Electronic vote on the Resolution B4
“on a suggested renaming of the Hubble Law”

The Chair of the Resolution Committee presenting the Resolution B4

Background

Five Resolutions were proposed for approval at the XXXth IAU General Assembly (Vienna, August 20th – 31st, 2018). They were announced and posted on the IAU web site on June 20th (see https://www.iau.org/news/announcements/detail/ann18029/) and initially they did not generate any comments by the members.

However, after the Resolutions were highlighted in the e-Newsletter #7 in July (see https://www.iau.org/publications/e-newsletters/html/72/), a lively discussion started on Resolution B4 “on a suggested renaming of the Hubble Law”. The comments and suggestions were well received by the Resolutions Committee, chaired by Bruce Elmegreen, and were used to improve the text of the Resolution as well as to increase the supporting bibliography.

From the comments received before the General Assembly, it was becoming clear that the opinion of the community was divided and the result of the vote would be uncertain. In such a situation, which was not necessarily foreseeable in advance, the IAU Executive Committee, in its Meeting #101 (Aug. 19th, 2018), agreed to proceed with the regular presentation of the Resolutions during the I Business Session (Aug. 21st, 2018) followed by the vote during the II Business Session (Aug. 30th, 2018). However it was decided to consider the vote about Resolution B4 as indicative of the opinion of the members physically present at the II Business Session and to propose to the entire community of IAU members to express their vote electronically shortly after the GA. The result of the electronic vote will be considered final.

The Executive Committee decided also that the presentation of the e-vote should include the result of the *straw vote* at the GA and a summary of the discussion that took place both via mail and live during the II Business Session.

The final text of the Resolution B4

The text of the Resolution B4 has been modified several times from its first edition, taking into account the comments and suggestions received by the Resolution Committee up to the II Business Session of the GA. The final text which is proposed for electronic voting is reported in the Appendix A.

The main motivations of the Resolution B4 are:

- To pay tribute to both George Lemaître and Edwin Hubble for their fundamental contribution to the development of modern cosmology, informing future discourses with historical facts.

- To highlight the role of the IAU in fostering exchanges of views and international discussions

It should be stressed that the Resolution does not formally establish a new name of the “Hubble law”, but simply suggests that in future discourses the formulation “Hubble-Lemaître law” is preferred.

The supporting Bibliography

For convenience of the voters, the links to the main supporting Bibliography, in particular that quoted in the Resolution, is attached in Appendix B.

We wish to highlight an excerpt from the paper by David L. Block “Georges Lemaître and Stigler’s Law of Eponymy” which reports an interesting comment on the matter by Lemaître himself:

“In a Comment published in Nature Mario Livio (Nature , 479, 171, 2011) has unearthed a letter from Lemaître to W. M. Smart (dated 9 March 1931). From that document, it is clear that Lemaître himself translated his 1927 paper into English and who also omitted his determination of the coefficient of expansion of the Universe (H_0) from values of radial velocities available as of 1927. However, in his Comment Livio omits a vital reference, namely thoughts penned by Lemaître himself in 1950 (L’expansion de l’Univers, Bibliographie: Annales d’Astrophysique , 13, 344):

About my contribution of 1927, I do not want to discuss if I was a professional astronomer. I was, in any event, an IAU member (Cambridge, 1925), and I had studied astronomy for two years, a year with Eddington and another year in the U.S. observatories. I visited Slipher and Hubble and heard him in Washington, in 1925, making his memorable communication about the distance [to] the Andromeda nebula. While my Mathematics bibliography was seriously in default since I did not know the work of Friedmann, it is perfectly up to date from the astronomical point of view; I calculate [in my contribution] the coefficient of expansion (575 km per sec per megaparsecs, 625 with a questionable statistical correction). Of course, *before the discovery and study of clusters of nebulae, there was no point to establish the Hubble law, but only to calculate its coefficient. The title of my note leaves no doubt on my intentions: A Universe with a constant mass and increasing radius as an explanation of the radial velocity of extra-galactic nebulae. I apologize that all of this is too personal. But, as noted by the author (p. 161) "the history of this science competition is not irrevelant" and it is useful to highlight the details to enable an exact understanding of the scope of the argument that can be drawn from this. (Emphasis added)*

In 1950, Lemaître clearly did not want the rich fusion of theory and observations contained in his 1927 paper to be buried in the sands of time."

Concerning point 6 in the Resolution, we wish to highlight an interesting comment by Virginia Trimble which suggests that the expression "actual interest" used by Lemaître in his letter to MNRAS is a poor translation into English of the French "intérêt actuel". It should therefore be better interpreted as "current interest".

Discussion: questions raised by IAU Members and answers by the Resolution Committee.

The discussion on the Resolution B4 was very lively both in some of the Division Days meetings and in particular during the II Business Session. Unfortunately the latter had to be stopped after 20 minutes in order to keep the schedule of the Session and of the subsequent Closing Ceremony. However some of the questions that were not presented at the Session, were sent by email to the Resolution Committee. Below is a summary of the most relevant Q&A.

Q. Is the IAU recommending that any other "Hubble"-named things change?
A. No

Q. Will this lead to other re-namings?
A. This particular case involves one of the most important astronomical discoveries and the history is clear about the contributions by Lemaître and by the IAU. "Informing future discourses" about this history can only be good. Future discourses about other historical precedents should strive to be correct too, and if the current resolution begins this conversation then that is good. This does not mean that other historical reflections should be modified by IAU resolutions.

Q. Should others who noticed the correlation between galaxy velocity and size or brightness or distance be recognized also in this resolution?
A. No, the others (Wirtz, Lundmark, …) are noted in one of the bibliographic references, but also did not interpret the relationship as <u>expansion</u> (they referred only to the static de Sitter or Einstein universes). The resolution recommends only that the "expansion of the Universe" be referred to as the "Hubble – Lemaître law", not that the velocity-distance relation be given additional names.

Q. Should other contributors to the <u>data</u> used in the early expansion law (Slipher, Leavitt, Stromgren, …) be acknowledged as well?
A. No because they did not use their data nor invent new theory to discover the Universal Expansion.

The straw vote.

After the discussion, the Assembly was asked to vote in the following sequence: votes against, abstentions and votes in favour. To facilitate the work of the official tellers, the vote was called by sections of the Hall. The results are indicated below: please note that, being a straw vote, the General Secretary decided not to resolve the minor discrepancies among the scores reported by the three independent tellers. The results are therefore approximate within few percent.

Total number of voters (IAU Individual Members):	385	
Votes against:	53	(14%)
Abstentions:	46	(12%)
Votes in favour:	286	(74%)

All the Individual and Junior Members of the IAU (including those present in Vienna) are now invited to express their vote electronically (instructions are sent by e-mail).

In order to assure total neutrality, the e-vote will be totally handled by the external Company mi-voice (https://www.mi-voice.com/). The e-vote will close on Oct. 26th 24:00 UTC and the result will be communicated by mi-voice soon after.

Appendix A
Final text of Resolution B4 to be voted electronically by the IAU Members

THIRTIETH GENERAL ASSEMBLY

RESOLUTIONS PRESENTED TO THE XXXth GENERAL ASSEMBLY

RESOLUTION B4

on a suggested renaming of the Hubble Law

Proposed by the IAU Executive Committee

The XXX General Assembly of the International Astronomical Union,

considering

1. that the discovery of the apparent recession of the galaxies, which is usually referred to as the "Hubble law", is one of the major milestones in the development of the science of Astronomy during the last 100 years and can be considered one of the founding pillars of modern Cosmology;

2. that the Belgian astronomer Georges Lemaître, in 1927 published (in French) the paper entitled *"Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques"* [1]. In this he first rediscovers Friedman's dynamic solution to Einstein's general relativity equations that describes an expanding universe. He also derives that the expansion of the universe implies the spectra of distant galaxies are redshifted by an amount proportional to their distance. Finally he uses published data on the velocities and photometric distances of galaxies to derive the rate of expansion of the universe (assuming the linear relation he had found on theoretical grounds);

3. that, at the time of publication, the limited popularity of the Journal in which Lemaître's paper appeared and the language used made his remarkable discovery largely unperceived by the astronomical community;

4. that both Georges Lemaître (an IAU member since 1925 [2]) and the American astronomer Edwin Hubble (an IAU member since 1922 [3]) attended the 3rd IAU General Assembly in Leiden in July 1928 and exchanged views [4] about the relevance of the redshift vs distance observational data of the extragalactic nebulae to the emerging evolutionary model of the universe;

5. that Edwin Hubble, in 1929 published the paper entitled *"A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae"* [5] in which he proposed and derived

the linear distance-velocity relation for galaxies, ultimately including new velocity data in his 1931 paper with Humason [6]. Soon after the publication of his papers, the cosmic expansion became universally known as the "Hubble law";

6. that, in 1931, on invitation by the Journal Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, G. Lemaître translated in English his original 1927 paper [7], deliberately omitting the section in which he derived the rate of expansion because he "did not find advisable to reprint the [his] provisional discussion of radial velocities which is clearly of no actual interest, and also the geometrical note, which could be replaced by a small bibliography of ancient and new papers on the subject" [8];

desiring

7. to pay tribute to both Georges Lemaître and Edwin Hubble for their fundamental contributions to the development of modern cosmology;

8. to honour the intellectual integrity of Georges Lemaître that made him value more the progress of science rather than his own visibility;

9. to highlight the role of the IAU General Assemblies in fostering exchanges of views and international discussions;

10. to inform the future scientific discourses with historical facts;

resolves

11. to recommend that from now on the expansion of the universe be referred to as the "Hubble-Lemaître law".

---

[1] Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, A47, p. 49-59 (1927)
[2] Lemaître, G. 1950, Ann d' Ap., 13, 344, as translated by David L Block, 2012, in Georges Lemaître: Life, Science and Legacy, eds. R.D. Holder and S. Mitton, Astrophysics and Space Science Library, Springer-Verlag: Berlin, Vol. 395, p. 89
[3] IAU Transactions Vol. 1, 1922
[4] Humason (https://www.aip.org/history-programs/niels-bohr-library/oral-histories/4686), as reported by Sidney van den Bergh, 2011, JRASC, Vol. 105, p. 197
[5] Proceedings of the National Academy of Science, USA, 15, 168 (1929)
[6] "The velocity-distance relation among extra-galactic nebulae", Astrophysical Journal, Vol 74, p. 43-80 (1931)
[7] Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 91, p.483-490 (1931)
[8] Georges Lemaître, quoted by Mario Livio in Nature, Volume 479, Issue 7372, pp. 171-173 (2011)

UN UNIVERS HOMOGÈNE DE MASSE CONSTANTE ET DE RAYON CROISSANT, RENDANT COMPTE DE LA VITESSE RADIALE DES NÉBULEUSES EXTRA-GALACTIQUES

Note de M. l'Abbé G. LEMAÎTRE

1. GÉNÉRALITÉS.

La théorie de la relativité fait prévoir l'existence d'un univers homogène où non seulement la répartition de la matière est uniforme, mais où toutes les positions de l'espace sont équivalentes, il n'y a pas de centre de gravité. Le rayon R de l'espace est constant, l'espace est elliptique de courbure positive uniforme $1/R^2$, les droites issues d'un même point repassent à leur point de départ après un parcours égal à πR, le volume total de l'espace est fini et égal à $\pi^2 R^3$, les droites sont des lignes fermées parcourant tout l'espace sans rencontrer de frontière (1).

Deux solutions ont été proposées. Celle de DE SITTER ignore la présence de la matière et suppose sa densité nulle. Elle conduit à certaines difficultés d'interprétation sur lesquelles nous aurons l'occasion de revenir, mais son grand intérêt est d'expliquer le fait que les nébuleuses extra-galactiques semblent nous fuir avec une énorme vitesse, comme une simple conséquence des propriétés du champ de gravitation, sans supposer que nous nous trouvons en un point de l'univers doué de propriétés spéciales.

L'autre solution est celle d'EINSTEIN. Elle tient compte du fait évident que la densité de la matière n'est pas nulle et elle conduit à une relation entre cette densité et le rayon de l'univers. Cette relation a fait prévoir l'existence de masses énormément supérieures à tout ce qui était connu lorsque la théorie a été pour la première fois comparée avec les faits. Ces masses ont été depuis découvertes lorsque les distances et les dimensions des nébuleuses extra-galactiques ont pu être établies. Le rayon de l'univers calculé par la formule d'Einstein est d'après les données récentes quelques

observées toutes deux : Il calcule les éléments de l'éclipse de lune (la date Phamenoth 9 donnée par l'éd. de Bâle est une dittographie de la dernière lettre du nom du mois. Tous les mss sont Phamenoth 6, an 1112) puis conclut : ... ἀκολούθως τοῖς κατὰ τήν τήρησιν γεγενημένοις ἡμῖν τῶν τοιούτων χρόνων ἐπιλογισμοῖς. « conformément aux calculs des » temps exécutés par nous d'après l'observation » [éd. Bâle, p. 320, tous les mss sont d'accord]. Il est assez naturel de supposer que l'observation en question a été faite sous sa direction, surtout quand on rapproche le passage cité, de cet autre, relatif à l'éclipse de soleil du 16 juin de la même année : καὶ ἔτι τὸν μὲν τῆς ἀρχῆς τῆς ἐμπτώσεως χρόνον ἀσφαλέστατα ἐτηρήσαμεν, « nous avons observé avec grande précision l'heure » du premier contact » [éd. Bâle, p. 332]. Il est inutile d'observer que tout ce qui peut se dire sur Théon, a fatalement un caractère provisoire, tant que le travail d'édition ne sera pas terminé. Le texte de Pappus est établi ; on peut donc aborder les questions qui s'y rapportent avec quelque chance de les résoudre.

(1) Nous considérons l'espace simplement elliptique, c'est-à-dire sans antipodes.

centaines de fois plus grand que la distance des objets les plus éloignés photographiés dans nos télescopes (¹).

Les deux solutions ont donc leurs avantages. L'une s'accorde avec l'observation des vitesses radiales des nébuleuses, l'autre tient compte de la présence de la matière et donne une relation satisfaisante entre le rayon de l'univers et la masse qu'il contient. Il semble désirable d'obtenir une solution intermédiaire qui pourrait combiner les avantages de chacune d'elles.

A première vue, un tel intermédiaire n'existe pas. Un champ de gravitation statique et de symétrie sphérique n'admet que deux solutions, celle d'Einstein et celle de de Sitter, si la matière est uniformément répartie et n'est soumise à aucune pression ou tension intérieure. L'Univers de de Sitter est vide, celui d'Einstein a pu être décrit comme contenant autant de matière qu'il en peut contenir ; il est étonnant que la théorie ne puisse fournir un juste milieu entre ces deux extrêmes.

Le paradoxe s'éclaircit lorsqu'on se rend compte que la solution de de Sitter ne répond pas à toutes les nécessités du problème (²). L'espace y est bien homogène, de courbure positive constante ; l'espace-temps aussi est homogène, tous les points de l'univers sont parfaitement équivalents ; mais la division de l'espace-temps en espace et en temps ne respecte plus l'homogénéité. Les coordonnées choisies introduisent un centre auquel rien ne correspond dans la réalité ; un point immobile au centre de l'espace décrit une géodésique de l'univers, un point immobile autre part

(¹) Cf. Hubble E. Extra-galactic nebulae, *Ap. J.*, vol. 64, p. 321, 1926. *Mᵗ Wilson Contr.* N° 324.

(²) Cf K. LANCZOS. — Bemerkung zur de Sitterschen Welt. *Phys. Zeitschr.*, vol. 23, p. 539, 1922, et H. WEYL. Zur allgemeinen Relativitätstheorie. Id., vol. 24, p. 230, 1923. Nous suivons ici le point de vue de Lanczos. Les lignes d'univers des nébuleuses forment une gerbe de centre idéal et d'hyperplan axial réel ; l'espace normal à ces lignes d'univers est formé par les hypersphères équidistantes au plan axial. Cet espace est elliptique, son rayon variable étant minimum à l'instant correspondant au plan axial. Dans l'hypothèse de Weyl, les lignes d'univers sont parallèles dans le passé ; les hypersurfaces normales représentant l'espace sont des horosphères, la géométrie de l'espace est donc euclidienne. La distance spatiale entre les nébuleuses augmente au fur et à mesure que les géodésiques parallèles qu'elles décrivent s'écartent l'une de l'autre, proportionnellement à $e^{t/R}$, où t est le temps propre et R le rayon de l'univers. L'effet Doppler est égal à r/R, où r est la distance de la source à l'instant de l'observation. Cf. G. LEMAÎTRE. Note on de Sitter's universe. *Journal of mathematics and physics*, vol 4, n° 3, May 1925, ou *Publications du Laboratoire d'Astronomie et de Géodésie de l'Université de Louvain*, vol. 2, p. 37, 1925. Pour la discussion de la partition de de Sitter, voir P. DU VAL : Geometrical note on de Sitter's world. *Phil. Mag.* (6), vol. 47, p. 930, 1924. L'espace est formé d'hyperplans normaux à une droite temporelle décrite par le centre introduit, les trajectoires des nébuleuses sont les trajectoires orthogonales de ces plans, elles ne sont généralement plus des géodésiques et elles tendent à devenir des lignes de longueur nulle lorsqu'on s'approche de l'horizon du centre, c'est-à-dire de l'hyperplan polaire de l'axe central par rapport à l'absolu.

qu'au centre ne décrit pas une géodésique de l'univers. Le choix des coordonnées rompt donc l'homogénéité qui existait dans les données du problème, de là proviennent les résultats paradoxaux qui apparaissent à l' « horizon » du centre. Lorsqu'on introduit des coordonnées et une division correspondante de l'espace et du temps respectant l'homogénéité de l'univers, on trouve que le champ n'est plus statique, on obtient un univers de même forme que celui d'Einstein, mais où le rayon de l'espace au lieu de demeurer invariable varie avec le temps suivant une loi particulière (1).

Pour trouver une solution présentant simultanément les avantages de celle d'Einstein et de celle de de Sitter, nous sommes ainsi conduits à étudier un univers d'Einstein où le rayon de l'espace (ou de l'univers) varie d'une façon quelconque.

2. Univers d'Einstein a rayon variable. Équations du champ de gravitation. Conservation de l'énergie.

Tout comme pour la solution d'Einstein, nous assimilons l'univers à un gaz très raréfié dont les nébuleuses extra-galactiques forment les molécules ; nous les supposons assez nombreuses pour qu'un volume petit par rapport à l'ensemble de l'univers contienne assez de nébuleuses pour que nous puissions parler de la densité de la matière. Nous ignorons l'influence possible de condensations locales. De plus, nous supposons que la répartition des nébuleuses est uniforme et donc que la densité est indépendante de la position.

Pour une variation arbitraire du rayon de l'univers la densité, uniforme dans l'espace, varie avec le temps. De plus, la matière est, en général, soumise à des tensions qui, à cause de l'homogénéité, se réduisent à une simple pression uniforme dans l'espace et variable avec le temps. La pression est égale aux deux tiers de l'énergie cinétique des molécules, elle est négligeable vis-à-vis de l'énergie condensée dans la matière, il en est de même des pressions intérieures des nébuleuses ou des étoiles qu'elles contiennent ; nous sommes donc conduits à poser $p = 0$. Peut-être

(1) Si on se borne à deux dimensions, une d'espace et une de temps, la division d'espace et de temps utilisée par de Sitter peut être représentée sur une sphère : les lignes d'espace sont fournies par un système de grands cercles se coupant sur un même diamètre et les lignes temporelles sont les parallèles coupant normalement les lignes spatiales. Un de ces parallèles est un grand cercle et donc une géodésique, il correspond au centre de l'espace, le pôle de ce grand cercle est un point singulier correspondant à l'horizon du centre. La représentation doit naturellement être étendue à quatre dimensions et la coordonnée temporelle doit être supposée imaginaire, mais le défaut d'homogénéité résultant du choix des coordonnées subsiste. Les coordonnées respectant l'homogénéité reviennent à prendre pour lignes temporelles un système de méridiens et pour lignes spatiales les parallèles correspondants, alors le rayon de l'espace varie avec le temps.

faudrait-il tenir compte de la pression de radiation de l'énergie rayonnante circulant dans l'espace ; cette énergie est fort faible, mais elle est répartie dans tout l'espace et fournit peut-être une contribution importante à l'énergie moyenne. Nous garderons le terme p dans les équations générales en l'interprétant comme la pression de radiation moyenne de la lumière, mais nous poserons $p = 0$, lorsque nous en viendrons à l'application aux phénomènes astronomiques.

Nous désignons par ρ la densité de l'énergie totale, la densité de l'énergie rayonnante sera $3p$ et la densité de l'énergie concentrée dans la matière est $\delta = \rho - 3p$.

Il faut identifier ρ et $-p$ avec les composantes T_4^4 et $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3$ du tenseur d'énergie matérielle et δ avec T. Calculons les composantes du tenseur de Riemann contracté pour un univers d'intervalle

$$ds^2 = - R^2 \, d\sigma^2 + dt^2 \tag{1}$$

$d\sigma$ est l'élément de longueur d'un espace de rayon égal à un ; le rayon R de l'espace est une fonction du temps. Les équations du champ de gravitation s'écrivent

$$3 \frac{R'^2}{R^2} + \frac{3}{R^2} = \lambda + \kappa\rho \tag{2}$$

et

$$2 \frac{R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2} + \frac{1}{R^2} = \lambda - \kappa p \tag{3}$$

Les accents désignent des dérivées par rapport à t ; λ est la constante cosmologique dont la valeur est inconnue et κ la constante d'Einstein égale à $1{,}87 \times 10^{-27}$ en unités C. G. S. (8π en unités naturelles).

Les quatre identités exprimant la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie se réduisent ici à

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{3R'}{R} (\rho + p) = 0 \tag{4}$$

qui exprime la conservation de l'énergie. Cette équation peut donc remplacer (3). Elle est susceptible d'une interprétation intéressante. Introduisant le volume de l'espace $V = \pi^2 R^3$, elle peut s'écrire

$$d(V\rho) + p \, dV = 0 \tag{5}$$

et elle exprime que *la variation de l'énergie totale plus le travail effectué par la pression de radiation est égale à zéro.*

3. Cas où la masse totale de l'univers demeure constante.

Cherchons une solution pour laquelle la masse totale $M = V\delta$ demeure constante. Nous pourrons alors poser

$$\kappa\delta = \frac{\alpha}{R} \tag{6}$$

où α est une constante. Tenant compte de la relation

$$\rho = \delta + 3p$$

existant entre les diverses sortes d'énergie, le principe de conservation de l'énergie devient

$$3\, d(pR^3) + 3p\, R^2\, dR = 0 \tag{7}$$

dont l'intégration est immédiate ; β désignant une constante d'intégration, nous avons

$$\kappa p = \frac{\beta}{R^4} \tag{8}$$

et donc

$$\kappa\rho = \frac{\alpha}{R^3} + \frac{3\beta}{R^4} \tag{9}$$

Substituant dans (2), nous avons à intégrer

$$\frac{R'^2}{R^2} = \frac{\lambda}{3} - \frac{1}{R^2} + \frac{\kappa\rho}{3} = \frac{\lambda}{3} - \frac{1}{R^2} + \frac{\alpha}{3R^3} + \frac{\beta}{R^4} \tag{10}$$

ou

$$t = \int \frac{dR}{\sqrt{\frac{\lambda R^2}{3} - 1 + \frac{\alpha}{3R} + \frac{\beta}{R^2}}} \tag{11}$$

Pour α et β égaux à zéro, nous trouvons la solution de de Sitter [1]

$$R = \sqrt{\frac{3}{\lambda}} \cosh \sqrt{\frac{\lambda}{3}}\,(t - t_0) \tag{12}$$

La solution d'Einstein s'obtient en posant $\beta = 0$ et R constant. Posant $R' = R'' = 0$ dans (2) et (3), il vient

$$\frac{1}{R^2} = \lambda \qquad \frac{3}{R^2} = \lambda + \kappa\rho \qquad \rho =$$

donc

$$R = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \qquad\qquad \kappa\delta = \frac{2}{R^2} \tag{13}$$

et d'après (6)

$$\alpha = \kappa\delta\, R^3 = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \tag{14}$$

---

[1] Cf. Lanczos, *l. c.*

La solution d'Einstein ne résulte pas de la seule relation (14), il faut en outre que la valeur initiale de R' soit nulle. En effet, écrivant pour simplifier les écritures

$$\lambda = \frac{1}{R_o^2} \tag{15}$$

et posant dans (11) $\beta = 0$ et $\alpha = 2R_o$, il vient

$$t = R_o\sqrt{3}\int \frac{dR}{R - R_o}\sqrt{\frac{R}{R + 2R_o}} \tag{16}$$

Pour cette solution les deux équations (13) ne seront naturellement plus vérifiées. Si nous écrivons

$$\kappa\delta = \frac{2}{R_E^2} \tag{17}$$

nous aurons d'après (14) et (15)

$$R^3 = R_E^2\, R_o \tag{18}$$

La valeur de R_E, rayon de l'univers déduit de la densité moyenne par la formule d'Einstein (17), a été estimée par Hubble à

$$R_E = 8{,}5 \times 10^{28}\ \text{cm.} = 2{,}7 \times 10^{10}\ \text{parsecs} \tag{19}$$

Nous alons voir que la valeur de R_o peut se déduire de la vitesse radiale des nébuleuses ; R pourra alors être calculé par la formule (18). Nous montrerons ensuite qu'une solution introduisant une relation sensiblement différente de (14) conduirait à des conséquences difficilement admissibles.

4. Effet Doppler dû a la variation du rayon de l'univers.

D'après la forme (1) de l'intervalle d'univers, l'équation d'un rayon lumineux est

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{R} \tag{20}$$

où σ_1 et σ_2 sont les valeurs d'une coordonnée caractérisant la position dans l'espace. Nous pouvons parler du point σ_2 où nous supposerons localisé l'observateur et du point σ_1 où se trouve la source de lumière.

Un rayon émis un peu plus tard partira de σ_1 au temps $t_1 + \delta t_1$ et arrivera en σ_2 au temps $t_2 + \delta t_2$. Nous aurons donc

$$\frac{\delta t_2}{R_2} - \frac{\delta t_1}{R_1} = 0, \quad \frac{\delta t_2}{\delta t_1} - 1 = \frac{R_2}{R_1} - 1 \tag{21}$$

où R_1 et R_2 désignent respectivement les valeurs de R aux temps t_1 et t_2. t est le temps propre ; si δt_1 est la période de la lumière émise, δt_2 est la période de la lumière reçue et δt_1 peut encore être considéré comme la période d'une lumière émise dans les mêmes conditions dans le voisinage de l'observateur. En effet, la période de la lumière émise dans des conditions physiques semblables doit être partout la même lorsqu'elle est exprimée en temps propre.

$$\frac{v}{c} = \frac{\delta t_2}{\delta t_1} - 1 = \frac{R_2}{R_1} - 1 \tag{22}$$

mesure donc l'effet Doppler apparent dû à la variation du rayon de l'univers. *Il est égal à l'excès sur l'unité du rapport des rayons de l'univers à l'instant où la lumière est reçue et à l'instant où elle est émise.* v est la vitesse de l'observateur qui produirait le même effet. Lorsque la source est suffisamment proche nous pouvons écrire approximativement

$$\frac{v}{c} = \frac{R_2 - R_1}{R_1} = \frac{dR}{R} = \frac{R'}{R}\,dt = \frac{R'}{R}\,r$$

où r est la distance de la source. Nous avons donc

$$\frac{R'}{R} = \frac{v}{cr} \tag{23}$$

Les vitesses radiales de 43 nébuleuses extra-galactiques sont données par Strömberg [1].

La grandeur apparente m de ces nébuleuses se trouve dans le travail de Hubble. Il est possible d'en déduire leur distance, car Hubble a montré que les nébuleuses extra-galactiques sont de grandeurs absolues sensiblement égales (grandeur $-15{,}2$ à 10 parsecs, les écarts individuels pouvant atteindre deux grandeurs en plus ou en moins), la distance r exprimée en parsecs est alors donnée par la formule $\log r = 0{,}2m + 4{,}04$.

On trouve une distance de l'ordre de 10^6 parsecs, variant de quelques dixièmes à 3,3 millions de parsecs. L'erreur probable résultant de la dispersion en grandeur absolue est d'ailleurs considérable. Pour une différence de grandeur absolue de deux grandeurs en plus ou en moins, la distance passe de 0,4 à 2,5 fois la distance calculée. De plus, l'erreur à craindre est proportionnelle à la distance. On peut admettre que pour une distance d'un million de parsecs, l'erreur résultant de la dispersion en grandeur est du même ordre que celle résultant de la dispersion en vitesse. En effet, une différence d'éclat d'une grandeur correspond à une vitesse propre de 300 Km. égale à la vitesse propre du soleil par rapport aux nébuleuses. On peut espérer éviter une erreur systématique en donnant aux observations un poids proportionnel à $\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}$, où r est la distance en millions de parsecs.

---

(1) Analysis of radial velocities of globular clusters and non galactic nebulae. *Ap. J.* Vol. 61, p. 353, 1925. *Mt Wilson Contr.* N° 292.

Utilisant les 42 nébuleuses figurant dans les listes de Hubble et de Strömberg [1], et tenant compte de la vitesse propre du soleil (300 Km. dans la direction $\alpha = 315°$, $\delta = 62°$), on trouve une distance moyenne de 0,95 millions de parsecs et une vitesse radiale de 600 Km./sec, soit 625 Km./sec à 10^6 parsecs [2].

Nous adopterons donc

$$\frac{R'}{R} = \frac{v}{rc} = \frac{625 \times 10^5}{10^6 \times 3{,}08 \times 10^{18} \times 3 \times 10^{10}} = 0{,}68 \times 10^{-27}\ \mathrm{cm}^{-1} \qquad (24)$$

Cette relation nous permet de calculer R_o. Nous avons en effet par (16)

$$\frac{R'}{R} = \frac{1}{R_o\sqrt{3}}\sqrt{1 - 3y^2 + 2y^3} \qquad (25)$$

où nous avons posé

$$y = \frac{R_o}{R} \qquad (26)$$

D'autre part, d'après (18) et (26),

$$R_o^2 = R_E^2\, y^3 \qquad (27)$$

et donc

$$3\left(\frac{R'}{R}\right)^2 R_E^2 = \frac{1 - 3y^2 + 2y^3}{y^3} \qquad (28)$$

Introduisant les valeurs numériques de $\frac{R'}{R}$ (24) et de R_E (19), il vient :

$$y = 0{,}0465.$$

On a alors :

$$R = R_E\sqrt{y} = 0{,}215\ R_E = 1{,}83 \times 10^{28}\ \mathrm{cm.} = 6 \times 10^9\ \text{parsecs}$$

$$R_o = Ry = R_E\, y^{\frac{3}{2}} = 8{,}5 \times 10^{26}\ \mathrm{cm.} = 2{,}7 \times 10^8\ \text{parsecs}$$

$$= 9 \times 10^8\ \text{années de lumière.}$$

---

(1) Il n'est pas tenu compte de N. G. C. 5194 qui est associé à N. G. C. 5195. L'introduction des nuées de Magellan serait sans influence sur le résultat.

(2) En ne donnant pas de poids aux observations, on trouverait 670 Km./sec à $1{,}16 \times 10^6$ parsecs, 575 Km./sec à 10^6 parsecs. Certains auteurs ont cherché à mettre en évidence la relation entre v et r et n'ont obtenu qu'une très faible corrélation entre ces deux grandeurs. L'erreur dans la détermination des distances individuelles est du même ordre de grandeur que l'intervalle que couvrent les observations et la vitesse propre des nébuleuses (en toute direction) est grande (300 Km./sec. d'après Strömberg), il semble donc que ces résultats négatifs ne sont ni pour ni contre l'interprétation relativistique de l'effet Doppler. Tout ce que l'imprécision des observations permet de faire est de supposer v proportionnel à r et d'essayer d'éviter une erreur systématique dans la détermination du rapport v/r. Cf. LUNDMARK. The determination of the curvature of space time in de Sitter's world M. N., vol. 84, p. 747, 1924, et STRÖMBERG, *l. c.*

L'intégrale (16) se calcule facilement. Posant

$$x^2 = \frac{R}{R + 2R_o} \tag{29}$$

elle s'écrit

$$t = R_o\sqrt{3}\int\frac{4x^2\,dx}{(1-x^2)(3x^2-1)} = R_o\sqrt{3}\log\frac{1+x}{1-x} + R_o\log\frac{\sqrt{3}\,x-1}{\sqrt{3}\,x+1} + C \tag{30}$$

Si nous désignons par σ la fraction du rayon de l'univers parcourue par la lumière au temps t, nous avons aussi par (20) :

$$\sigma = \int\frac{dt}{R} = \sqrt{3}\int\frac{2dx}{3x^2-1} = \log\frac{\sqrt{3}\,x-1}{\sqrt{3}\,x+1} + C'. \tag{31}$$

Nous donnons ci-dessous une table de σ et t en fonction de $\frac{R}{R_o}$.

$\frac{R}{R_o}$	$\frac{t}{R_o}$	σ		$\frac{v}{c}$
		RADIANS	DEGRÉS	
1	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	19
2	$-4,31$	$-0,889$	$-51°$	9
3	$-3,42$	$-0,521$	$-30°$	$5\frac{2}{3}$
4	$-2,86$	$-0,359$	$-21°$	4
5	$-2,45$	$-0,266$	$-15°$	3
10	$-1,21$	$-0,087$	$-5°$	1
15	$-0,50$	$-0,029$	$-1°7$	$\frac{1}{3}$
20	0	0	0	0
25	0,39	0,017	1°	
∞	∞	0,087	5°	

Les constantes d'intégration sont choisies de telle sorte que σ et t soient nuls pour $\frac{R}{R_o} = 20$ au lieu de 21,5. La dernière colonne donne l'effet Doppler calculé par la formule (22). D'après la formule approchée (23) $\frac{v}{c}$ serait proportionnel à r et donc à σ. L'erreur commise en adoptant cette équation n'est que de cinq millièmes pour $\frac{v}{c} = 1$. Elle peut donc être employée tant que le spectre reste visible.

5. Signification de la relation (14).

Nous avons introduit la relation (14) entre les constantes α et λ d'après la solution d'Einstein. Cette relation est la condition pour que l' expression sous le radical au dénominateur de l'intégrale (11) admette une racine double R_o donnant par intégration un terme logarithmique. Pour des racines simples, on obtiendrait par intégration une racine carrée et la valeur de R correspondante serait un minimum comme dans la solution (12) de de Sitter. Ce minimum se produirait généralement à une époque de l'ordre de R_o, soit 10^9 années, c'est-à-dire à une époque récente à l'échelle de l'évolution stellaire. Il semble donc que la relation existant entre les constantes α et λ doit être voisine de (14) pour laquelle ce minimum est rejeté à l'époque moins l'infini (1).

6. Conclusion.

Nous avons obtenu une solution qui vérifie les conditions suivantes :

1. La masse de l'univers est constante et est liée à la constante cosmologique par la relation d'Einstein

$$\sqrt{\lambda} = \frac{2\pi^2}{\kappa M} = \frac{1}{R_o}$$

2. Le rayon de l'univers croît sans cesse depuis une valeur asymptotique R_o pour $t = -\infty$.

3. L'éloignement des nébuleuses extra-galactiques est un effet cosmique dû à l'expansion de l'espace et permettant de calculer le rayon R_o par les formules (24) et (25) ou approximativement par $R_o = \frac{rc}{v\sqrt{3}}$.

4. Le rayon de l'univers est du même ordre de grandeur que le rayon R_E déduit de la densité par la formule d'Einstein. On a

$$R = R_E \sqrt[3]{\frac{R_o}{R_E}} = \frac{1}{5} R_E$$

Cette solution concilie les avantages de celles de de Sitter et d'Einstein.

Remarquons que la plus grande partie de l'univers est à jamais hors de notre atteinte. La portée du grand télescope du Mont Wilson est estimée par Hubble à 5×10^7 parsecs soit $\frac{1}{120}R$, l'effet Doppler correspondant est déjà de 3000 Km/sec. Pour une distance de $0{,}087\,R$, il est égal à un, toute la lumière visible est rejetée dans l'infra-rouge. Il est impossible que se

(1) Si les racines positives devenaient imaginaires, le rayon varierait à partir de zéro, la variation étant ralentie au voisinage du module des racines imaginaires. Pour une relation sensiblement différente de (14), ce ralentissement serait faible et la durée de l'évolution à partir de $R = 0$ serait encore de l'ordre de R_o.

forment des images fantômes des nébuleuses ou des soleils parce que, si même aucune absorption ne se produisait, ces images seraient rejetées de plusieurs octaves dans l'infra-rouge et ne pourraient être observées.

Il resterait à se rendre compte de la cause de l'expansion de l'univers. Nous avons vu que la pression de radiation travaille lors de l'expansion. Ceci semble suggérer que cette expansion a été produite par la radiation elle-même. Dans un univers statique la lumière émise par la matière parcourt l'espace fermé, revient à son point de départ et s'accumule sans cesse. Il semble que là doit être cherchée l'origine de la vitesse d'expansion R'/R qu'Einstein supposait nulle et qui dans notre interprétation est observée comme vitesse radiale des nébuleuses extragalactiques.

SUR UNE EXPRESSION DE π EN SÉRIE

Note de M. Oct. Delhez

Bien que l'on puisse obtenir à l'infini des valeurs en séries pour π, et qu'il en existe de très recommandables, — telle celle de Lucas — nous avons cru devoir attirer l'attention sur la suivante, dont le premier terme est précisément l'entier de cette transcendante classique.

Une simple intégration par parties donne

$$\int l(1+x^2)\,dx = x\left[l(1+x^2)-2\right]+2\,\mathrm{arc\,tg}\,x \text{ [1]} \tag{1}$$

sans constante, parce que, pour $-1 \leqslant x \leqslant 1$, le premier membre est développable en

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda+1} \cdot \frac{x^{2\lambda+3}}{2\lambda+3}, \tag{2}$$

et que les deux membres s'annulent pour $x=0$.

Égalons actuellement (1) et (2), multiplions les deux parties de cette égalité par dx et intégrons entre 0 et x ; nous avons ainsi

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{(x+1)(2\lambda+3)} \cdot \frac{x^{2\lambda+4}}{2\lambda+4} = \frac{x^2-1}{2}\,l(1+x^2) - \frac{3}{2}x^2 + 2x\,\mathrm{arc\,tg}\,x. \tag{3}$$

Soit fait dès lors, dans (3), $x=1$; il vient

$$\pi = 3 + 2\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{(\lambda+1)(2\lambda+3)(2\lambda+4)}.$$

[1] La lettre l désigne un logarithme népérien.

A Homogeneous Universe of Constant Mass and Increasing Radius accounting for the Radial Velocity of Extra-galactic Nebulæ. By Abbé G. Lemaître.

(*Translated by permission from "Annales de la Société scientifique de Bruxelles," Tome XLVII, série A, première partie.*)

1. *Introduction.*

According to the theory of relativity, a homogeneous universe may exist such that all positions in space are completely equivalent; there is no centre of gravity. The radius of space R is constant; space is elliptic, *i.e.* of uniform positive curvature $1/R^2$; straight lines starting from a point come back to their origin after having travelled a path of length πR; the volume of space has a finite value $\pi^2 R^3$; straight lines are closed lines going through the whole space without encountering any boundary.

Two solutions have been proposed. That of de Sitter ignores the existence of matter and supposes its density equal to zero. It leads to special difficulties of interpretation which will be referred to later, but it is of extreme interest as explaining quite naturally the observed receding velocities of extra-galactic nebulæ, as a simple consequence of the properties of the gravitational field without having to suppose that we are at a point of the universe distinguished by special properties.

The other solution is that of Einstein. It pays attention to the evident fact that the density of matter is not zero, and it leads to a relation between this density and the radius of the universe. This relation forecasted the existence of masses enormously greater than any known at the time. These have since been discovered, the distances and dimensions of extra-galactic nebulæ having become known. From Einstein's formulæ and recent observational data, the radius of the universe is found to be some hundred times greater than the most distant objects which can be photographed by our telescopes.

Each theory has its own advantages. One is in agreement with the observed radial velocities of nebulæ, the other with the existence of matter, giving a satisfactory relation between the radius and the mass of the universe. It seems desirable to find an intermediate solution which could combine the advantages of both.

At first sight, such an intermediate solution does not appear to exist. A static gravitational field for a uniform distribution of matter without internal stress has only two solutions, that of Einstein and that of de Sitter. De Sitter's universe is empty, that of Einstein has been described as "containing as much matter as it can contain." It is remarkable that the theory can provide no mean between these two extremes.

The solution of the paradox is that de Sitter's solution does not really meet all the requirements of the problem. Space is homogeneous with constant positive curvature; space-time is also homogeneous, for all events are perfectly equivalent. But the partition of space-time into space and time disturbs the homogeneity. The co-ordinates used introduce a centre. A particle at rest at the centre of space describes a geodesic of the universe; a particle at rest otherwhere than at the centre does not describe a geodesic. The co-ordinates chosen destroy the homogeneity and produce the paradoxical results which appear at the so-called "horizon" of the centre. When we use co-ordinates and a corresponding partition of space and time of such a kind as to preserve the homogeneity of the universe, the field is found to be no longer static; the universe becomes of the same form as that of Einstein, with a radius no longer constant but varying with the time according to a particular law.

In order to find a solution combining the advantages of those of Einstein and de Sitter, we are led to consider an Einstein universe where the radius of space or of the universe is allowed to vary in an arbitrary way.

2. *Einstein Universe of Variable Radius. Field Equations. Conservation of Energy.*

As in Einstein's solution, we liken the universe to a rarefied gas whose molecules are the extra-galactic nebulæ. We suppose them so numerous that a volume small in comparison with the universe as a whole contains enough nebulæ to allow us to speak of the density of matter. We ignore the possible influence of local condensations. Furthermore, we suppose that the nebulæ are uniformly distributed so that the density does not depend on position. When the radius of the universe varies in an arbitrary way, the density, uniform in space, varies with time. Furthermore, there are generally interior stresses, which, in order to preserve the homogeneity, must reduce to a simple pressure, uniform in space and variable with time. The pressure, being two-thirds of the kinetic energy of the "molecules," is negligible with respect to the energy associated with matter; the same can be said of interior stresses in nebulæ or in stars belonging to them. We are thus led to put $p = 0$.

Nevertheless it might be necessary to take into account the radiation-pressure of electromagnetic energy travelling through space; this energy is weak but it is evenly distributed through the whole of space and might afford a notable contribution to the mean energy. We shall thus keep the pressure p in the general equations as the mean radiation-pressure of light, but we shall write $p = 0$ when we discuss the application to astronomy.

We denote the density of total energy by ρ, the density of radiation energy by $3p$, and the density of the energy condensed in matter by $\delta = \rho - 3p$. We identify ρ and $-p$ with the components T_4^4 and $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3$ of the material energy tensor, and δ with T. Working out the contracted Riemann tensor for a universe with a line-element given by

$$ds^2 = -R^2 d\sigma^2 + dt^2, \qquad (1)$$

where $d\sigma$ is the elementary distance in a space of radius unity, and R is a function of the time t, we find that the field equations can be written

$$3\frac{R'^2}{R^2} + \frac{3}{R^2} = \lambda + \kappa\rho \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

and

$$2\frac{R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2} + \frac{1}{R^2} = \lambda - \kappa p \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Accents denote derivatives with respect to t. λ is the unknown cosmological constant, and κ is the Einstein constant whose value is $1{\cdot}87 \,.\, 10^{-27}$ in C.G.S. units (8π in natural units).

The four identities giving the expression of the conservation of momentum and of energy reduce to

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{3R'}{R}(\rho + p) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

which is the energy equation. This equation can replace (3). As $V = \pi^2R^3$ it can be written

$$d(V\rho) + pdV = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

showing that *the variation of total energy plus the work done by radiation-pressure in the dilatation of the universe is equal to zero.*

3. *Universe of Constant Mass.*

If $M = V\delta$ remains constant, we write, α being a constant,

$$\kappa\delta = \frac{\alpha}{R^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

As

$$\rho = \delta + 3p$$

we have

$$3d(pR^3) + 3pR^2dR = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

and, β being a constant of integration,

$$\kappa p = \frac{\beta}{R^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

and therefore

$$\kappa\rho = \frac{\alpha}{R^3} + \frac{3\beta}{R^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

By substitution in (2) we have

$$\frac{R'^2}{R^2} = \frac{\lambda}{3} - \frac{1}{R^2} + \frac{\kappa\rho}{3} = \frac{\lambda}{3} - \frac{1}{R^2} + \frac{\alpha}{3R^3} + \frac{\beta}{R^4} \quad . \quad . \quad (10)$$

and

$$t = \int \frac{dR}{\sqrt{\frac{\lambda R^2}{3} - 1 + \frac{\alpha}{3R} + \frac{\beta}{R^2}}} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

When α and β vanish, we obtain the de Sitter solution in Lanczos's form—

$$R = \sqrt{\frac{3}{\lambda}} \cosh \sqrt{\frac{\lambda}{3}}(t - t_0) \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

The Einstein solution is found by making $\beta = 0$ and R constant. Writing $R' = R'' = 0$ in (2) and (3) we find

$$\frac{1}{R^2} = \lambda \qquad \frac{3}{R^2} = \lambda + \kappa\rho \qquad \rho = \delta$$

or

$$R = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \qquad \kappa\delta = \frac{2}{R^2} \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

and from (6)

$$\alpha = \kappa\delta R^3 = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

The Einstein solution does not result from (14) alone ; it also supposes that the initial value of R′ is zero. If we write

$$\lambda = \frac{1}{R_0^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

we have for $\beta = 0$ and $\alpha = 2R_0$

$$t = R_0\sqrt{3}\int\frac{dR}{R - R_0}\sqrt{\frac{R}{R + 2R_0}} \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

For this solution the two equations (13) are of course no longer valid.

Writing

$$\kappa\delta = \frac{2}{R_E^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

we have from (14) and (15)

$$R^3 = R_E^2 R_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

The value of R_E, the radius of the universe computed from the mean density by Einstein's equation (17), has been found by Hubble to be

$$R_E = 8{\cdot}5 \times 10^{28} \text{ cm.} = 2{\cdot}7 \times 10^{10} \text{ parsec.} \quad . \quad . \quad (19)$$

We shall see later that the value of R_0 can be computed from the radial velocities of the nebulæ ; R can then be found from (18).

Finally, we shall show that a serious departure from (14) would lead to consequences not easily acceptable.

4. *Doppler Effect due to the Variation of the Radius of the Universe.*

From (1) we have for a ray of light

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

where σ_1 and σ_2 relate to spatial co-ordinates. We suppose that the light is emitted at the point σ_1 and observed at σ_2. A ray of light emitted slightly later starts from σ_1 at time $t_1 + \delta t_1$ and reaches σ_2 at time $t_2 + \delta t_2$. We have therefore

$$\frac{\delta t_2}{R_2} - \frac{\delta t_1}{R_1} = 0, \qquad \frac{\delta t_2}{\delta t_1} - 1 = \frac{R_2}{R_1} - 1 \quad . \quad . \quad (21)$$

where R_1 and R_2 are the values of the radius R at the time of emission t_1 and at the time of observation t_2. If δt_1 is the period of the emitted light, δt_2 is the period of the observed light. Now δt_1 is also the period of light emitted under the same conditions in the neighbourhood of the observer, because the period of light emitted under the same physical conditions has the same value everywhere when reckoned in proper time. Therefore

$$\frac{v}{c} = \frac{\delta t_2}{\delta t_1} - 1 = \frac{R_2}{R_1} - 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

is the apparent Doppler effect due to the variation of the radius of the universe. *It equals the ratio of the radii of the universe at the instants of observation and emission, diminished by unity.*

v is that velocity of the observer which would produce the same effect. When the light source is near enough, we have the approximate formulæ

$$\frac{v}{c} = \frac{R_2 - R_1}{R_1} = \frac{dR}{R} = \frac{R'}{R}dt = \frac{R'}{R}r$$

where r is the distance of the source. We have therefore

$$\frac{R'}{R} = \frac{v}{cr} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

From a discussion of available data, we adopt

$$\frac{R'}{R} = 0{\cdot}68 \times 10^{-27} \text{ cm.}^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

and find from (16)

$$\frac{R'}{R} = \frac{1}{R_0\sqrt{3}}\sqrt{1 - 3y^2 + 2y^3} \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

where

$$y = \frac{R_0}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Now from (18) and (26)

$$R_0{}^2 = R_E{}^2 y^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

and therefore

$$3\left(\frac{R'}{R}\right)^2 R_E{}^2 = \frac{1 - 3y^2 + 2y^3}{y^3} \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

With the adopted numerical data (24) and (19), we have

$$y = 0{\cdot}0465$$

giving

$$R = R_E\sqrt{y} = 0{\cdot}215 R_E = 1{\cdot}83 \times 10^{28} \text{ cm.} = 6 \times 10^9 \text{ parsecs.}$$
$$R_0 = Ry = R_E y^{\frac{3}{2}} = 8{\cdot}5 \times 10^{26} \text{ cm.} = 2{\cdot}7 \times 10^8 \text{ parsecs.}$$
$$= 9 \times 10^8 \text{ light-years.}$$

Integral (16) can easily be computed. Writing

$$x^2 = \frac{R}{R + 2R_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

it can be written

$$t = R_0\sqrt{3}\int\frac{4x^2dx}{(1 - x^2)(3x^2 - 1)}$$

$$= R_0\sqrt{3}\log\frac{1 + x}{1 - x} + R_0\log\frac{\sqrt{3}x - 1}{\sqrt{3}x + 1} + C \quad . \quad (30)$$

If σ is the fraction of the radius of the universe travelled by light during time t, we have also

$$\sigma = \int\frac{dt}{R} = \sqrt{3}\int\frac{2dx}{3x^2 - 1} = \log\frac{\sqrt{3}x - 1}{\sqrt{3}x + 1} + C' \quad . \quad (31)$$

The following table gives values of σ and t for different values of R/R_0:—

Table.—*Values of σ and t.*

$\frac{R}{R_0}$.	$\frac{t}{R_0}$.	σ		$\frac{v}{c}$.
		Radians	Degrees.	
1	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	19
2	−4·31	−0·889	−51°	9
3	−3·42	−0·521	−30	$5\frac{2}{3}$
4	−2·86	−0·359	−21	4
5	−2·45	−0·266	−15	3
10	−1·21	−0·087	− 5	1
15	−0·50	−0·029	− 1·7	$\frac{1}{3}$
20	0·00	0·000	0·0	0
25	0·39	0·017	1	..
∞	∞	0·087	5	..

The constants of integration are adjusted to make σ and t vanish for $R/R_0 = 20$ in place of 21·5. The last column gives the Doppler effect computed from (22). The approximate formula (23) would make v/c proportional to r and thus to σ. The error is only 0·005 for $v/c = 1$. The approximate formula may therefore be used within the limits of the visible spectrum.

5. *The Meaning of Equation* (14).

The relation (14) between the two constants λ and α has been adopted following Einstein's solution. It is the necessary condition that the quartic under the radical in (11) may have a double root R_0 giving on integration a logarithmic term. For simple roots, integration would give a square root, corresponding to a minimum of R as in de Sitter's solution (12). This minimum would generally occur at time of the order of R_0, say 10^9 years—*i.e.* quite recently for stellar evolution.

If the positive roots were to become imaginary, the radius would vary from zero upwards, the variation slowing down in the neighbourhood of the modulus of the imaginary roots. In both cases the time of variation of R in the same sense would be of the order of R_0 if the relation between λ and α were seriously different from (14).

6. *Conclusion.*

We have found a solution such that

(1°) The mass of the universe is a constant related to the cosmological constant by Einstein's relation

$$\sqrt{\lambda} = \frac{2\pi^2}{\kappa M} = \frac{1}{R_0}.$$

(2°) The radius of the universe increases without limit from an asymptotic value R_0 for $t = -\infty$.

(3°) The receding velocities of extragalactic nebulæ are a cosmical effect of the expansion of the universe. The initial radius R_0 can be computed by formulæ (24) and (25) or by the approximate formula

$$R_0 = \frac{rc}{v\sqrt{3}}.$$

This solution combines the advantages of the Einstein and de Sitter solutions.

Note that the largest part of the universe is for ever out of our reach. The range of the 100-inch Mount Wilson telescope is estimated by Hubble to be 5×10^7 parsecs, or about R/200. The corresponding Doppler effect is 3000 km./sec. For a distance of 0·087R it is equal to unity, and the whole visible spectrum is displaced into the infra-red. It is impossible to see ghost-images of nebulæ or suns, as even if there were no absorption these images would be displaced by several octaves into the infra-red and would not be observed.

It remains to find the cause of the expansion of the universe. We have seen that the pressure of radiation does work during the expansion. This seems to suggest that the expansion has been set up by the radiation itself. In a static universe light emitted by matter travels round space, comes back to its starting-point, and accumulates indefinitely. It seems that this may be the origin of the velocity of expansion R′/R which Einstein assumed to be zero and which in our interpretation is observed as the radial velocity of extra-galactic nebulæ.

REFERENCES.

(1) For the different partitions of space and time in the de Sitter universe, see
K. Lanczos, *Phys. Zeits.*, **23**, 539, 1922.
H. Weyl, *Phys. Zeits*, **24**, 230, 1923.
P. du Val, *Phil. Mag.*, 6, **47**, 930, 1924.
G. Lemaître, *Journal of Math. and Phys.*, **4**, No. 3, May 1925.

(2) Equations of the universe of variable radius and constant mass have been fully discussed, without reference to the receding velocity of nebulæ, by
A. FRIEDMANN, " Über die Krümmung des Raümes," *Z. f. Phys.*, **10**, 377, 1922; see also
A. EINSTEIN, *Z. f. Phys.*, **11**, 326, 1922, and **16**, 228, 1923.
The universe of variable radius has been independently studied by
R. C. TOLMAN, *P.N.A.S.*, **16**, 320, 1930.
(3) Discussion of the theory, and recent developments are found in
A. S. EDDINGTON, *M.N.*, **90**, 668, 1930.
W. DE SITTER, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **16**, 474, 1930, and *B.A.N.*, **5**, No. 185, 193, and 200 (1930).
G. LEMAÎTRE, *B.A.N.*, **5**, No. 200, 1930.
(4) Popular expositions have been given by
G. LEMAÎTRE, " La grandeur de l'espace," *Revue des questions scientifiques*, March 1929.
W. DE SITTER, " The Expanding Universe," *Scientia*, Jan. 1931.

The Expanding Universe. By Abbé G. Lemaître.

(*Communicated by Sir A. S. Eddington.*)

1. *Introduction.*

Eddington has suggested that the expansion of a universe in equilibrium may be started by the formation of condensations. A preliminary investigation by W. H. McCrea and G. C. McVittie seems to point out an effect of opposite sense according to the nature of the condensations.* I find that the formation of condensations and the degree of concentration of these condensations have no effect whatever on the equilibrium of the universe. Nevertheless, the expansion of the universe is due to an effect very closely related to the formation of condensations, which may be named the " stagnation " of the universe. When there is no condensation, the energy, or at least a notable part of it, may be able to wander freely through the universe. When condensations are formed this free kinetic energy has a chance to be captured by the condensations and then to remain bound to them. That is what I mean by a " stagnation " of the world—a diminution of the exchanges of energy between distant parts of it.

In order to investigate the effect of condensations in a universe homogeneous in the mean, I consider a definite condensation of supposed spherical symmetry, and I average the outside condensations so that they also may be thought of as having spherical symmetry. The condensation under investigation is limited by a spherical shell which is the neutral zone between it and neighbouring condensations; a point on this neutral zone is not more within the gravitational influence of the interior condensation than of the condensations outside. The expansion of the neutral zone gives a measure of the expansion of the

* Sir A. S. Eddington, *M.N.*, **90**, 668, 1930; W. H. McCrea and G. C. McVittie, *M.N.*, **91**, 128, 1930; G. C. McVittie, *M.N.*, **91**, 274, 1931.