Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2024/2025**

Elemente der Algebra

Arbeitsblatt 21

Übungsaufgaben

Aufgabe 21.1. Bestimme die Dimension des Lösungsraumes des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 4x-3y+7z+5u-v &= 0, \\ y+6z-10u+3v &= 0 \end{aligned}$$

in den Variablen x,y,z,u,v.

Aufgabe 21.2.*

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit endlicher Dimension

$$n = \dim_K(V).$$

Es seien n Vektoren $v_1,\ldots,v_n$ in V gegeben. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) $v_1,\ldots,v_n$ bilden eine Basis von V.
(2) $v_1,\ldots,v_n$ bilden ein Erzeugendensystem von V.
(3) $v_1,\ldots,v_n$ sind linear unabhängig.

Aufgabe 21.3.*

Es seien $a,b,c \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Wir betrachten die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Man gebe Beispiele für a,b,c derart, dass der von diesen Vektoren erzeugte Untervektorraum die Dimension $0,1,2,3$ besitzt.

Aufgabe 21.4. Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $d \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge aller Polynome vom Grad $\leq d$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum von $K[X]$ ist. Was ist seine Dimension?

AUFGABE 21.5. Zeige, dass die Menge aller reellen Polynome vom Grad ≤ 4, für die -2 und 3 Nullstellen sind, ein endlichdimensionaler Untervektorraum in $\mathbb{R}[X]$ ist. Bestimme die Dimension von diesem Vektorraum.

AUFGABE 21.6.*

Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume mit $\dim_K(V) = n$ und $\dim_K(W) = m$. Welche Dimension besitzt der Produktraum $V \times W$?

AUFGABE 21.7. Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über den komplexen Zahlen, und sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Zeige, dass die Vektorenfamilie

$$v_1, \ldots, v_n \text{ und } \mathrm{i}v_1, \ldots, \mathrm{i}v_n$$

eine Basis von V, aufgefasst als reeller Vektorraum, ist.

AUFGABE 21.8. Es sei die Standardbasis e_1, e_2, e_3, e_4 im $\mathbb{R}^4$ gegeben und die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass diese Vektoren linear unabhängig sind und ergänze sie mit einem geeigneten Standardvektor gemäß Satz 21.2 zu einer Basis. Kann man jeden Standardvektor nehmen?

AUFGABE 21.9.*

Wir betrachten die letzte Ziffer im kleinen Einmaleins (ohne die Zehnerreihe) als eine Familie von 9-Tupeln der Länge 9, also die Zeilenvektoren in der Matrix

$$)(.$$

Welche Dimension besitzt der durch diese Tupel aufgespannte Untervektorraum des $\mathbb{R}^9$?

AUFGABE 21.10. Wir betrachten die linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} 9x - 8y + 7z - 8u + 4v &= 0, \\ 3y + 7z - 4u + 6v &= 0, \\ -2z + 5u + 7v &= 0 \end{aligned}$$

über $\mathbb{R}$.

(1) Bestimme eine Basis $\mathfrak{b}_1$ des Lösungsraumes des gesamten Gleichungssystems.
(2) Ergänze die Basis $\mathfrak{b}_1$ zu einer Basis $\mathfrak{b}_2$ des Lösungsraumes des Gleichungssystems, das aus den ersten beiden Gleichungen besteht.
(3) Ergänze die Basis $\mathfrak{b}_2$ zu einer Basis $\mathfrak{b}_3$ des Lösungsraumes des Gleichungssystems, das allein aus der ersten Gleichung besteht.
(4) Ergänze die Basis $\mathfrak{b}_3$ zu einer Basis $\mathfrak{b}_4$ des Gesamtraumes $\mathbb{R}^5$.

Aufgabe 21.11. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass V nicht zugleich eine endliche Basis und eine unendliche Basis besitzen kann.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 21.12. a) Bestimme die Dimension des Lösungsraumes des linearen Gleichungssystems

$$2x + 5y + 7z + 4u - 3v + 2w = 0$$

$$4x + 9y + 6z + 5u - v + w = 0$$

$$7x + 8y - 3z + u + 3v + 3w = 0$$

$$-x + 6y + 16z + 8u - 7v = 0$$

in den Variablen x, y, z, u, v, w.

b) Was ist die Dimension des Lösungsraumes, wenn man dieses System in den Variablen x, y, z, u, v, w, r, s auffasst?

Aufgabe 21.13. (4 Punkte)

Zeige, dass die Menge aller reellen Polynome vom Grad ≤ 6, für die -1, 0 und 1 Nullstellen sind, ein endlichdimensionaler Untervektorraum in $\mathbb{R}[X]$ ist. Bestimme die Dimension von diesem Vektorraum.

Aufgabe 21.14. (2 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_m$ eine Familie von m Vektoren in V und sei

$$U = \langle v_i,\, i = 1, \ldots, m \rangle$$

der davon aufgespannte Untervektorraum. Zeige, dass die Familie genau dann linear unabhängig ist, wenn die Dimension von U gleich m ist.

Aufgabe 21.15. (7 (3+2+1+1) Punkte)

Wir betrachten die linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} 8x - 3y + 5z + 7u + 6v &= 0, \\ 9x + 2y + z - v &= 0, \\ 7y - z + 4u &= 0 \end{aligned}$$

über $\mathbb{R}$.

(1) Bestimme eine Basis $\mathfrak{b}_1$ des Lösungsraumes des gesamten Gleichungssystems.
(2) Ergänze die Basis $\mathfrak{b}_1$ zu einer Basis $\mathfrak{b}_2$ des Lösungsraumes des Gleichungssystems, das aus den ersten beiden Gleichungen besteht.
(3) Ergänze die Basis $\mathfrak{b}_2$ zu einer Basis $\mathfrak{b}_3$ des Lösungsraumes des Gleichungssystems, das allein aus der ersten Gleichung besteht.
(4) Ergänze die Basis $\mathfrak{b}_3$ zu einer Basis $\mathfrak{b}_4$ des Gesamtraumes $\mathbb{R}^5$.

Abbildungsverzeichnis