beweis.* Es sei

$$f_n : T \longrightarrow E$$

eine Cauchy-Folge von stetigen Abbildungen. Wir müssen zeigen, dass diese Folge gegen eine Grenzabbildung konvergiert, die ebenfalls stetig ist. Zu jedem  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  derart, dass für  $n, m \geq n_0$  die Beziehung

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \epsilon$$

für alle  $x \in T$  gilt. Daher ist für jedes  $x \in T$  die Folge  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $E$  und somit, wegen der Vollständigkeit von euklidischen Räumen, konvergent in  $E$ . Wir nennen den Grenzwert dieser Folge  $f(x)$ , so dass sich insgesamt eine Grenzabbildung

$$f : T \longrightarrow E, x \longmapsto f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

ergibt, gegen die die Funktionenfolge punktweise konvergiert. Da  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge ist, gibt es zu jedem vorgegebenen  $\epsilon > 0$  stets ein  $n_0$  derart, dass die Cauchy-Bedingung für alle  $x \in T$  gilt, konvergiert die Funktionenfolge sogar gleichmäßig gegen  $f$  (und das bedeutet die Konvergenz in der Supremumsnorm). Aufgrund von Lemma 55.8 ist daher  $f$  stetig und daher ist  $f \in C$ .  $\square$

## 55. ARBEITSBLATT

## 55.1. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 55.1.\***

Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und sei

$$\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Kurve. Es sei  $t \in I$  ein Punkt mit  $\gamma'(t) \neq 0$ . Zeige auf zweifache Weise, dass es ein offenes Intervall  $t \in J \subseteq I$  derart gibt, dass  $\gamma|_J$  injektiv ist.

- (1) Mit dem Satz über die injektive Abbildung.
- (2) Direkt.

**Aufgabe 55.2.\***

Betrachte die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (s, t) \longmapsto (s, -s - t^2, t^3) = (x, y, z).$$

- a) Erstelle die Jacobi-Matrix von  $\varphi$ .
- b) Bestimme die regulären Punkte  $(s, t)$  von  $\varphi$ .
- c) Zeige, dass  $\varphi(s, t)$  die Bedingung

$$(x + y)^3 + z^2 = 0$$

erfüllt.

- d) Zeige, dass die Abbildung injektiv ist.

**Aufgabe 55.3.\***

Es sei

$$U = (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \setminus \{(2, 4), (4, 2)\}.$$

Begründe, ob die Abbildung

$$\varphi: U \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \longmapsto (x + y, xy, x^y) = (u, v, w).$$

injektiv ist oder nicht.

**Aufgabe 55.4.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein reelles Intervall,  $U \subseteq V$  eine offene Menge und

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf  $U$ . Zeige die folgenden Aussagen.

a) Wenn  $f$  (als Abbildung) Lipschitz-stetig ist, so genügt das Vektorfeld einer Lipschitz-Bedingung.

b) Wenn das Vektorfeld einer Lipschitz-Bedingung genügt, so sind für jedes feste  $t \in I$  die Abbildungen

$$U \longrightarrow V, v \longmapsto f(t, v),$$

Lipschitz-stetig.

c) Man gebe Beispiele, die zeigen, dass die Implikationen aus a) und b) nicht umkehrbar sind.

**Aufgabe 55.5.** Es sei

$$M = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{unendlich oft differenzierbar}\},$$

versehen mit der durch die Supremumsnorm gegebenen Metrik. Zeige, dass die Ableitung

$$M \longrightarrow M, f \longmapsto f',$$

keine starke Kontraktion ist.

**Aufgabe 55.6.** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $M$ , die gegen  $x \in M$  konvergiert. Es sei  $T$  eine Menge und es seien

$$f_n : T \longrightarrow M, t \longmapsto f_n(t) = x_n,$$

die zu  $x_n$  gehörenden konstanten Funktionen. Zeige, dass die Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen die konstante Funktion

$$f : T \longrightarrow M, t \longmapsto f(t) = x,$$

konvergiert.

**Aufgabe 55.7.** Es sei  $T$  eine endliche Menge und

$$f_n : T \longrightarrow X$$

eine Abbildungsfolge in einen metrischen Raum  $X$ . Zeige, dass diese Folge genau dann punktweise konvergiert, wenn sie gleichmäßig konvergiert.

**Aufgabe 55.8.** Es sei  $(Y, d)$  ein metrischer Raum und  $T \subseteq Y$  eine Teilmenge. Es sei  $T \subseteq \tilde{T} \subseteq \bar{T}$  und

$$g_n : \tilde{T} \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Folge von stetigen Funktionen. Zeige, dass diese Folge genau dann gleichmäßig konvergiert, wenn die auf  $T$  eingeschränkte Folge  $f_n = g_n|_T$  gleichmäßig konvergiert.

**Aufgabe 55.9.** Es sei  $T$  eine Menge und  $E$  ein euklidischer Vektorraum. Es sei  $M = \text{Abb}(T, E)$  versehen mit der Supremumsnorm. Beweise die folgenden Eigenschaften für diese „Norm“ (dabei ist der Wert  $\infty$  erlaubt und sinnvoll zu interpretieren).

- (1)  $\|f\| \geq 0$  für alle  $f \in M$ .
- (2)  $\|f\| = 0$  genau dann, wenn  $f = 0$  ist.
- (3) Für  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $f \in M$  gilt

$$\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|.$$

- (4) Für  $g, f \in M$  gilt

$$\|g + f\| \leq \|g\| + \|f\|.$$

**Aufgabe 55.10.** Es sei

$$C = C^0([0, 1], \mathbb{R})$$

die Menge der stetigen Funktionen, die mit der Supremumsnorm versehen sei. Skizziere zu  $\epsilon > 0$  die offene und die abgeschlossene  $\epsilon$ -Umgebung von einem  $f \in C$ .

Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Eine Abbildung

$$\|-\|: V \longrightarrow \mathbb{R}, v \longmapsto \|v\|,$$

heißt *Norm*, wenn die folgenden Eigenschaften für alle  $v, w \in V$  gelten.

- (1)  $\|v\| \geq 0$ .
- (2)  $\|v\| = 0$  genau dann, wenn  $v = 0$  ist.
- (3) Für  $\lambda \in \mathbb{K}$  und  $v \in V$  gilt

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|.$$

- (4) Für  $v, w \in V$  gilt

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

Die Norm zu einem Skalarprodukt erfüllt diese Eigenschaften.

**Aufgabe 55.11.** Es sei  $T$  eine Menge und  $E$  ein euklidischer Vektorraum. Es sei

$$M = \{f : T \rightarrow E \mid \|f\|_T < \infty\}$$

die Menge der beschränkten Abbildungen von  $T$  nach  $E$ . Zeige, dass die Supremumsnorm auf  $M$  eine Norm ist.

**Aufgabe 55.12.** Zeige, dass ein normierter  $\mathbb{R}$ -Vektorraum durch

$$d(u, v) := \|u - v\|$$

zu einem metrischen Raum wird.

**Aufgabe 55.13.** Es sei  $T$  eine Menge,  $E$  ein euklidischer Vektorraum und

$$M = \{f : T \rightarrow E \mid \|f\|_T < \infty\}$$

die Menge der beschränkten Abbildungen von  $T$  nach  $E$ . Zeige, dass eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $M$  genau dann gegen  $f \in M$  gleichmäßig konvergiert, wenn diese Folge im durch die Supremumsnorm gegebenen metrischen Raum  $M$  konvergiert.

## 55.2. Aufgaben zum Abgeben.

**Aufgabe 55.14.** (5 Punkte)

Es sei

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare reguläre Kurve. Zeige, dass die Faser über jedem Punkt  $c \in \mathbb{R}^n$  endlich ist.

**Aufgabe 55.15.** (6 Punkte)

Es sei  $G \subseteq \mathbb{R}^m$  offen und

$$\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}^n$$

eine in  $P \in G$  total differenzierbare Abbildung mit injektivem totalen Differential. Zeige, dass es eine offene Umgebung  $U$  von  $P$  mit  $\varphi^{-1}(\varphi(P)) \cap U = \{P\}$  gibt.

Tipp: Betrachte das totale Differential auf der Einheitssphäre. Der Satz über die injektive Abbildung ist hier nicht anwendbar.

**Aufgabe 55.16.** (4 Punkte)

Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  eine kompakte Teilmenge und  $E$  ein euklidischer Vektorraum. Es sei  $C = C^0(T, E)$  der Raum der stetigen Abbildungen von  $T$  nach  $E$ , versehen mit der Supremumsnorm. Es seien  $x_1, \dots, x_n \in T$  und  $y_1, \dots, y_n \in E$  Punkte. Zeige, dass die Teilmenge

$$\{f \in C \mid f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n\}$$

abgeschlossen in  $C$  ist.

**Aufgabe 55.17.** (4 Punkte)

Es sei  $M_k = ((a_{ij})_k)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$  eine Folge von reellen  $m \times n$ -Matrizen und

$$\varphi_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

die zugehörige Folge von linearen Abbildungen. Zeige, dass die Folgen der Einträge  $(a_{ij})_k$  für alle  $i, j$  genau dann konvergieren, wenn die Folge der Abbildungen punktweise konvergiert.

**Aufgabe 55.18.** (4 Punkte)

Es sei  $T$  eine Menge und

$$f_n: T \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine Folge von Abbildungen. Zeige, dass  $f_n$  genau dann gegen eine Grenzbildung

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

gleichmäßig konvergiert, wenn die Komponentenfunktionen  $(f_i)_n$  gleichmäßig gegen  $f_i$  konvergieren.

## 56. VORLESUNG - SATZ VON PICARD-LINDELÖF

## 56.1. Differential- und Integralgleichungen.

Mit dem Begriff des Integrals einer Kurve kann man Differentialgleichungen auch als Integralgleichungen schreiben.

**Lemma 56.1.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein reelles Intervall,  $U \subseteq V$  eine offene Menge und*

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

*ein stetiges Vektorfeld auf  $U$ . Es sei  $(t_0, w) \in I \times U$  vorgegeben. Dann ist eine stetige Abbildung*

$$v: J \longrightarrow U, t \longmapsto v(t),$$

*auf einem Intervall  $J \subseteq I$  mit  $t_0 \in J$  genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems (insbesondere muss  $v$  differenzierbar sein)*

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w,$$

*wenn  $v$  die Integralgleichung*

$$v(t) = w + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds$$

*erfüllt.*

*Beweis.* Sei die Integralbedingung erfüllt. Dann ist

$$v(t_0) = w$$

und aufgrund des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung gilt

$$v'(t) = f(t, v(t)).$$

Insbesondere sichert die Integralbedingung, dass  $v$  differenzierbar ist. Wenn umgekehrt  $v$  eine Lösung des Anfangswertproblems ist, so ist

$$v'(s) = f(s, v(s))$$

und daher

$$w + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds = w + \int_{t_0}^t v'(s) ds = w + v(t) - v(t_0) = v(t).$$

□

## 56.2. Der Satz von Picard-Lindelöf.

Wir kommen nun zum wichtigsten Existenz- und Eindeigkeitssatz für die Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

**Satz 56.2.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein reelles Intervall,  $U \subseteq V$  eine offene Menge und*

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

*ein Vektorfeld auf  $U$ . Es sei vorausgesetzt, dass dieses Vektorfeld stetig sei und lokal einer Lipschitz-Bedingung genüge. Dann gibt es zu jedem  $(t_0, w) \in I \times U$  ein offenes Intervall  $J$  mit  $t_0 \in J \subseteq I$  derart, dass auf diesem Intervall eine eindeutige Lösung für das Anfangswertproblem*

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w$$

*existiert.*

*Beweis.* Nach Lemma 56.1 ist eine stetige Abbildung

$$v: J \longrightarrow V$$

genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems, wenn  $v$  die Integralgleichung

$$v(t) = w + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds$$

erfüllt. Wir wollen die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung für diese Integralgleichung unter Verwendung des Banachschen Fixpunktsatzes dadurch erweisen, dass wir für die Abbildung (man spricht von einem *Funktional*)

$$\psi \longmapsto (t \mapsto w + \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds)$$

einen Fixpunkt finden. Hierbei stehen links und rechts Abbildungen in  $t$  (aus einem gewissen Teilintervall von  $I$  mit Werten in  $V$ ). Die Fixpunkteigenschaft  $H(\psi) = \psi$  bedeutet gerade, dass  $\psi(t) = w + \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds$  ist. Um den Fixpunktsatz anwenden zu können müssen wir ein Definitionsintervall festlegen, und eine Metrik auf dem Abbildungsraum nach  $V$  definieren, diesen metrischen Raum dann als vollständig und das Funktional als stark kontrahierend nachweisen. Aufgrund der Voraussetzung über die lokale Lipschitz-Bedingung gibt es eine offene Umgebung

$$(t_0, w) \in J' \times U(w, \epsilon) \subseteq I \times U$$

und ein  $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit

$$\|f(t, v) - f(t, \tilde{v})\| \leq L\|v - \tilde{v}\|$$

für alle  $t \in J'$  und  $v, \tilde{v} \in U(w, \epsilon)$ . Durch Verkleinern der Radien können wir annehmen, dass der Abschluss von  $J' \times U(w, \epsilon)$ , also das Produkt des

abgeschlossenen Intervalls mit der abgeschlossenen Kugel, ebenfalls in  $I \times U$  liegt. Aufgrund von Satz 36.12 gibt es ein  $M \in \mathbb{R}_+$  mit

$$\|f(t, v)\| \leq M \text{ für alle } (t, v) \in J' \times U(w, \epsilon)$$

(da diese Beschränktheit auf dem Abschluss gilt). Wir ersetzen nun  $J'$  durch ein kleineres Intervall

$$J = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subseteq J'$$

mit  $\delta > 0$ ,  $\delta \leq \epsilon/M$  und  $\delta \leq 1/(2L)$ . Wir betrachten nun die Menge der stetigen Abbildungen

$$\begin{aligned} C &= \{\psi : J \rightarrow V \mid \psi \text{ stetig, } \|\psi(t) - w\| \leq \epsilon \text{ für alle } t \in J\} \\ &= \{\psi : J \rightarrow V \mid \psi \text{ stetig, } \|\psi - w\| \leq \epsilon\}. \end{aligned}$$

Dabei wird also  $C$  mit der Maximumsnorm auf  $J$  versehen. Dieser Raum ist nach Satz 55.9 und nach Aufgabe 36.21 wieder ein vollständiger metrischer Raum. Wir betrachten nun auf diesem konstruierten Intervall  $J$  bzw. der zugehörigen Menge  $C$  die Abbildung

$$H: C \longrightarrow C, \psi \longmapsto H(\psi) = (t \mapsto w + \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds).$$

Dazu müssen wir zunächst zeigen, dass  $H(\psi)$  wieder zu  $C$  gehört. Für  $t \in J$  ist aber nach Satz 39.1

$$\begin{aligned} \|H(\psi)(t) - w\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds \right\| \\ &\leq \text{op: Betrag} \int_{t_0}^t \|f(s, \psi(s))\| ds \\ &\leq |t - t_0| M \\ &\leq \frac{\epsilon}{M} M \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

und  $H(\psi)$  ist stetig, da es durch ein Integral definiert wird. Zum Nachweis der Kontraktionseigenschaft seien  $\psi_1, \psi_2 \in C$  gegeben. Für ein  $t \in J$  ist

$$\begin{aligned} \|H(\psi_1)(t) - H(\psi_2)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, \psi_1(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, \psi_2(s)) ds \right\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^t (f(s, \psi_1(s)) - f(s, \psi_2(s))) ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, \psi_1(s)) - f(s, \psi_2(s))\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L \|\psi_1(s) - \psi_2(s)\| ds \right| \\ &= L \cdot \left| \int_{t_0}^t \|\psi_1(s) - \psi_2(s)\| ds \right| \\ &\leq L \cdot \left| \int_{t_0}^t \|\psi_1 - \psi_2\| ds \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq L |t - t_0| \cdot \|\psi_1 - \psi_2\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|\psi_1 - \psi_2\|. \end{aligned}$$

Da dies für jedes  $t \in J$  gilt, folgt aus dieser Abschätzung direkt

$$\|H(\psi_1) - H(\psi_2)\| \leq \frac{1}{2} \|\psi_1 - \psi_2\|,$$

d.h. es liegt eine starke Kontraktion vor. Daher besitzt  $H$  ein eindeutiges Fixelement  $\psi \in C$ , und diese Abbildung löst die Differentialgleichung. Dies gilt dann erst recht auf jedem offenen Teilintervall von  $J$ . Damit haben wir insbesondere bewiesen, dass es in  $C$  nur eine Lösung geben kann, wir wollen aber generell auf dem Intervall  $J$  Eindeutigkeit erhalten. Für eine Lösung  $v: J \rightarrow V$  gilt aber wegen der Integralbeziehung wieder

$$v(t) = w + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds$$

und die gleichen Abschätzungen wie weiter oben zeigen, dass die Lösung zu  $C$  gehören muss.  $\square$

### 56.3. Die Picard-Lindelöf-Iteration.

Der Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf ist prinzipiell konstruktiv. Darauf beruht die *Picard-Lindelöf-Iteration*, mit der man Lösungen approximieren kann. Die Güte der Approximationen wird dabei durch geeignete Normen auf Funktionenräumen gemessen, was wir nicht ausführen.

**Bemerkung 56.3.** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein reelles Intervall,  $U \subseteq V$  eine offene Menge und

$$F: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto F(t, v),$$

ein Vektorfeld auf  $U$ . Es sei  $(t_0, w) \in I \times U$  eine Anfangsbedingung. Es sei vorausgesetzt, dass dieses Vektorfeld stetig sei und lokal einer Lipschitz-Bedingung genüge. In der *Picard-Lindelöf-Iteration* definiert man iterativ eine Folge von Funktionen

$$\varphi_n: I \longrightarrow V$$

durch  $\varphi_0 = w$  (dies ist also die konstante Funktion mit dem Wert  $w$ ) und durch

$$\varphi_{n+1}(t) = w + \int_{t_0}^t F(s, \varphi_n(s)) ds.$$

Dann gibt es ein Teilintervall  $]a, b[ \subseteq I$  mit  $t_0 \in ]a, b[$  derart, dass für  $t \in ]a, b[$  die Folge  $\varphi_n(t)$  gegen einen Punkt  $\varphi(t)$  konvergiert, wobei gleichmäßige Konvergenz vorliegt. Die Grenzfunktion  $\varphi$  ist dann eine Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w.$$

Bei einer linearen Differentialgleichung mit stetigen Koeffizientenfunktionen konvergiert dieses Verfahren auf ganz  $I$ .

**Bemerkung 56.4.** Zu einem ortsunabhängigen Vektorfeld

$$F: I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (t, v) \longmapsto F(t, v) = F(t),$$

und der Anfangsbedingung  $v(t_0) = w$  führt die erste Picard-Lindelöf-Iteration auf

$$\varphi_1(t) = w + \int_{t_0}^t F(s, w) ds = w + \int_{t_0}^t F(s) ds = w + G(t),$$

wobei  $G(t)$  eine Stammkurve zu  $F(t)$  mit  $G(t_0) = 0$  sei. Die erste Iteration liefert hier also direkt die Lösung. Die kontrahierende Abbildung im Beweis zu Satz 56.2 ist in dieser Situation konstant.

Wir wenden dieses approximative Verfahren auf eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen an, für die wir die Lösung schon kennen (siehe Aufgabe 30.11).

**Beispiel 56.5.** Wir wenden die Picard-Lindelöf-Iteration auf die Differentialgleichung

$$y' = F(t, y) = ty$$

mit der Anfangsbedingung

$$y(0) = 1$$

an (die Lösung ist  $e^{\frac{1}{2}t^2}$ ). Daher ist  $\varphi_0 = 1$ . Die erste Iteration liefert

$$\varphi_1(t) = 1 + \int_0^t s ds = 1 + \frac{1}{2}t^2.$$

Die zweite Iteration liefert

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &= 1 + \int_0^t F(s, \varphi_1(s)) ds \\ &= 1 + \int_0^t F\left(s, 1 + \frac{1}{2}s^2\right) ds \\ &= 1 + \int_0^t s + \frac{1}{2}s^3 ds \\ &= 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4. \end{aligned}$$

Die dritte Iteration liefert

$$\begin{aligned} \varphi_3(t) &= 1 + \int_0^t F(s, \varphi_2(s)) ds \\ &= 1 + \int_0^t F\left(s, 1 + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{8}s^4\right) ds \\ &= 1 + \int_0^t s + \frac{1}{2}s^3 + \frac{1}{8}s^5 ds \\ &= 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{48}t^6. \end{aligned}$$

Dabei stimmt die  $i$ -te Iteration mit der Taylor-Entwicklung der Ordnung  $2i$  der Lösung überein.

**Bemerkung 56.6.** Es sei

$$v' = Mv$$

eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten auf dem  $\mathbb{R}^n$  und es sei eine Anfangsbedingung  $v(0) = w$  gegeben. Wir behaupten, dass die  $n$ -te Picard-Lindelöf-Iteration gleich

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M^{\circ k}(w) t^k$$

ist, wobei  $M^{\circ k}$  die  $k$ -fache Potenz der Matrix bezeichnet. Diese Aussage zeigen wir durch Induktion nach  $n$ . Für  $n = 0$  steht rechts einfach die konstante Kurve  $w$ . Sei die Aussage nun für  $n$  schon bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(t) &= w + \int_0^t M(\varphi_n(s)) ds \\ &= w + \int_0^t M \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M^{\circ k}(w) s^k \right) ds \\ &= w + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \int_0^t s^k M(M^{\circ k}(w)) ds \\ &= w + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \int_0^t s^k M^{\circ k+1}(w) ds \\ &= w + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{1}{(k+1)} t^{k+1} M^{\circ k+1}(w) \\ &= w + \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)!} t^{k+1} M^{\circ k+1}(w) \\ &= w + \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{1}{\ell!} t^\ell M^{\circ \ell}(w) \\ &= \sum_{\ell=0}^{n+1} \frac{1}{\ell!} t^\ell M^{\circ \ell}(w) \end{aligned}$$

und die Aussage ist auch für  $n + 1$  richtig. Diese Approximationen sind die Anfangsglieder in der „Exponentialreihe in dem Ausdruck“  $tM$ . Man kann zeigen, dass diese Exponentialreihe auf  $\mathbb{R}$  konvergiert und in der Tat die Lösung des Anfangswertproblems ist (der Satz von Picard-Lindelöf sichert nur die Konvergenz auf einer Intervallumgebung).

**Beispiel 56.7.** Wir wenden die Picard-Lindelöf-Iteration auf das Anfangswertproblem

$$v(0) = (0, 0)$$

zum Vektorfeld

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, x, y) \longmapsto (t^2 y - x y^2, x^3 - y + t)$$

an. Es ist

$$\varphi_0(t) = (0, 0).$$

Daher ist

$$\varphi_1(t) = \int_0^t (0, s) ds = \left(0, \frac{1}{2}t^2\right).$$

Es ist

$$F(s, \varphi_1(s)) = \left(s^2 \frac{1}{2}s^2, -\frac{1}{2}s^2 + s\right) = \left(\frac{1}{2}s^4, -\frac{1}{2}s^2 + s\right)$$

und daher

$$\varphi_2(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{2}s^4, -\frac{1}{2}s^2 + s\right) ds = \left(\frac{1}{10}t^5, -\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right).$$

Wegen

$$\begin{aligned} & F(s, \varphi_2(s)) \\ &= \left(s^2 \left(-\frac{1}{6}s^3 + \frac{1}{2}s^2\right) - \frac{1}{10}s^5 \left(-\frac{1}{6}s^3 + \frac{1}{2}s^2\right)^2, \left(\frac{1}{10}t^5\right)^3 - \left(-\frac{1}{6}s^3 + \frac{1}{2}s^2\right) + s\right) \\ &= \left(-\frac{1}{6}s^5 + \frac{1}{2}s^4 - \frac{1}{10}s^5 \left(\frac{1}{36}s^6 - \frac{1}{6}s^5 + \frac{1}{4}s^4\right), \frac{1}{1000}s^{15} + \frac{1}{6}s^3 - \frac{1}{2}s^2 + s\right) \\ &= \left(-\frac{1}{360}s^{11} + \frac{1}{60}s^{10} - \frac{1}{40}s^9 - \frac{1}{6}s^5 + \frac{1}{2}s^4, \frac{1}{1000}s^{15} + \frac{1}{6}s^3 - \frac{1}{2}s^2 + s\right) \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} & \varphi_3(t) \\ &= \int_0^t \left(-\frac{1}{360}s^{11} + \frac{1}{60}s^{10} - \frac{1}{40}s^9 - \frac{1}{6}s^5 + \frac{1}{2}s^4, \frac{1}{1000}s^{15} + \frac{1}{6}s^3 - \frac{1}{2}s^2 + s\right) ds \\ &= \left(-\frac{1}{4320}t^{12} + \frac{1}{660}t^{11} - \frac{1}{400}t^{10} - \frac{1}{36}t^6 + \frac{1}{10}t^5, \frac{1}{16000}t^{16} + \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right). \end{aligned}$$

## 56. ARBEITSBLATT

### 56.1. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 56.1.** Es seien  $L$  und  $M$  metrische Räume. Zeige, dass die Menge  $C$  der stetigen Abbildungen von  $L$  nach  $M$  durch

$$d(f, g) := \min(\sup(d(f(x), g(x)), x \in L), 1)$$

zu einem metrischen Raum wird.

**Aufgabe 56.2.** Es seien  $L$  und  $M$  metrische Räume, wobei  $M$  vollständig sei. Zeige, dass die Menge  $C$  der stetigen Abbildungen von  $L$  nach  $M$  durch

$$d(f, g) := \min(\sup(d(f(x), g(x)), x \in L), 1)$$

zu einem vollständigen metrischen Raum wird.

**Aufgabe 56.3.\***

Es sei

$$b \geq 1 \geq a > 0$$

fixiert und sei

$$M = \{f : [a, b] \rightarrow [a, b] \mid f \text{ stetig}\}.$$

a) Zeige, dass die Abbildung

$$H: M \longrightarrow M, f \longmapsto H(f) = \sqrt{f},$$

wohldefiniert ist.

b) Sei nun zusätzlich  $a > \frac{1}{4}$ . Zeige, dass die Abbildung  $H$  aus a) eine starke Kontraktion ist (wobei  $M$  mit der Maximumsnorm versehen sei).

c) Zeige, dass  $M$  durch die Maximumsnorm ein vollständiger metrischer Raum wird.

d) Bestimme den Fixpunkt von  $H$ .

**Aufgabe 56.4.** Es sei

$$f: I \times U \longrightarrow V$$

ein stetiges Vektorfeld, das auf einer offenen Menge  $U \subseteq V$  eines endlich-dimensionalen reellen Vektorraums definiert sei und lokal einer Lipschitz-Bedingung genüge. Es sei  $W \subseteq V$  ein Untervektorraum mit der Eigenschaft, dass für alle  $t \in I$  und  $P \in U \cap W$  die Beziehung  $f(t, P) \in W$  gilt. Zeige, dass eine Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = f(t, v) \text{ mit } v(t_0) = w \in U \cap W$$

ganz in  $W$  verläuft.

**Aufgabe 56.5.** Löse das Anfangswertproblem

$$y' = y + 1 \text{ mit } y(0) = 0.$$

mit der Picard-Lindelöf-Iteration.

**Aufgabe 56.6.\***

Bestimme für das Anfangswertproblem

$$y' = y \text{ mit } y(0) = 1$$

explizite Formeln für die Picard-Lindelöf-Iterationen.

**Aufgabe 56.7.** Bestimme in Beispiel 56.5 eine explizite Formel für die Iterationen  $\varphi_n$ .

**Aufgabe 56.8.\***

Bestimme die ersten drei Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = y^2 + t + yt^2$$

mit der Anfangsbedingung  $y(0) = 0$ .

**Aufgabe 56.9.** Bestimme die ersten vier Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung  $x(0) = 2$  und  $y(0) = -7$ .

**Aufgabe 56.10.\***

Bestimme die ersten drei Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t & 3 \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung  $x(0) = 0$  und  $y(0) = 1$ .

**Aufgabe 56.11.** Bestimme die ersten vier Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -t & t^2 \\ 2 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung  $x(0) = 1$  und  $y(0) = -1$ .

**Aufgabe 56.12.** Wogegen konvergiert die Picard-Lindelöf-Iteration in der Situation von Bemerkung 56.6, wenn  $w$  ein Eigenvektor von  $M$  ist?

**56.2. Aufgaben zum Abgeben.****Aufgabe 56.13.** (4 Punkte)

Wir betrachten das Vektorfeld

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, u, v) \longmapsto (t^2uv, u^2 - tv^2).$$

Bestimme für jedes  $t \in \mathbb{R}$  die nicht-regulären Punkte des Vektorfeldes

$$f_t: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (u, v) \longmapsto (t^2uv, u^2 - tv^2).$$

Welche Ortspunkte sind zu keinem Zeitpunkt regulär?

**Aufgabe 56.14.** (4 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(1) = (3, 2, 6)$$

zum ortsunabhängigen Vektorfeld

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (t, x, y, z) \longmapsto t^3(3, 1, 4) - e^{-2t}(2, -1, 7) + (t - t^2 e^t)(0, 4, 5) + (2, 2, 2).$$

**Aufgabe 56.15.** (3 Punkte)

Bestimme die ersten vier Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung  $x(0) = 4$  und  $y(0) = 5$ .

**Aufgabe 56.16.** (5 Punkte)

Bestimme die ersten vier Iterationen in der Picard-Lindelöf-Iteration für die lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ t & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung  $x(0) = 1$  und  $y(0) = 1$ .

## 57. VORLESUNG - GRADIENTENFELDER

## 57.1. Zur Eindeutigkeit der Lösungen von Differentialgleichungen.

**Satz 57.1.** *Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein reelles Intervall,  $U \subseteq V$  eine offene Menge und*

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

*ein stetiges Vektorfeld auf  $U$  das lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Es sei  $J \subseteq I$  ein offenes Teilintervall und es seien*

$$v_1, v_2: J \longrightarrow V$$

*Lösungen des Anfangswertproblems*

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w.$$

*Dann ist  $v_1 = v_2$ .*

*Beweis.* Wir betrachten die Menge

$$M = \{t \in J \mid v_1(t) = v_2(t)\}.$$

Wegen  $t_0 \in M$  ist diese Menge nicht leer. Zu jedem Punkt  $t \in I$  gibt es nach Satz 56.2 eine offene Intervallumgebung  $t \in J'$ , worauf es zu gegebener Anfangsbedingung  $v(t) = v_0$  genau eine Lösung der Differentialgleichung gibt. Wenn  $t \in M$  ist, so ist  $v_1(t) = v_2(t)$  und daher stimmen  $v_1$  und  $v_2$  in einer offenen Umgebung  $t \in J'$  mit der eindeutigen Lösung und damit untereinander überein. Also ist  $J' \subseteq M$ . Dies bedeutet, dass  $M$  eine offene Teilmenge von  $J$  ist. Andererseits sind  $v_1$  und  $v_2$  stetig und daher ist nach Aufgabe 34.15 die Menge  $M$  auch abgeschlossen in  $J$ . Da ein Intervall nach Satz 35.9 zusammenhängend ist, folgt  $M = J$ .  $\square$

Das folgende Beispiel zeigt, dass ohne die Lipschitz-Bedingung die Lösung eines Anfangswertproblems nicht eindeutig bestimmt ist. In diesem Beispiel ist das Vektorfeld nach  $v$  ableitbar, die Ableitung ist aber nicht stetig, so dass Lemma 55.4 nicht anwendbar ist.

**Beispiel 57.2.** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$v' = 3v^{2/3} \text{ mit } v(0) = 0$$

zum zeitunabhängigen Vektorfeld

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, v \longmapsto 3v^{2/3} = 3\sqrt[3]{v^2}.$$

Offensichtlich gibt es die stationäre Lösung

$$h(t) = 0,$$

aber auch

$$g(t) = t^3$$

ist eine Lösung, wie man durch Nachrechnen sofort bestätigt. Aus diesen beiden Lösungen kann man sich noch weitere Lösungen basteln. Seien dazu  $a < b$  reelle Zahlen. Dann ist auch

$$\varphi(t) = \begin{cases} (t-a)^3 & \text{für } t < a, \\ 0 & \text{für } a \leq t \leq b, \\ (t-b)^3 & \text{für } t > b, \end{cases}$$

eine Lösung. D.h. es gibt Lösungen, bei denen das Teilchen beliebig lange (im Zeitintervall von  $a$  nach  $b$ ) ruht und danach (und davor) sich bewegt. Sobald sich das Teilchen in einem Punkt  $\neq 0$  befindet, ist der Bewegungsablauf lokal eindeutig bestimmt.

**Bemerkung 57.3.** Zu einem stetigen Vektorfeld

$$f: I \times U \longrightarrow V, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

kann man sich fragen, ob es ein maximales Definitionsintervall  $J$  für die Lösung eines Anfangswertproblems

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w$$

gibt. Dies ist in der Tat der Fall, wenn das Vektorfeld lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt! Man kann nämlich alle Teilmengen

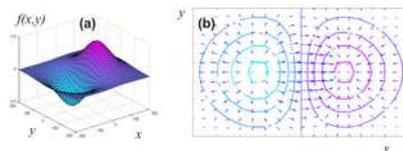
$$J \subseteq I \text{ offen, } t_0 \in J, \text{ es gibt eine Lösung } v_J \text{ auf } J$$

betrachten. Wegen Satz 57.1 stimmen zwei Lösungen  $v_J$  und  $v_{J'}$  auf dem Durchschnitt  $J \cap J'$  überein, und liefern daher eine eindeutige Lösung auf der Vereinigung  $J \cup J'$ . Daher enthält die Menge der Teilintervalle, auf denen eine Lösung definiert ist, ein maximales Teilintervall  $J$ .

Dieses Teilintervall kann kleiner als  $I$  sein. Die Grenzen des maximalen Teilintervalls, auf dem eine Lösung definiert ist, heißen auch *Entweichzeiten*.

Ein Beispiel für ein solches Verhalten hatten wir schon in Analysis 1 kennengelernt, siehe Beispiel 30.7.

## 57.2. Gradientenfelder.



**Definition 57.4.** Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum,  $U \subseteq V$  offen und

$$h: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Dann nennt man die Abbildung

$$U \longrightarrow V, P \longmapsto \text{Grad } h(P),$$

das zugehörige *Gradientenfeld*.

Ein Gradientenfeld ist also ein zeitunabhängiges Vektorfeld. Man spricht auch von einem *Potentialfeld*, die Funktion  $h$  (manchmal  $-h$ ) heißt dann ein Potential des Vektorfeldes. Wenn  $h$  zweimal stetig differenzierbar ist, so genügt nach Lemma 55.4 das zugehörige Gradientenfeld lokal einer Lipschitz-Bedingung.

Die folgende Aussage zeigt, dass die Lösungskurven der zugehörigen Differentialgleichung  $v' = \text{Grad } h(v)$  senkrecht auf den Fasern von  $h$  liegen. Die Fasern beschreiben, wo das Potential (oder die Höhenfunktion) konstant ist, die Lösungen beschreiben nach Satz 47.8 den Weg des steilsten Anstiegs. Wenn  $h$  beispielsweise die Höhenfunktion eines Gebirges ist, so gibt das Gradientenfeld in jedem Punkt den steilsten Anstieg an und die Trajektorie einer Lösungskurve beschreibt den Verlauf eines Baches (wir behaupten nicht, dass die Bewegung eines Wassermoleküls im Bach durch diese Differentialgleichung bestimmt ist, sondern lediglich, dass der zurückgelegte Weg, also

das Bild der Kurve, mit dem Bild der Lösungskurve übereinstimmt). Der Bach verläuft immer senkrecht zu den Höhenlinien.

**Lemma 57.5.** *Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum,  $U \subseteq V$  offen,*

$$h: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine differenzierbare Funktion und*

$$U \longrightarrow V, P \longmapsto G(P) = \text{Grad } h(P),$$

*das zugehörige Gradientenfeld. Es sei*

$$\varphi: J \longrightarrow U$$

*eine Lösung der Differentialgleichung*

$$v' = G(v).$$

*Dann steht  $\varphi'(t)$  senkrecht auf dem Tangentialraum  $T_{\varphi(t)}F$  der Faser  $F$  von  $h$  durch  $\varphi(t)$  für  $t \in J$ , für die  $\varphi(t)$  reguläre Punkte von  $h$  sind.*

*Beweis.* Sei  $P = \varphi(t)$  ein regulärer Punkt von  $h$  und sei  $v \in T_P F = \text{kern}(Dh)_P$  ein Vektor aus dem Tangentialraum. Dann gilt direkt

$$\langle v, \varphi'(t) \rangle = \langle v, G(\varphi(t)) \rangle = \langle v, \text{Grad } h(P) \rangle = (Dh)_P(v) = 0.$$

□

**Beispiel 57.6.** Wir betrachten die *Produktabbildung*

$$h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy.$$

Das zugehörige Gradientenfeld ist

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto G(x, y) = (y, x).$$

Die Fasern von  $h$  sind das Achsenkreuz (die Faser über 0) und die durch  $xy = c$ ,  $c \neq 0$ , gegebenen Hyperbeln. Die Lösungen der linearen Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

sind von der Form

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = (a \cosh t + b \sinh t, a \sinh t + b \cosh t)$$

mit beliebigen  $a, b \in \mathbb{R}$ , wie man direkt nachrechnet und was sich auch aus Lemma 42.1 bzw. Aufgabe 42.11 ergibt. Dabei ist  $\varphi(0) = (a, b)$ . Für  $a = b = 0$  ist dies die stationäre Lösung im Nullpunkt, in dem die Produktabbildung nicht regulär ist. Bei  $a = b = 1$  ist  $\varphi(t) = (e^t, e^t)$ , das Bild dieser Lösung ist die obere Halbdiaagonale (ohne den Nullpunkt), bei  $a = b = -1$  ist  $\varphi(t) = (-e^t, -e^t)$ , das Bild dieser Lösung ist die untere Halbdiaagonale, bei  $a = 1$  und  $b = -1$  ist  $\varphi(t) = (e^{-t}, -e^{-t})$ , das Bild dieser Lösung ist die untere Hälfte der Nebendiagonalen, bei  $a = -1$  und  $b = 1$  ist  $\varphi(t) = (-e^{-t}, e^{-t})$ , das Bild dieser Lösung ist die obere Hälfte der Nebendiagonalen.

Ansonsten treffen die Lösungskurven das Achsenkreuz in einem Punkt  $\neq (0, 0)$ . Wenn man diesen Punkt als Anfangswert zum Zeitpunkt  $t = 0$  nimmt, so kann man die Lösungskurven als

$$(a \cosh t, a \sinh t)$$

(zum Zeitpunkt  $t = 0$  befindet sich die Lösung auf der  $x$ -Achse im Punkt  $(a, 0)$ ), und als

$$(b \sinh t, b \cosh t)$$

(zum Zeitpunkt  $t = 0$  befindet sich die Lösung auf der  $y$ -Achse im Punkt  $(0, b)$ ) realisieren. Die Bahnen dieser Lösungen erfüllen die Gleichung  $x^2(t) - y^2(t) = a^2$  bzw.  $x^2(t) - y^2(t) = b^2$ , d.h. sie sind selbst Hyperbeln.

**Bemerkung 57.7.** Jedes stetige zeitunabhängige eindimensionale Vektorfeld ist ein Gradientenfeld. Ein solches Vektorfeld ist ja durch eine Funktion

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einem offenen Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  gegeben. Mit einer Stammfunktion

$$h: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

zu  $f$  kann man

$$f(P) = \text{Grad } h(P)$$

schreiben. Für einen regulären Punkt zu  $h$  ist das totale Differential injektiv und daher ist der Tangentialraum an der Faser der Nullraum. In diesem Fall ist also Lemma 57.5 ohne Relevanz.

### 57.3. Wegintegrale und Gradientenfelder.

**Lemma 57.8.** *Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und*

$$h: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine stetig differenzierbare Funktion mit dem zugehörigen Gradientenfeld*

$$G = \text{Grad } h.$$

*Es sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  ein stetig differenzierbarer Weg in  $U$ . Dann gilt für das Wegintegral*

$$\int_{\gamma} G = h(\gamma(b)) - h(\gamma(a)).$$

*D.h. das Wegintegral hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab.*<sup>14</sup>

*Beweis.* Aufgrund der Kettenregel ist

$$\int_{\gamma} G = \int_a^b \langle G(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

<sup>14</sup>In einem Potentialfeld ist also die geleistete Arbeit gleich der Potentialdifferenz von Start- und Endpunkt.

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \sum_{i=1}^n G_i(\gamma(t)) \cdot \gamma'_i(t) dt \\
&= \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \gamma'_i(t) dt \\
&= \int_a^b (h \circ \gamma)'(t) dt \\
&= h(\gamma(b)) - h(\gamma(a)).
\end{aligned}$$

□

**Korollar 57.9.** *Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und*

$$h: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine differenzierbare Funktion mit dem zugehörigen Gradientenfeld  $G = \text{Grad } h$ . Es sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  ein stetig differenzierbarer Weg mit  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Dann ist*

$$\int_{\gamma} G = 0.$$

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Lemma 57.8. □

**Satz 57.10.** *Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene zusammenhängende Teilmenge und*

$$G: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

*ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.*

- (1)  *$G$  ist ein Gradientenfeld.*
- (2) *Für jeden stetig differenzierbaren Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  hängt das Wegintegral  $\int_{\gamma} G$  nur vom Anfangspunkt  $\gamma(a)$  und Endpunkt  $\gamma(b)$  ab.*

*Beweis.* Die Implikation (1)  $\Rightarrow$  (2) folgt aus Lemma 57.8. Sei umgekehrt die Eigenschaft (2) erfüllt. Wir geben eine auf  $U$  definierte Funktion  $h$  an, die differenzierbar ist und deren Gradientenfeld gleich dem vorgegebenen Vektorfeld ist. Dazu sei ein Punkt  $P \in U$  fixiert. Für jeden Punkt  $Q \in U$  gibt es einen stetig differenzierbaren Weg<sup>15</sup>

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow U$$

mit  $\gamma(a) = P$  und  $\gamma(b) = Q$ . Wir setzen

$$h(Q) := \int_{\gamma} G.$$

Aufgrund der vorausgesetzten Wegunabhängigkeit des Integrals ist  $h(Q)$  wohldefiniert. Wir müssen zeigen, dass diese so definierte Funktion in jedem

<sup>15</sup>Aus der Existenz eines verbindenden stetigen Weges folgt die Existenz eines verbindenden stetig differenzierbaren Weges. Man könnte also auch diese Eigenschaft als Definition für zusammenhängend nehmen.

Punkt  $Q \in U$  und in jede Richtung  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  differenzierbar ist und die Richtungsableitung mit  $\langle G(Q), v \rangle$  übereinstimmt. Dazu betrachten wir

$$h(Q+tv) - h(Q) = \int_{\delta} G = \int_0^t \langle G(Q+sv), v \rangle ds = \int_0^t \sum_{i=1}^n G_i(Q+sv) \cdot v_i ds,$$

wobei  $\delta$  der verbindende lineare Weg von  $Q$  nach  $Q+tv$  auf  $[0, t]$  sei (und  $t$  hinreichend klein sei, so dass  $Q+tv \in U$  ist). Für den Differentialquotienten ist

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(Q+tv) - h(Q)}{t} &= \sum_{i=1}^n \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t G_i(Q+sv) \cdot v_i ds \\ &= \sum_{i=1}^n G_i(Q) \cdot v_i \\ &= \langle G(Q), v \rangle. \end{aligned}$$

Somit existiert die Richtungsableitung von  $h$  in Richtung  $v$  und hängt stetig von  $Q$  ab. Diese Gleichung zeigt ferner

$$(Dh)_Q(v) = (D_v h)(Q) = \langle G(Q), v \rangle,$$

so dass  $G$  das Gradientenfeld zu  $h$  ist. □

## 57. ARBEITSBLATT

### 57.1. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 57.1.** Skizziere die Höhenlinien und das Gradientenfeld zur Funktion

$$h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto 2(x-3)^2 + 3(y-1)^2.$$

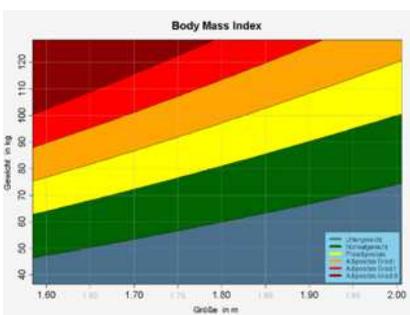
**Aufgabe 57.2.** Der Body-Mass-Index wird bekanntlich über die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, (m, l) \longmapsto \frac{m}{l^2},$$

berechnet, wobei  $m$  für die Masse und  $l$  für die Länge eines Menschen (oder eines Tieres, einer Pflanze, eines Gebäudes) steht (in den Einheiten Kilogramm und Meter).

- (1) Für welche Punkte ist diese Abbildung regulär?
- (2) Skizziere das zugehörige Gradientenfeld.
- (3) Wenn man seinen Body-Mass-Index verringern möchte, und dabei dem Gradienten dieser Abbildung vertraut, sollte man dann besser abnehmen oder größer werden? Inwiefern hängt dies vom Punkt, inwiefern von den gewählten Einheiten ab?
- (4) Wie lassen sich die Fasern dieser Abbildung als Graphen von Funktionen beschreiben?

- (5) Berechne die Hesse-Matrix von  $\varphi$  und bestimme ihren Typ in jedem Punkt.
- (6) Zu welchen Daten wird das Maximum bzw. das Minimum des Body-Mass-Index angenommen, wenn man ihn auf  $[30, 300] \times [1, 2]$  einschränkt, und welche Werte besitzt er dann?
- (7) Modelliere die Abbildung, die den Menschen aus einer Menge  $T$  ihren Body-Mass-Index zuordnet, mittels Messungen, Produktabbildung und Hintereinanderschaltung.



**Aufgabe 57.3.** Es sei

$$h: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und  $P \in \mathbb{R}^n$  ein kritischer Punkt zu  $h$ . Wie sieht die Lösung des Anfangswertproblems

$$v(0) = P$$

zum zugehörigen Gradientenfeld  $\text{Grad } h(P)$  aus?

**Aufgabe 57.4.\***

Bestimme die Lösung zum Anfangswertproblem

$$v' = \text{Grad } h(v)$$

mit  $v(0) = w$  ( $w \in \mathbb{R}^2$ ) zum Gradientenfeld zur Funktion

$$h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + y^2.$$

**Aufgabe 57.5.** Bestimme die Lösung zum Anfangswertproblem

$$v' = \text{Grad } h(v)$$

mit  $v(0) = w$  ( $w \in \mathbb{R}^3$ ) zum Gradientenfeld zur Funktion

$$h: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto x^2 - y^2 + 3yz.$$

**Aufgabe 57.6.** Vergleiche Lemma 47.11 und Lemma 57.5.

**Aufgabe 57.7.** Berechne die ersten drei Iterationen der Picard-Lindelöf-Iteration zum Anfangswertproblem

$$v' = \text{Grad } h(v) \text{ und } v(0) = (3, 2)$$

zu

$$h(x, y) = x^3 - xy^2 + y^2.$$

**Aufgabe 57.8.\***

Es sei

$$G: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein Gradientenfeld und sei

$$\varphi: J \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

( $J \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall) eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung  $v' = G(v)$ . Es gelte  $\varphi'(t) \neq 0$  für alle  $t \in J$ . Zeige, dass  $\varphi$  injektiv ist.

**Aufgabe 57.9.\***

Es sei

$$h: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion und

$$G(P) = \text{Grad } h(P)$$

das zugehörige Gradientenfeld. Es sei

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Lösung zur zugehörigen Differentialgleichung, die eine Faser  $F$  zu  $h$  zu zwei verschiedenen Zeitpunkten  $t_0 < t_1$  trifft. Zeige, dass  $\varphi|_{[t_0, t_1]}$  konstant ist.

**Aufgabe 57.10.\***

Es sei

$$h: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion und

$$G(P) = \text{Grad } h(P)$$

das zugehörige Gradientenfeld. Es sei

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Lösung zur zugehörigen Differentialgleichung und es sei  $t \in \mathbb{R}$  ein Zeitpunkt mit

$$\varphi'(t) = 0.$$

- a) Es sei  $h$  zweimal stetig differenzierbar. Zeige, dass  $\varphi$  konstant ist.  
 b) Zeige durch ein Beispiel, dass ohne die Voraussetzung aus a)  $\varphi$  nicht konstant sein muss.

### Aufgabe 57.11.\*

Es sei

$$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetiges Vektorfeld, wobei die  $i$ -te Komponente nur von der  $i$ -ten Variablen abhängen möge. Es sei

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow U$$

ein stetig differenzierbarer Weg. Zeige, dass das Wegintegral  $\int_{\gamma} F$  nur von  $\gamma(a)$  und  $\gamma(b)$  abhängt.

### Aufgabe 57.12.\*

Fertige eine Illustration zu Beispiel 57.6 an.

## 57.2. Aufgaben zum Abgeben.

### Aufgabe 57.13. (4 Punkte)

Wir betrachten das zeitunabhängige Vektorfeld

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, v \longmapsto 3v^{2/3} = 3\sqrt[3]{v^2}.$$

Zeige direkt, dass dieses Vektorfeld stetig ist, aber nicht lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt.

### Aufgabe 57.14. (3 Punkte)

Es sei

$$h: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Linearform. Bestimme das zugehörige Gradientenfeld und die Lösungen der zugehörigen Differentialgleichung.

**Aufgabe 57.15.** (4 Punkte)

Bestimme die Lösungen der Differentialgleichung, die zum Gradientenfeld der Funktion

$$h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x + y^2,$$

gehört.

**Aufgabe 57.16.** (3 Punkte)

Welche linearen Vektorfelder

$$G: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, v \longmapsto Mv,$$

sind Gradientenfelder? Wie sehen die Potentialfunktionen dazu aus?

**Aufgabe 57.17.** (5 Punkte)

Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Zeige, dass  $U$  genau dann zusammenhängend ist, wenn man je zwei Punkte  $P, Q \in U$  durch einen stetig differenzierbaren Weg verbinden kann.

Tipp: Man denke an den Beweis von Satz 35.13.

## 58. VORLESUNG - INTEGRABILITÄTSBEDINGUNG

Um eine weitere wichtige Charakterisierung für Gradientenfelder beweisen zu können, müssen wir wissen, wie sich Integrale verhalten, die von Parametern abhängen.

## 58.1. Differenzierbarkeit des Integrals.

Wir beginnen mit einem Beispiel.

**Beispiel 58.1.** Wir betrachten das Integral

$$\int_1^2 t^x dt,$$

wobei  $x > -1$  sei. Eine Stammfunktion zu  $t \mapsto t^x$  ist durch  $\frac{1}{x+1}t^{x+1}$  gegeben. Daher ist

$$\int_1^2 t^x dt = \left( \frac{1}{x+1} t^{x+1} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{x+1} (2^{x+1} - 1) = g(x).$$

Diese Funktion  $g(x)$  drückt den Wert des bestimmten Integrals zum Parameter  $x$  aus. Ein Blick auf die Bauart zeigt, dass  $g$  stetig und auch differenzierbar ist, und zwar ist nach der Produktregel

$$g'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} (2^{x+1} - 1) + \frac{1}{x+1} ((\ln 2) 2^{x+1}).$$

Andererseits kann man auch die Funktion  $t^x$  nach  $x$  ableiten und erhält

$$\frac{\partial}{\partial x} t^x = (\ln t) t^x.$$

Eine Stammfunktion nach  $t$  zu dieser Funktion findet man mittels partieller Integration, nämlich

$$\int (\ln t) t^x = (\ln t) \frac{t^{x+1}}{x+1} - \int \frac{1}{t} \cdot \frac{t^{x+1}}{x+1},$$

und somit ist

$$\frac{\ln t}{x+1} \cdot t^{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} t^{x+1}$$

eine Stammfunktion. Daher ist

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\partial}{\partial x} t^x dt &= \left( \frac{\ln t}{x+1} \cdot t^{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} t^{x+1} \right) \Big|_1^2 \\ &= \frac{\ln 2}{x+1} \cdot 2^{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} 2^{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Dies stimmt mit der Ableitung von  $g$  überein, d.h. es ist

$$\left( x \mapsto \int_1^2 t^x dt \right)' = \int_1^2 \frac{\partial}{\partial x} t^x dt.$$

Dahinter verbirgt sich ein allgemeiner Zusammenhang, der in Satz 58.3 beschrieben wird.

**Satz 58.2.** *Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $[a, b]$  ein kompaktes Intervall. Es sei*

$$f: X \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

*eine stetige Funktion. Dann ist auch die Funktion*

$$X \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \int_a^b f(x, t) dt,$$

*stetig.*

*Beweis.* Aufgrund von Lemma 34.3 müssen wir für jede konvergente Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  mit dem Grenzwert  $x$  zeigen, dass die Folge der Integrale

$$\int_a^b f(x_n, t) dt$$

gegen

$$\int_a^b f(x, t) dt$$

konvergiert. Aufgrund von Lemma 23.16 genügt es zu zeigen, dass die Funktionenfolge  $f(x_n, -)$  gleichmäßig gegen  $f(x, -)$  konvergiert. Nehmen wir also an, dass diese Folge nicht gleichmäßig konvergiert. Dann gibt es ein  $\epsilon > 0$  mit der Eigenschaft, dass es zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $m \geq n$  und ein  $t_m \in [a, b]$  mit  $|f(x_m, t_m) - f(x, t_m)| \geq \epsilon$  gibt. So können wir eine Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit

zugehörigen Punkten  $t_{n_k}$  konstruieren, die diese Abstandbedingung erfüllen. Wegen Bolzano Weierstraß gibt es zu dieser Folge in  $[a, b]$  eine konvergente Teilfolge, und durch Umbenennen können wir annehmen, dass die Folge  $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert, sagen wir gegen  $t \in [a, b]$ . Wegen der Stetigkeit von  $f$  und den Konvergenzeigenschaften gibt es ein  $k_0$  derart, dass für alle  $k \geq k_0$  die Abschätzungen  $|f(x_{n_k}, t_{n_k}) - f(x, t)| \leq \frac{1}{3}\epsilon$  und  $|f(x, t_{n_k}) - f(x, t)| \leq \frac{1}{3}\epsilon$  gelten. Damit ist

$$\begin{aligned} |f(x_{n_k}, t_{n_k}) - f(x, t_{n_k})| &\leq |f(x_{n_k}, t_{n_k}) - f(x, t)| + |f(x, t) - f(x, t_{n_k})| \\ &\leq \frac{2\epsilon}{3} \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

ein Widerspruch. □

Unter stärkeren Voraussetzungen hängen Integrale sogar differenzierbar von Parametern ab.

**Satz 58.3.** *Es seien  $I = [a, b]$  und  $J$  reelle Intervalle,*

$$f: I \times J \longrightarrow \mathbb{R}, (t, x) \longmapsto f(t, x),$$

*eine stetige Abbildung, die in Richtung der Variablen  $x$  stetig partiell differenzierbar sei. Dann ist die Abbildung*

$$J \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \int_a^b f(t, x) dt,$$

*(nach  $x$ ) differenzierbar und es gilt*

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( x \mapsto \int_a^b f(t, x) dt \right) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) dt.$$

*Beweis.* Aufgrund der Differenzierbarkeit von  $f(t, x)$  nach  $x$  gibt es zu jedem  $(s, p) \in I \times J$  nach Satz 18.5 eine in  $x$  stetige Funktion  $r_s(x)$  mit  $r_s(p) = 0$  und mit

$$f(s, x) = f(s, p) + \left( \frac{\partial}{\partial x} f(s, p) \right) (x - p) + r_s(x)(x - p).$$

Wir setzen

$$r(s, x) = r_s(x).$$

Wir zeigen zuerst, dass diese Funktion in den zwei Variablen  $s$  und  $x$  in jedem Punkt stetig ist. Bei  $x \neq p$  kann man

$$r(s, x) = \frac{f(s, x) - f(s, p)}{x - p} - \frac{\partial}{\partial x} f(s, p)$$

auffösen und erhält so die Stetigkeit, da ja die partielle Ableitung nach Voraussetzung stetig ist. Bei  $x = p$  verwenden wir das Folgenkriterium für die Stetigkeit. Sei also  $(s_n, x_n)$  eine Folge, die gegen

$$(s, x) = (s, p)$$

konvergiert. Wir können dabei annehmen, dass  $x_n \neq p$  für alle  $n$  ist, da ja  $r(s_n, p) = 0$  ist. Es ist

$$\begin{aligned} |r(s_n, x_n) - r(s, p)| &= |r(s_n, x_n)| \\ &= \left| \frac{f(s_n, x_n) - f(s_n, p)}{x_n - p} - \frac{\partial}{\partial x} f(s_n, p) \right|. \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es zu jedem  $n$  ein  $c_n \in [x_n, p]$  mit

$$\frac{f(s_n, x_n) - f(s_n, p)}{x_n - p} = \frac{\partial}{\partial x} f(s_n, c_n)$$

und somit ist der obige Ausdruck gleich

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} f(s_n, c_n) - \frac{\partial}{\partial x} f(s_n, p) \right|.$$

Wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitung und wegen  $c_n \rightarrow p$  wird dies beliebig klein.

In der eingangs formulierten Identität sind also alle Bestandteile stetig. Daher kann man beidseitig über  $[a, b]$  integrieren und erhält ( $x - p$  ist in der Integration konstant)

$$\int_a^b f(t, x) dt = \int_a^b f(t, p) dt + (x - p) \left( \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(t, p) dt \right) + (x - p) \int_a^b r(t, x) dt.$$

Der Fehlerausdruck

$$R(x) = \int_a^b r(t, x) dt$$

ist stetig in  $x$ , da  $r(t, x)$  stetig ist und wegen der Stetigkeit des Integrals. Ferner ist  $R(p) = \int_a^b r(t, p) dt = 0$ , so dass die Funktion  $x \mapsto \int_a^b f(t, x) dt$  linear approximierbar und damit differenzierbar ist.  $\square$

**Satz 58.4.** *Es sei  $I = [a, b]$  ein reelles Intervall,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und*

$$f: I \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine stetige Abbildung, die in Richtung einer jeden Variablen  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , stetig partiell differenzierbar sei. Dann ist die Abbildung*

$$U \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \int_a^b f(t, x) dt,$$

*partiell differenzierbar und es gilt*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( x \mapsto \int_a^b f(t, x) dt \right) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_i} f(t, x) dt.$$

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Satz 58.3.  $\square$

## 58.2. Die Integrabilitätsbedingung.

Wie kann man erkennen, ob ein gegebenes Vektorfeld ein Gradientenfeld ist? Eine notwendige Bedingung schlägt sich in der folgenden Definition nieder.

**Definition 58.5.** Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und

$$G: U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ein differenzierbares Vektorfeld. Man sagt, dass  $G$  die *Integrabilitätsbedingung* erfüllt (oder *lokal integrabel* ist), wenn

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(P) = \frac{\partial G_j}{\partial x_i}(P)$$

für alle  $P \in U$  und alle  $i, j$  gilt.

**Lemma 58.6.** Das Gradientenfeld einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion erfüllt die Integrabilitätsbedingung.

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Satz 44.10. □

**Beispiel 58.7.** Das lineare Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

erfüllt wegen

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = -1 \neq 1 = \frac{\partial G_2}{\partial x}$$

nicht die Integrabilitätsbedingung. Es kann also nach Lemma 58.6 kein Gradientenfeld sein.



**Definition 58.8.** Eine Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt *sternförmig* bezüglich eines Punktes  $P \in T$ , wenn für jeden Punkt  $Q \in T$  die Verbindungsstrecke  $sQ + (1-s)P$ ,  $s \in [0, 1]$ , ganz in  $T$  liegt.

**Satz 58.9.** Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine sternförmige offene Teilmenge und

$$G: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.

- (1)  $G$  ist ein Gradientenfeld.
- (2)  $G$  erfüllt die Integrabilitätsbedingung.
- (3) Für jeden stetig differenzierbaren Weg  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  hängt das Wegintegral  $\int_{\gamma} G$  nur vom Anfangspunkt  $\gamma(a)$  und Endpunkt  $\gamma(b)$  ab.

*Beweis.* Die Äquivalenz (1)  $\iff$  (3) folgt aus Satz 57.10 und die Implikation (1)  $\implies$  (2) aus Lemma 58.6. Es bleibt also (2)  $\implies$  (1) zu zeigen, wobei wir explizit eine Stammfunktion  $h$  zum Vektorfeld  $G$  angeben. Es sei  $P \in U$  ein Punkt derart, dass  $U$  bezüglich  $P$  sternförmig ist. Wir definieren  $h(Q)$  über das Wegintegral zu  $G$  zum linearen Verbindungsweg

$$\gamma: [0, 1] \longrightarrow U, t \longmapsto P + t(Q - P),$$

also

$$h(Q) := \int_{\gamma} G = \int_0^1 \langle G(\gamma(t)), Q - P \rangle dt.$$

Wir müssen zeigen, dass der Gradient zu  $h$  gleich  $G$  ist, d.h. es ist

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = G_i$$

zu zeigen. Dafür können wir  $P = 0$  annehmen und wir schreiben  $v$  statt  $Q$ . Mit diesen Bezeichnungen und Voraussetzungen ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} h(v) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \int_0^1 \langle G(tv), v \rangle dt \right) \\ &= \int_0^1 \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \langle G(tv), v \rangle \right) dt \\ &= \int_0^1 \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^n G_j(tv) \cdot v_j \right) \right) dt \\ &= \int_0^1 t \sum_{j=1}^n v_j \left( \frac{\partial}{\partial x_i} G_j \right) (tv) + G_i(tv) dt \\ &= \int_0^1 t \sum_{j=1}^n v_j \left( \frac{\partial}{\partial x_j} G_i \right) (tv) + G_i(tv) dt \\ &= \int_0^1 (t \mapsto t \cdot G_i(tv))' dt \\ &= (t \cdot G_i(tv)) \Big|_0^1 \end{aligned}$$

$$= G_i(v).$$

Dabei beruht die zweite Gleichung auf der Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation (angewendet auf die stetig differenzierbare Funktion  $[0, 1] \times U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, v) \mapsto \langle G(tv), v \rangle$ ) die vierte Gleichung auf Aufgabe 43.14, die fünfte Gleichung auf der Integrabilitätsbedingung, die sechste Gleichung auf der Kettenregel und der Produktregel und die siebte Gleichung auf der Newton-Leibniz-Formel.  $\square$

**Beispiel 58.10.** Wir betrachten das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-(x^2 + y^2) + y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

und

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{(x^2 + y^2) - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

erfüllt dieses Vektorfeld die Integrabilitätsbedingung. Es handelt sich aber nicht um ein Gradientenfeld: Das Wegintegral zur (geschlossenen) trigonometrischen Parametrisierung des Einheitskreises

$$\gamma: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} G &= \int_0^{2\pi} \left\langle G(\gamma(t)), \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt \\ &= 2\pi \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

im Gegensatz zu Korollar 57.9.

## 58. ARBEITSBLATT

## 58.1. Übungsaufgaben.

**Aufgabe 58.1.** Es sei  $[a, b]$  ein kompaktes Intervall und

$$f: \mathbb{R} \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^i y^j.$$

Wir setzen

$$\varphi(x) = \int_a^b x^i y^j dy.$$

Berechne  $\varphi'(x)$  auf zwei unterschiedliche Weisen.

**Aufgabe 58.2.** Bestätige Satz 58.3 für die Funktion

$$f: [1, 2] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (t, x) \longmapsto e^{xt}.$$

**Aufgabe 58.3.** Es sei

$$f(x, y) = x^3 - yx^2 + 7 \sin y.$$

Berechne die Integrale zum Parameter  $y \in [0, \pi]$  über  $x \in [0, 1]$  und zum Parameter  $x \in [0, 1]$  über  $y \in [0, \pi]$ . Bestimme jeweils die extremalen Integrale.



Die Himmelscheibe von Nebra. Ist die Mondsichel darauf sternförmig?

**Aufgabe 58.4.** Betrachte zu  $r, s \in \mathbb{R}_+$  mit  $r + s > 1$  und  $s < r + 1$  die „sichelförmige“ Menge

$$M_{r,s} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq r, \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \geq s \right\}.$$

Für welche  $r, s$  ist diese Menge sternförmig?

**Aufgabe 58.5.** Zeige, dass eine sternförmige Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  zusammenhängend ist.

**Aufgabe 58.6.** Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}$  eine Teilmenge. Zeige, dass  $T$  genau dann ein (nichtleeres) Intervall ist, wenn  $T$  sternförmig ist.

**Aufgabe 58.7.** Es seien  $P_1, \dots, P_k$  ( $k \geq 1$ ) endlich viele Punkte im  $\mathbb{R}^n$ . Zeige, dass  $\mathbb{R}^n \setminus \{P_1, \dots, P_k\}$  nicht sternförmig ist.

**Aufgabe 58.8.** Man gebe ein Beispiel für eine sternförmige Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{R}^2$  an, die nur bezüglich eines einzigen Punktes sternförmig ist.

**Aufgabe 58.9.** Man gebe ein Beispiel für eine offene, sternförmige Teilmenge  $T \subseteq \mathbb{R}^2$  an, die nur bezüglich eines einzigen Punktes sternförmig ist.

**Aufgabe 58.10.** Man gebe ein Beispiel für zwei sternförmige Mengen  $S, T \subseteq \mathbb{R}^2$  mit der Eigenschaft, dass ihr Durchschnitt  $S \cap T$  nichtleer und nicht sternförmig ist.

**Aufgabe 58.11.** Überprüfe, ob das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto \left( \frac{-2x^2 + 2y^4}{(x^2 + y^4)^2}, \frac{8xy^3}{(x^2 + y^4)^2} \right),$$

die Integrabilitätsbedingung erfüllt oder nicht.

**Aufgabe 58.12.** Überprüfe, ob das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto \left( \frac{-2x^2 + 2y^4}{(x^3 + y^3)^2}, \frac{8xy^3}{(x^3 + y^3)^2} \right),$$

die Integrabilitätsbedingung erfüllt oder nicht.

**Aufgabe 58.13.** Zeige, dass das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (2x - y \cos x, -\sin x),$$

ein Gradientenfeld ist und bestimme ein Potential dazu.

Ob ein Vektorfeld auf  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  die Integrabilitätsbedingung erfüllt lässt sich äquivalent mit der sogenannten Rotation ausdrücken.

Zu einem partiell differenzierbaren Vektorfeld

$$G: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

auf einer offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  nennt man

$$\operatorname{rot}(G)(P) := \begin{pmatrix} \frac{\partial G_3}{\partial x_2}(P) - \frac{\partial G_2}{\partial x_3}(P) \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_3}(P) - \frac{\partial G_3}{\partial x_1}(P) \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_1}(P) - \frac{\partial G_1}{\partial x_2}(P) \end{pmatrix}$$

die *Rotation* von  $G$ .

Die Rotation ist ebenfalls ein Vektorfeld.

**Aufgabe 58.14.** Es sei  $G: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^3$ . Zeige, dass  $G$  genau dann die Integrabilitätsbedingung erfüllt, wenn  $\operatorname{rot}(G) = 0$  ist.

**Aufgabe 58.15.** Berechne zum Vektorfeld

$$G: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto \left( x^3 - z^2, \frac{xy}{z}, \frac{z}{x^2y} \right)$$

die Rotation.

**Aufgabe 58.16.\***

Wir betrachten das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$G(x, y) = (y, -x^3)$$

Zeige auf zweifache Weise, dass  $G$  kein Gradientenfeld ist.

- (1) Mit der Integrabilitätsbedingung.
- (2) Mit Wegintegralen.

**Aufgabe 58.17.\***

Wir betrachten das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (y - \cos(x + z), x, 2z - \cos(x + z)).$$

- a) Zeige mit Hilfe der Integrabilitätsbedingung, dass  $G$  ein Gradientenfeld ist.
- b) Bestimme ein Potential zu  $G$ .

**Aufgabe 58.18.\***

Wir betrachten das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto \left( ye^{xy} + \ln z, xe^{xy} - 2yz, \frac{x}{z} - y^2 \right).$$

- a) Zeige mit Hilfe der Integrabilitätsbedingung, dass  $G$  ein Gradientenfeld ist.
- b) Bestimme ein Potential zu  $G$ .

**Aufgabe 58.19.\***

- (1) Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und sei  $G: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Gradientenfeld auf  $U$ . Zeige, dass das Potential zu  $G$  bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist.
- (2) Es seien  $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$  offene sternförmige Mengen mit der Eigenschaft, dass  $S \cap T$  zusammenhängend ist. Es sei

$$G: S \cup T \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld, das die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Zeige, dass  $G$  ein Gradientenfeld ist.

(3)

**Aufgabe 58.20.\***

Es sei

$$F: G \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  und es sei

$$\rho(P) := \frac{\partial F_2}{\partial x}(P) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(P).$$

Zeige

$$\rho(P) = \frac{1}{\pi} \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\gamma_\epsilon} F,$$

wobei  $\gamma_\epsilon$  den einmal gegen den Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreisweg um  $P$  mit Radius  $\epsilon$  bezeichnet.

**58.2. Aufgaben zum Abgeben.****Aufgabe 58.21.** (3 Punkte)

Bestimme, ob zur Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2,$$

der Subgraph und ob der Epigraph sternförmig ist.

**Aufgabe 58.22.** (6 Punkte)

Es sei  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  eine sternförmige Teilmenge. Zeige, dass auch der Abschluss  $\overline{T}$  sternförmig ist.

**Aufgabe 58.23.** (3 Punkte)

Zeige, dass das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (ye^z - 3x^2z, xe^z + 2yz, xye^z + y^2 - x^3),$$

ein Gradientenfeld ist und bestimme ein Potential dazu.

**Aufgabe 58.24.** (3 Punkte)

Berechne zum Vektorfeld

$$G: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \neq 0, z > 0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto \left( \frac{e^{3x} - z}{y}, \frac{\cos x}{z^2}, \frac{\ln z}{xy} \right)$$

die Rotation.

## ANHANG A: BILDLICENSEN

Die Bilder dieses Textes stammen aus Commons (also <http://commons.wikimedia.org>), und stehen unter unterschiedlichen Lizenzen, die zwar alle die Verwendung hier erlauben, aber unterschiedliche Bedingungen an die Verwendung und Weitergabe stellen. Es folgt eine Auflistung der verwendeten Bilder dieses Textes (nach der Seitenzahl geordnet, von links nach rechts, von oben nach unten) zusammen mit ihren Quellen, Urhebern (Autoren) und Lizenzen. Dabei ist *Quelle* so zu verstehen, dass sich, wenn man

<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:>

unmittelbar davor setzt, die entsprechende Datei auf Commons ergibt. *Autor* benennt den Urheber des Werkes, falls dieser bekannt ist. *Benutzer* meint den Hochlader der Datei; wenn keine weitere Information über den Autor vorliegt, so gilt der Benutzer als Urheber. Die Angabe des Benutzernamen ist so zu verstehen, dass sich, wenn man

<http://commons.wikimedia.org/wiki/User:>

unmittelbar davor setzt, die Benutzerseite ergibt. Wenn das Bild ursprünglich in einem anderen Wikimedia-Projekt hochgeladen wurde, so wird die Domäne (bspw. *de.wikipedia.org*) explizit angegeben.

Die *Lizenz* ist die auf der Dateiseite auf Commons angegebene Lizenz. Dabei bedeuten

- GFDL: Gnu Free Documentation License (siehe den angehängten Text, falls diese Lizenz vorkommt)
- CC-BY-SA-2.5 (3.0): Creative Commons Attribution ShareAlike 2.5 (oder 3.0)
- PD: gemeinfrei (public domain)

## ABBILDUNGSVERZEICHNIS

Quelle = Improper integral.svg , Autor = Benutzer KSmrq auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	10
Quelle = Normal distribution.svg , Autor = Benutzer Geek3 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	13
Quelle = Gamma-area.svg , Autor = Benutzer Kiwi128 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	15
Quelle = Zeta.svg , Autor = Benutzer WhiteTimberwolf auf Commons, Lizenz = PD	15

Quelle = Graph $t^x e^x x$ is 2.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa	20
Quelle = Graph $t^x e^x x$ is 1.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa	20
Quelle = Graph $t^x e^x x$ is 0,5.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa	20
Quelle = Graph $t^x e^x x$ is 0.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa	20
Quelle = Graph $t^x e^x x$ is -0,5.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa	20
Quelle = Graph $t^x e^x x$ is -1.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa	20
Quelle = Factorial plot.png , Autor = Mathacw, Lizenz =	22
Quelle = Manhattan distance.svg , Autor = Benutzer Psychonaut auf Commons, Lizenz = PD	33
Quelle = Unit disc metrics.svg , Autor = Benutzer Krishnavedala auf Commons, Lizenz = PD	34
Quelle = Neighborhood illust1.svg , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD	35
Quelle = Continuity topology.svg , Autor = Benutzer Dcoetzee auf Commons, Lizenz = PD	45
Quelle = Kurvenschar parabel.svg , Autor = Benutzer StefanPohl auf Commons, Lizenz = CC0-1.0	50
Quelle = Connected and disconnected spaces2.svg , Autor = Benutzer Dbc334 auf Commons, Lizenz = PD	59
Quelle = Trichoplax mic.jpg , Autor = Benutzer Ovoigt auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	59
Quelle = Intermediatevalueththeorem.svg , Autor = Enoch Lau (hochgeladen von Benutzer Kpengboy auf Commons), Lizenz = CC-by-sa 3.0	61
Quelle = Neighborhood edge.png , Autor = Benutzer Zasdfgbnm auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	65
Quelle = ComplexSinInATimeAxe.gif , Autor = Nashev, Lizenz =	78

Quelle = Animated letter M lower case hand writing Version2.gif , Autor = Benutzer Thirunavukkarasye-Raveendran auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	85
Quelle = Cusp.png , Autor = Benutzer Satipatthana auf Commons, Lizenz = PD	88
Quelle = Cycloid f.gif , Autor = Benutzer Zorgit auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	97
Quelle = Helix2.png , Autor = Benutzer Siebrand auf nl Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 3.0	99
Quelle = Usain Bolt smiling Berlin 2009.JPG , Autor = Benutzer Selligpau auf Commons, Lizenz = GNU-Lizenz	130
Quelle = Euler method.png , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD	130
Quelle = Monkey Saddle Surface (Shaded).png , Autor = Benutzer Inductiveload auf Commons, Lizenz = PD	160
Quelle = Feldberg 3913.jpg , Autor = Benutzer Flominator auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	160
Quelle = Davidraju IMG 8371.jpg , Autor = Benutzer Davidvraju auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	178
Quelle = Surface integrall.svg , Autor = Benutzer Cronholm144 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	184
Quelle = Saddle point.png , Autor = Benutzer Ævar Arnfjörð Bjarmason auf PD, Lizenz =	199
Quelle = Functionseeinsel.png , Autor = Lilli Hasimatzi (hochgeladen von Benutzer Bocardodarapti auf Commons), Lizenz = CC-by-sa 4.0	199
Quelle = RechteckGradient.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	211
Quelle = Schoenberg-ebringen-isohypsen.png , Autor = Benutzer W-j-s auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	212
Quelle = Ohwr.jpg , Autor = Benutzer Hans-Jürgen Boyke auf de wikipedia, Lizenz = OTRS	212
Quelle = James Joseph Sylvester.jpg , Autor = nicht bekannt, Lizenz = PD	221

Quelle = Waeller26.jpg , Autor = Benutzer Odatrulle auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	236
Quelle = Waeller39.jpg , Autor = Benutzer Odatrulle auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	249
Quelle = Passaggio in coordinate polari.svg , Autor = Benutzer Cronholm144 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	266
Quelle = 3D Spherical.svg , Autor = Benutzer Andeggs auf Commons, Lizenz = PD	268
Quelle = Schoenberg-ebringen-isohypsen.png , Autor = Benutzer W-j-s auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	273
Quelle = Coast line east Karystos, Euboea, Greece.jpg , Autor = Benutzer Straitgate auf Commons, Lizenz = PD	274
Quelle = Agate1 hg.jpg , Autor = Benutzer Hgrobe auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 2.5	276
Quelle = 1 durch Ln.svg , Autor = Benutzer MGausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	281
Quelle = Soccer field - empty.svg , Autor = Benutzer Nuno Tavares auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	284
Quelle = AHippoBird2200.jpg , Autor = Benutzer PJ KAPDostie auf Commons, Lizenz = CC-bysa 3.0	287
Quelle = Astroid.svg , Autor = Benutzer Joelholdsworth auf Commons, Lizenz = PD	293
Quelle = RLipschitz.jpeg , Autor = Benutzer Ahellwig auf Commons, Lizenz = PD	300
Quelle = Gradient field.png , Autor = Benutzer Christophe.Finot auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	319
Quelle = BodyMassIndex.png , Autor = Benutzer Thire auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 2.5	324
Quelle = Partietoilee.PNG , Autor = Benutzer auf fr Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 3.0	331
Quelle = Nebra Scheibe.jpg , Autor = Benutzer Dbachmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	334